Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Deskriptivní geometrie 2

Pomocný učební text - díl I

Světlana Tomiczková

Plzeň – 12. února 2016 – verze 2.0

Autoři

Obsah

1 Elementární plochy a tělesa **5**
1.1 Základní pojmy . . . 5
1.1.1 Jehlanová plocha, jehlan . . . 5
1.1.2 Hranolová plocha, hranol . . . 5
1.1.3 Kuželová plocha, kužel . . . 6
1.1.4 Válcová plocha, válec . . . 7
1.1.5 Kulová plocha, koule . . . 7
1.1.6 Řezy na elementárních plochách . . . 7
1.1.7 Průsečík přímky a elementární plochy . . . 9
1.1.8 Průnik jehlanových a hranolových ploch . . . 12
1.1.9 Tečná rovina . . . 15
1.2 Kontrolní otázky . . . 15

2 Křivky **17**
2.1 Základní pojmy . . . 17
2.1.1 Klasifikace křivek . . . 17
2.1.2 Tečna a normála křivky . . . 18
2.1.3 Klasifikace bodů křivky . . . 18
2.1.4 Rektifikace . . . 18
2.1.5 Oskulační rovina a oskulační kružnice . . . 19
2.1.6 Obálka . . . 20
2.1.7 Ekvidistanta . . . 20
2.1.8 Cykloida . . . 20
2.1.9 Evoluta a evolventa . . . 21
2.1.10 Řídící kuželová plocha . . . 21
2.2 Šroubovice . . . 22
2.2.1 Základní pojmy . . . 22
2.2.2 Parametrické vyjádření šroubovice . . . 23
2.2.3 Tečna šroubovice a její průvodní trojhran . . . 23
2.3 Kontrolní otázky . . . 25

3 Obecné poznatky o plochách **26**
3.1 Základní pojmy . . . 26
3.2 Úlohy na plochách . . . 27
3.3 Kontrolní otázky . . . 29

4 Rotační plochy **30**
4.1 Základní pojmy 30
4.2 Vlastnosti rotačních ploch 31
4.3 Klasifikace rotačních ploch 32
4.4 Úlohy na rotačních plochách 32
4.5 Průniky rotačních ploch 35
4.6 Rotační kvadriky 35
4.7 Kontrolní otázky 36

5 Šroubové plochy **37**
5.1 Základní pojmy 37
5.2 Vlastnosti šroubových ploch 37
5.3 Klasifikace šroubových ploch 38
5.4 Úlohy na šroubových plochách 38
5.5 Kontrolní otázky 41

6 Přímkové plochy **42**
6.1 Základní pojmy 42
6.2 Zborcené plochy 43
6.2.1 Tečné roviny podél tvořící přímky zborcené plochy 44
6.2.2 Zborcený hyperboloid 45
6.2.3 Hyperbolický paraboloid 47
6.2.4 Konoidy 48
6.2.5 Další přímkové plochy 51
6.3 Rozvinutelné plochy 52
6.3.1 Typy rozvinutelných ploch 52
6.3.2 Metody komplanace 53
6.3.3 Tečna křivky v rozvinutí 55
6.3.4 Rozvinutí rozvinutelné šroubové plochy 55
6.3.5 Konstrukce a rozvinutí přechodové rozvinutelné plochy 55
6.4 Kontrolní otázky 56

Kapitola 1

Elementární plochy a tělesa

1.1 Základní pojmy

Elementárními plochami budeme rozumět jehlanovou, hranolovou, kuželovou, válcovou a kulovou plochu a elementárními tělesy jehlan, hranol, kužel, válec a kouli. Elementární tělesa znáte z předchozího studia na střední škole. Zde je jen dáme do souvislostí s nově definovanými pojmy.

1.1.1 Jehlanová plocha, jehlan

Jehlanová plocha je určena rovinnou lomenou čárou - polygonem c ($c \subset \sigma$) a bodem V, který neleží v rovině polygonu ($V \notin \sigma$), a je tvořena přímkami, které protínají polygon c a procházejí bodem V - obr. 1.1 a).

Je-li polygon uzavřený, pak množina přímek, které procházejí daným bodem V a protínají vnitřek polygonu nebo polygon, se nazývá **jehlanový prostor**. Přímky určené vrcholem V a vrcholy polygonu jsou hrany jehlanové plochy.

Rovina, která prochází vrcholem, se nazývá **vrcholová rovina**.

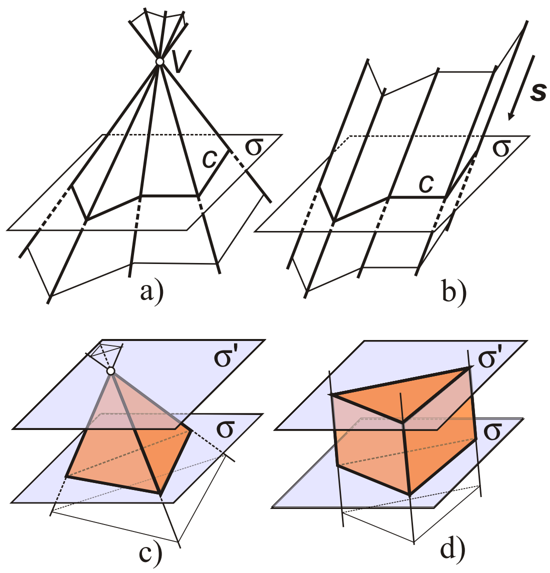
Jehlan je průnik jehlanového prostoru a prostorové vrstvy určené rovinou σ řídícího polygonu a vrcholové roviny $\sigma' \parallel \sigma$ - obr. 1.1 c).) Výška jehlanu je vzdálenost vrcholu V od roviny podstavy. Má-li podstava střed S a leží-li vrchol V na kolmici vztyčené v bodě S k rovině podstavy, nazýváme jehlan **kolmý** a SV je jeho osa. V opačném případě je jehlan **kosý**.

1.1.2 Hranolová plocha, hranol

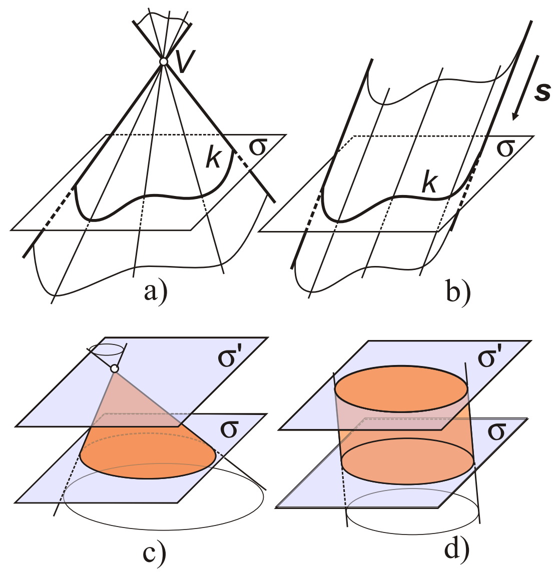
Hranolová plocha je určena rovinnou lomenou čárou - polygonem c ($c \subset \sigma$) a směrem s, který nenáleží dané rovině ($s \not\parallel \sigma$), a je tvořena přímkami, které protínají polygon c a jsou směru s - obr. 1.1b).

Je-li polygon uzavřený, pak množina přímek směru s, které protínají polygon nebo vnitřek polygonu, se nazývá **hranolový prostor**. Přímky určené vrcholy polygonu a směru s jsou hrany hranolové plochy. V projektivním rozšíření euklidovského prostoru lze definovat hranolovou plochu jako speciální případ jehlanové plochy, jejímž vrcholem je nevlastní bod. **Vrcholovou rovinou** je každá rovina směru s.

Hranol je průnik hranolového prostoru a prostorové vrstvy určené rovinou σ řídícího polygonu a roviny $\sigma' \parallel \sigma$ - obr. 1.1d). Výška hranolu je vzdálenost rovin podstav. Jsou-li pobočné hrany kolmé na roviny podstav, nazýváme hranol **kolmý** a spojnice středů podstav je jeho osou (pokud existuje). V opačném případě je hranol **kosý**. Hranol, jehož podstavou je rovnoběžník, nazýváme **rovnoběžnostěn**.



Obrázek 1.1:



Obrázek 1.2:

1.1.3 Kuželová plocha, kužel

Kuželová plocha je určena rovinnou křivku k ($k \subset \sigma$) a bodem V, který neleží v rovině dané křivky ($V \notin \sigma$), a je tvořena přímkami, které protínají křivku k a procházejí bodem V - obr. 1.2 a).

Je-li křivka k uzavřená, pak množina přímek, které procházejí daným bodem V a protínají křivku nebo vnitřek křivky, se nazývá **kuželový prostor**. Přímka určená vrcholem V a bodem křivky k je površka kuželové plochy.

Rovina, která prochází vrcholem, se nazývá **vrcholová rovina**.

Kužel je průnik kuželového prostoru a prostorové vrstvy určené rovinou σ řídícího polygonu a vrcholové roviny $\sigma' \parallel \sigma$ - obr. 1.2 c).

Je-li řídící křivkou kuželové plochy kružnice (řídící kružnice), kuželová plocha se nazývá **kruhová**. Jestliže je spojnice středu S řídící kružnice k a vrcholu V kolmá na rovinu σ, pak nazýváme kuželovou plochu **kolmou** nebo **rotační** a přímku SV osou kuželové plochy. Rotační kuželovou plochu můžeme také získat rotací přímky, která protíná osu otáčení a není k ní kolmá. Není-li přímka SV kolmá na rovinu řídící kružnice, nazývá se kuželová plocha **kosá**. Podobně **kolmý** nebo **rotační kužel** má osu kolmou k rovině podstavy na rozdíl od **kosého kužele**.

1.1.4 Válcová plocha, válec

Válcová plocha je určena rovinnou křivkou k ($k \subset \sigma$) a směrem s, který nenáleží dané rovině ($s \nparallel \sigma$), a je tvořena přímkami, které protínají křivku k a jsou směru s - obr. 1.2 b).

Je-li křivka k uzavřená, pak množina přímek směru s, které protínají křivku nebo procházejí vnitřním bodem křivky, se nazývá **válcový prostor**. Přímka určená bodem křivky k a směru s je površka. Podobně jako u hranolové plochy, můžeme v projektivním rozšíření euklidovského prostoru definovat válcovou plochu jako speciální případ kuželové plochy, jejímž vrcholem je nevlastní bod. **Vrcholovou rovinou** je každá rovina směru s.

Válec je průnik válcového prostoru a prostorové vrstvy určené rovinou σ řídícího polygonu a roviny $\sigma' \parallel \sigma$ - obr. 1.2 d).

Je-li řídící křivkou válcové plochy regulární kuželosečka, získáme eliptickou, parabolickou či hyperbolickou válcovou plochu. Jestliže je řídící křivkou kružnice, nazývá se válcová plocha **kruhová**. Jestliže jsou površky kolmé na rovinu řídící kružnice, dostáváme kolmou kruhovou neboli **rotační** válcovou plochu, v opačném případě je plocha **kosá**.

Poznámka 1.1 Každá křivka (podle naší definice rovinná) na válcové nebo kuželové ploše může být řídící křivkou této plochy. Řezem rotační kuželové plochy rovinou může být, podle polohy roviny řezu, i jiná kuželosečka. To znamená, že zvolíme-li tuto kuželosečku jako řídící křivku, dostaneme opět rotační kuželovou plochu. Nemá tedy smysl, na rozdíl od válcových ploch, rozlišovat hyperbolickou nebo parabolickou kuželovou plochu od eliptické kuželové plochy.

1.1.5 Kulová plocha, koule

Kulová plocha je množina všech bodů, které mají od daného bodu S vzdálenost rovnu danému kladnému číslu r. **Koulí** rozumíme množinu všech bodů, které mají od daného bodu S vzdálenost menší nebo rovnu danému kladnému číslu r.

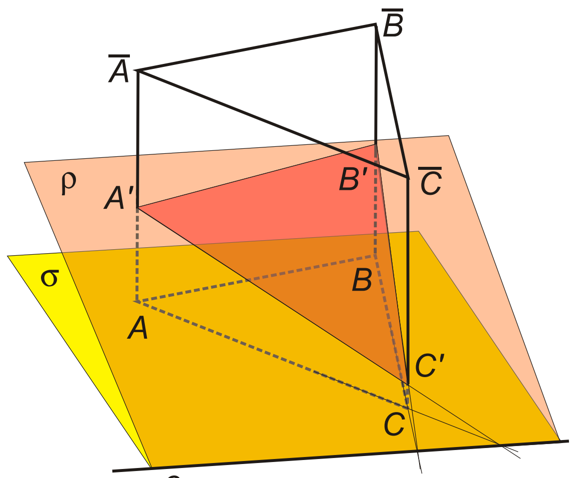
1.1.6 Řezy na elementárních plochách

V následující podkapitole budeme řešit řezy na elementárních plochách. Pláštěm elementárního tělesa je příslušná elementární plocha, tzn. pokud provádíme řez na tělese, musíme sestrojit řez plochou a popř. doplnit průnik roviny řezu s podstavou tělesa.

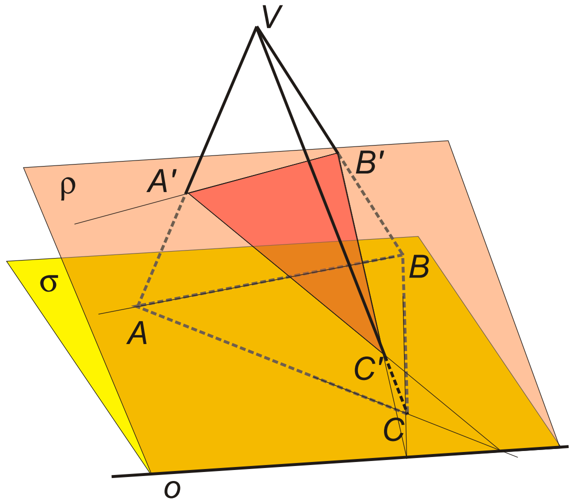
- **Řez hranolovou a jehlanovou plochou, popř. hranolu a jehlanu**
  Je dán hranol nebo jehlan s podstavou v rovině σ a rovina řezu ρ.

  Postup řešení:

  1. Určíme průsečnici rovin σ a ρ. ($o = \sigma \cap \rho$)
  2. Najdeme jeden bod řezu jako průnik jedné hrany s rovinou ρ.
  3. **a)** Pro hranol využijeme k sestrojení dalších bodů řezu osovou afinitu, která je určena osou $o = \sigma \cap \rho$, směrem afinity, který je dán hranou hranolu a párem odpovídajících si bodů, kterými jsou bod podstavy a bod řezu ležící na jedné hraně (obr.1.3).



Obrázek 1.3:



Obrázek 1.4:

b) Pro jehlan využijeme k sestrojení dalších bodů řezu středovou kolineaci, která je určena osou $o = \sigma \cap \rho$, středem kolineace, kterým je vrchol jehlanu a párem odpovídajících si bodů, kterými jsou bod podstavy a bod řezu ležící na jedné hraně (obr.1.4).

- **Řez válcovou a kuželovou plochou, popř. válce a kužele**
  Je dán válec nebo kužel s podstavou v rovině σ a rovina řezu ρ.

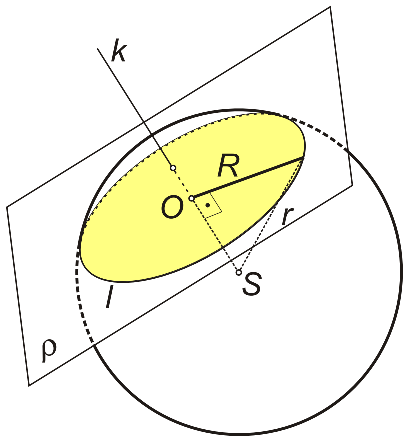
  Postup řešení:
  V případě obecné válcové nebo kuželové plochy sestrojíme dostatečný počet bodů řezu následujícím způsobem a proložíme jimi křivku. Pokud víme, že řezem dané plochy je známá křivka, kterou umíme sestrojit ze zadaných prvků, můžeme najít tyto prvky a řez dokončit jinou konstrukcí (např. řezem rotačního kužele bude kuželosečka, která je podle Pascalovy věty určena např. pěti body nebo třemi body a dvěma tečnami apod.)

  Řez setrojujeme podobně jako v předchozím případě, jen místo hran použijeme površky.

  1. Určíme průsečnici rovin σ a $\rho = o$. ($o = \sigma \cap \rho$)
  2. Najdeme jeden bod řezu jako průnik jedné površky s rovinou ρ.
  3. **a)** Pro válec využijeme k sestrojení dalších bodů řezu osovou afinitu, která je určena osou $o = \sigma \cap \rho$, směrem afinity, který je rovnoběžný s osou válce a párem odpovídajících si bodů, kterými jsou bod podstavy a bod řezu ležící na jedné površce.

     b) Pro kužel využijeme k sestrojení dalších bodů řezu středovou kolineaci, která je určena osou $o = \sigma \cap \rho$, středem kolineace, kterým je vrchol kužele a párem odpovídajících si bodů, kterými jsou bod podstavy a bod řezu ležící na jedné površce.

- **Řez kulové plochy**
  Je dána kulová plocha se středem S a poloměrem r a rovina řezu ρ.



Obrázek 1.5:

Postup řešení:
Řezem kulové plochy rovinou ρ je kružnice l ležící v této rovině. Je třeba najít její střed O a poloměr R.

1. Střed O kružnice l leží na přímce k kolmé k rovině ρ: $k \perp \rho$, $S \in k$.
2. $O = k \cap \rho$.
3. Určíme vzdálenost $|OS|$. Podle Pythagorovy věty $R = \sqrt{r^2 - |OS|^2}$.
4. Kružnice řezu $l \equiv (O; R)$.

Příklad 1.1 Sestrojíme řez jehlanu, který má podstavu v rovině xy a vrchol V rovinou ρ - obr. 1.6.

Řešení: (obr.1.7)

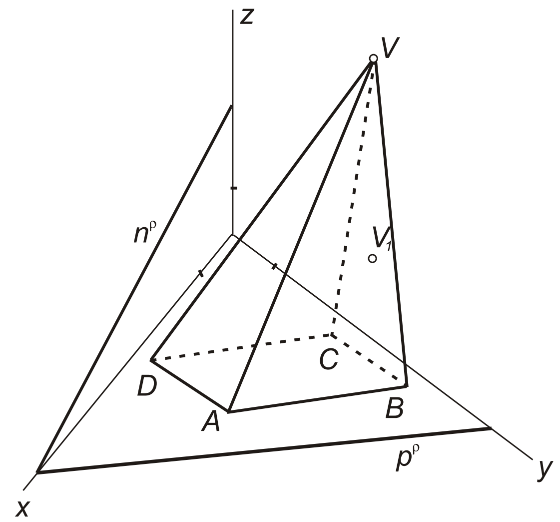
1. Podstava jehlanu leží v rovině xy, průsečnicí roviny řezu a roviny podstavy je půdorysná stopa p^ρ.
2. Sestrojíme průsečík A' hrany AV s rovinou ρ pomocí krycí přímky s ($A'_1 = A_1V_1 \cap s_1$).
3. S využitím kolineace se středem V, osou p^ρ a párem odpovídajících si bodů A, A', sestrojíme další body řezu (např. $D' \in DV$ a $DA \cap D'A' \in p^\rho$).

□

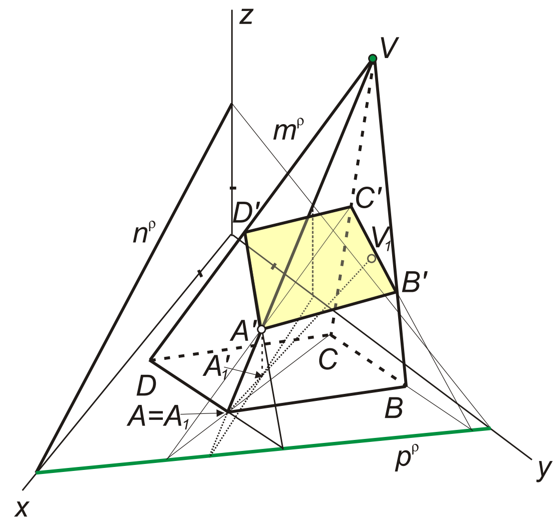
1.1.7 Průsečík přímky a elementární plochy

Postup řešení:

1. Proložíme přímkou rovinu ρ.
2. Najdeme řez plochy rovinou ρ.
3. Určíme průsečíky přímky a řezu.



Obrázek 1.6:



Obrázek 1.7:

V případě kulové plochy volíme libovolnou rovinu, sestrojíme řez (řezem je vždy kružnice) a najdeme průsečíky přímky s kružnicí řezu. Speciálně je možné volit rovinu procházející středem kulové plochy. Střed kružnice řezu je potom totožný se středem kulové plochy a její poloměr je shodný s poloměrem kulové plochy.

V ostatních případech je vhodné volit **vrcholovou rovinu**. Pro kuželovou a jehlanovou plochu prochází vrcholová rovina vrcholem plochy. Pokud přímka protíná plochu, pak jsou řezem vrcholovou rovinou různoběžné přímky.

Pro válcovou a hranolovou plochu je vrcholová rovina rovnoběžná s površkami nebo hranami plochy (prochází nevlastním vrcholem plochy). Řezem vrcholovou rovinou jsou, v případě, že přímka plochu protíná, rovnoběžky.

Příklad 1.2 Sestrojíme průsečíky přímky p s pláštěm válce, který má podstavu v rovině xy - obr. 1.8.

Řešení: (obr.1.9)

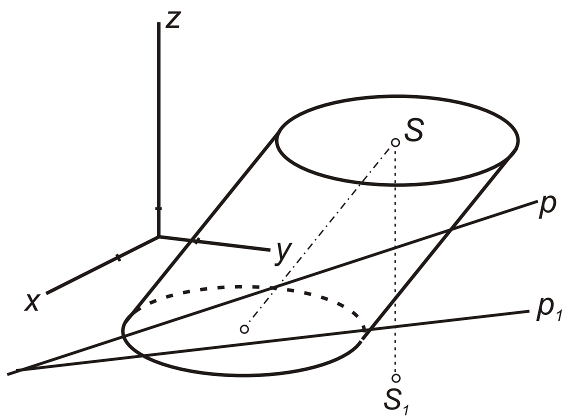
1. Vrcholová rovina ρ je určena přímkou p a je rovnoběžná s osou válce. (Vedeme přímku n různoběžnou s přímkou p a rovnoběžnou s osou o - $\rho(p, n)$.
2. Sestrojíme řez válce vrcholovou rovinou:

   a) Sestrojíme průsečnici roviny řezu a roviny podstavy. Protože podstava leží v rovině xy, sestrojíme půdorysnou stopu p^ρ roviny ρ (sestrojíme půdorysné stopníky přímek p, n).

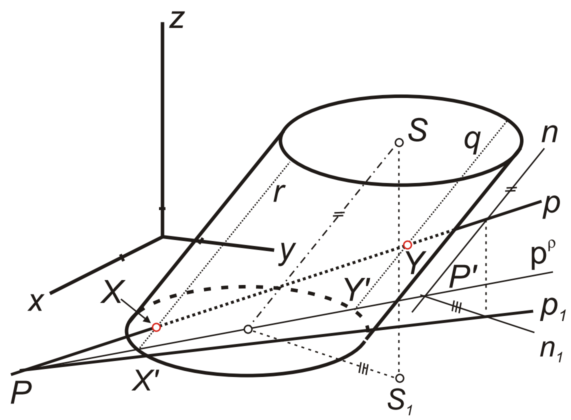
   b) Určíme průsečíky X', Y' stopy p^ρ a podstavy válce.

   c) Řezem válcové plochy vrcholovou rovinou ρ jsou přímky r, q procházející body X', Y' a rovnoběžné s osou o válce.
3. Sestrojíme průsečíky X, Y přímky p s řezem válcové plochy vrcholovou rovinou (přímky r, q).

□



Obrázek 1.8:



Obrázek 1.9:

Příklad 1.3 Sestrojíme průsečíky přímky p s pláštěm jehlanu $ABCDV$, který má podstavu $ABCD$ v rovině yz - obr. 1.10.

Řešení: (obr.1.11)

1. Vrcholová rovina ρ je určena přímkou p a vrcholem V jehlanu. (vedeme přímku n rovnoběžnou (můžeme vést i různoběžku) s přímkou p a procházející vrcholem V - $\rho(p, n)$.
2. Sestrojíme řez jehlanu vrcholovou rovinou:

   a) Sestrojíme průsečnici roviny řezu a roviny podstavy. Protože podstava leží v rovině yz, sestrojíme bokorysnou stopu m^ρ roviny ρ (sestrojíme bokorysné stopníky přímek p, n).

   b) Určíme průsečíky X', Y' stopy m^ρ a podstavy jehlanu.

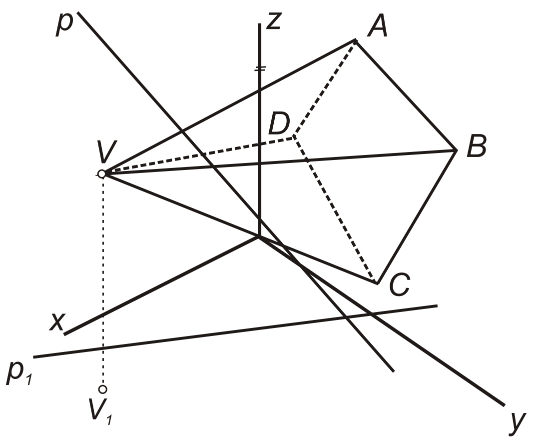
   c) Řezem jehlanové plochy vrcholovou rovinou ρ jsou přímky r, q procházející body X', Y' a vrcholem V jehlanu.

3. Sestrojíme průsečíky X, Y přímky p s řezem jehlanové plochy vrcholovou rovinou (přímky r, q).

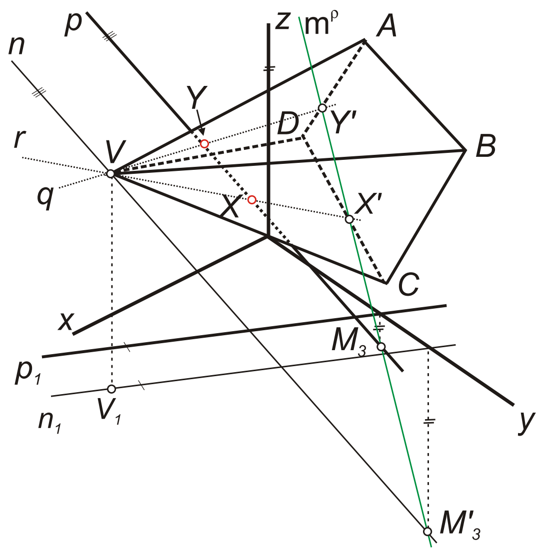
□

Příklad 1.4 Sestrojíme průsečíky přímky p s kulovou plochou κ. Kulová plocha je určena středem S a poloměrem r - obr. 1.12.

Řešení: (obr.1.13)



Obrázek 1.10:



Obrázek 1.11:

1. Sestrojíme řez rovinou ρ, která je určena přímkou p a středem S kulové plochy κ. (bodem S vedeme horizontální hlavní přímku h, různoběžnou s přímkou p - $\rho(p, h)$.
2. Sestrojíme řez kulové plochy κ rovinou ρ (řezem je kružnice k se středem S a poloměrem r) a najdeme průsečíky přímky p s řezem:

   a) Otočíme rovinu ρ kolem hlavní přímky h do polohy rovnoběžné s půdorysnou (sestrojíme otočenou přímku p a řez). V otočení se řez zobrazí jako kružnice k_0 (její střed je bod $S_1 = S_0$, který při otáčení zůstane na místě, protože leží na ose otáčení a poloměr je shodný s poloměrem kulové plochy).

   b) V otočení určíme průsečíky X_0, Y_0 přímky p_0 a kružnice řezu k_0.

   c) Průsečíky otočíme zpět do půdorysu a odvodíme po ordinálách do nárysu.

3. Určíme viditelnost.

□

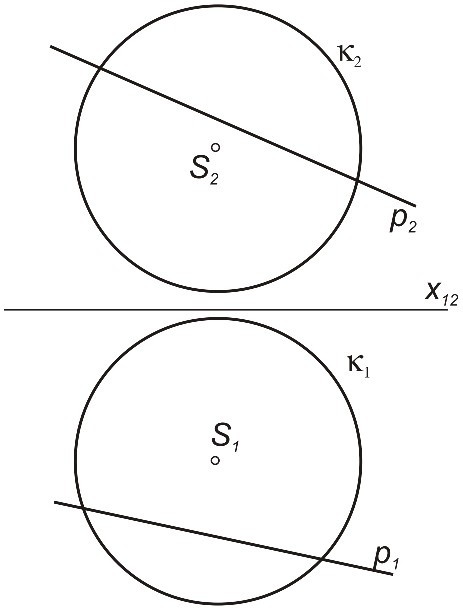
1.1.8 Průnik jehlanových a hranolových ploch

Hledáme množinu všech bodů společných stěnám obou ploch. Výsledkem je jeden nebo více polygonů (nemusí být rovinné). Vrcholy polygonu jsou průsečíky hran jedné plochy se stěnami druhé plochy. Strany polygonu jsou průsečnicemi stěn polygonů. Tyto strany můžeme sestrojit jako spojnice vrcholů, ale jen těch, které leží ve stejné stěně obou ploch.

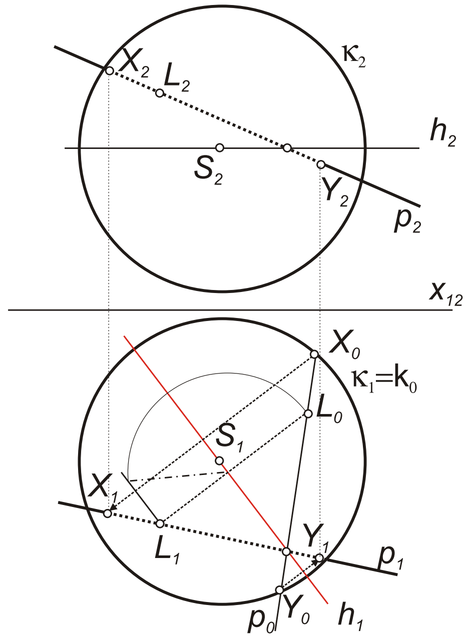
Postup řešení:

Protože průsečík přímky s jehlanem nebo hranolem hledáme pomocí vrcholové roviny, můžeme tuto metodu využít při hledání průniku jehlanových a hranolových ploch.

1. Sestrojíme spojnici r vrcholů ploch (u hranolu pracujeme s nevlastním vrcholem).
2. Najdeme průsečíky přímky r s rovinami podstav.



Obrázek 1.12:



Obrázek 1.13:

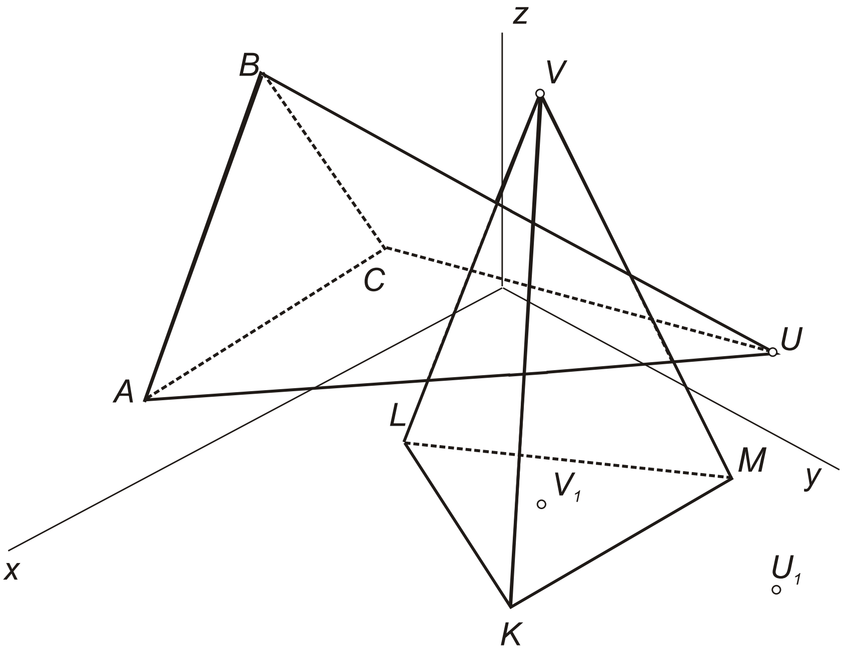
3. Sestrojíme roviny, které jsou určeny přímkou r a jednotlivými vrcholy podstav.
4. Určíme průnik každé roviny s podstavami těles a určíme průnik hrany s druhým tělesem.
5. Spojíme získané body lomenou čárou.

Příklad 1.5 Sestrojte průnik dvou jehlanů s podstavami v rovinách xy a xz. - obr. 1.15.

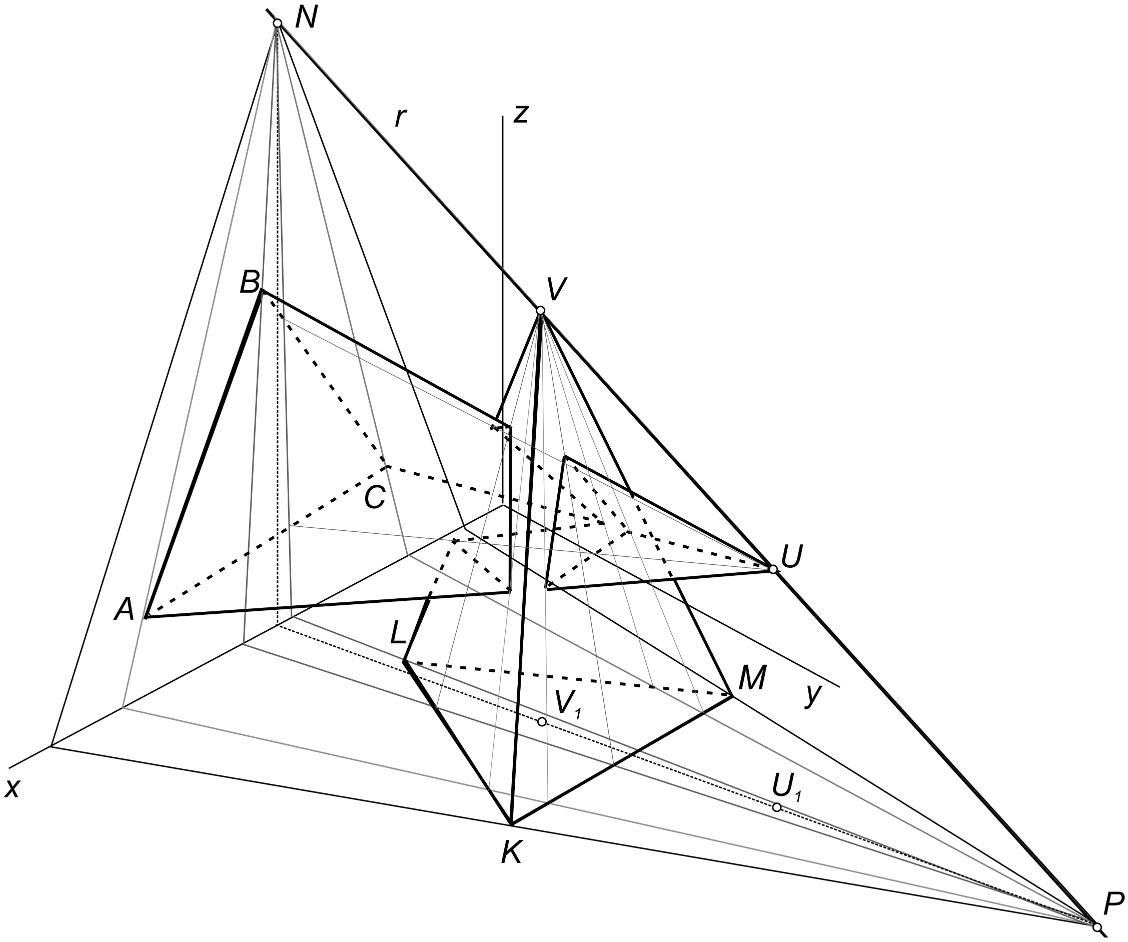
Řešení: (obr.1.15)

1. Sestrojíme spojnici r vrcholů U a V jehlanů.
2. Najdeme průsečíky přímky r s rovinami podstav. Průsečíky P a N jsou půdorysný a nárysný stopník, protože podstavy leží v rovinách xy a xz.
3. Sestrojíme vrcholové roviny, které jsou určeny přímkou r a jednotlivými vrcholy podstav.
4. Určíme průnik každé roviny s podstavami těles a určíme průnik hrany s druhým tělesem.
5. Spojíme získané body lomenou čárou.

□



Obrázek 1.14:



Obrázek 1.15:

1.1.9 Tečná rovina

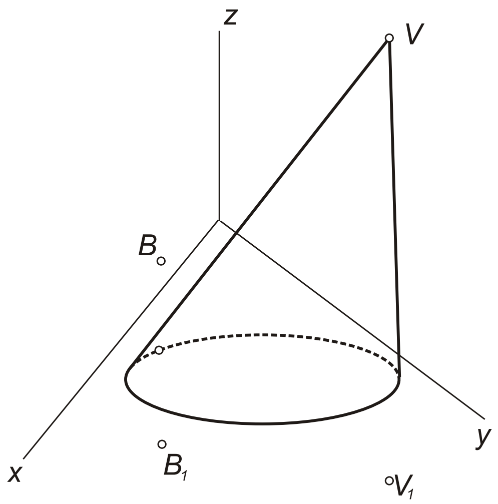
Tečná rovina kuželové nebo válcové plochy je určena površkou p a tečnou t řídící kružnice k v bodě $T = p \cap t$.

Příklad 1.6 Je dán kužel s vrcholem V a podstavou v rovině xy. Bodem B sestrojíme tečné roviny k zadanému kuželi - obr. 1.16.

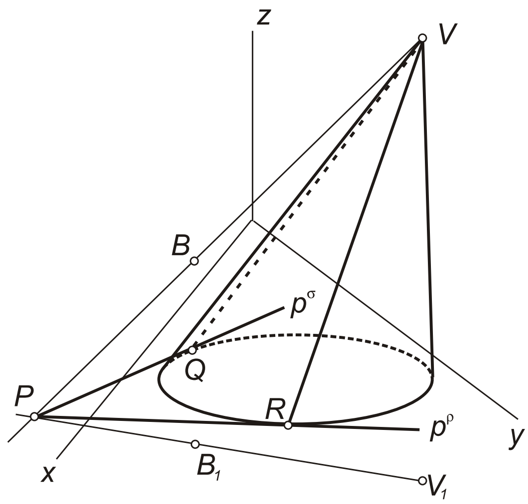
Řešení: (obr.1.17)

1. Tečná rovina se dotýká kužele podél jeho površky, proto také vrchol V (a přímka BV) leží v tečné rovině.
2. Sestrojíme přímku BV a najdeme její průsečík P s rovinou podstavy. Protože podstava leží v rovině xy, je průsečíkem P půdorysný stopník přímky BV.
3. Sestrojíme tečny p^ρ a p^σ z bodu P k podstavě kužele. Dotykové body označíme R a Q.
4. Tečná rovina je určena přímkou p^ρ popř. p^σ (což je zároveň její půdorysná stopa, protože bod P i podstava kužele leží v půdorysně) a površkou RV popř. QV.

□



Obrázek 1.16:



Obrázek 1.17:

1.2 Kontrolní otázky

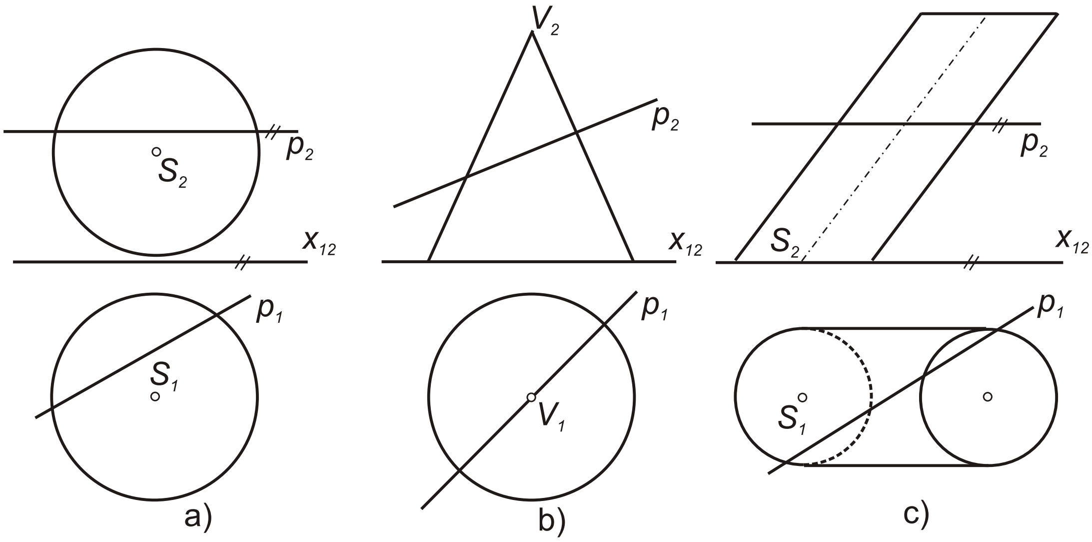
1.1 Definujte kosý kruhový válec.

1.2 Uveďte, jak využíváme afinitu a kolineaci při určování řezů.

1.3 Čím je určena tečná rovina k válcové resp. kuželové ploše?

1.4 Kolik tečných rovin můžeme vést vnějším bodem k rotační kuželové ploše?

1.5 Vyznačte společné body přímky p a dané plochy na obr. 1.18 a), b), c).



Obrázek 1.18:

Kapitola 2

Křivky

2.1 Základní pojmy

Křivkou rozumíme dráhu pohybujícího se bodu.
Křivka je jednoparametrická množina bodů. (Protože pohyb je závislý na jediném parametru - čase).

2.1.1 Klasifikace křivek

- **Rovinné** jsou křivky, jejichž všechny body leží v jedné rovině. V pravoúhlé souřadnicové soustavě $\{O;\, x,\, y\}$ je **parametrické** vyjádření rovinné křivky (pokud existuje):

  $$x = x(t),\; y = y(t),\; t \in I.$$

  Např. elipsa má parametrické vyjádření

  $$x = a\cos\varphi,\; y = b\sin\varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle;\; a, b > 0.$$

- Křivky, jejichž body neleží v jedné rovině, nazýváme **prostorové**. V pravoúhlé souřadnicové soustavě $\{O;\, x,\, y,\, z\}$ je **parametrické** vyjádření prostorové křivky (pokud existuje):

  $$x = x(t),\; y = y(t),\; z = z(t),\; t \in I$$

  Např.

  $$x = r\cos\varphi,\; y = r\sin\varphi,\; z = 2\varphi,\; \varphi \in \langle -\pi, \pi\rangle$$

  je vyjádřením části šroubovice. I rovinnou křivku můžeme zapsat jako křivku v prostoru např.

  $$x = 1 + t,\; y = t,\; z = 2 - 0.5t,\; t \in \langle 5, 6\rangle$$

  je vyjádřením úsečky v prostoru.

2.1.2 Tečna a normála křivky

Na křivce zvolíme bod T a v jeho okolí bod A. **Tečna křivky** je limitní polohou přímky AT pro $A \to T$ (obr.2.1).

Pomocí vektoru první derivace můžeme definovat **tečnu křivky** jako přímku určenou bodem křivky a tečným vektorem. Píšeme $X = T + s\vec{u}$, kde $\vec{u} = (x'(t), y'(t), z'(t))$, $\vec{u} \neq \vec{o}$ je tečný vektor a $T[T_1, T_2, T_3]$ dotykový bod.

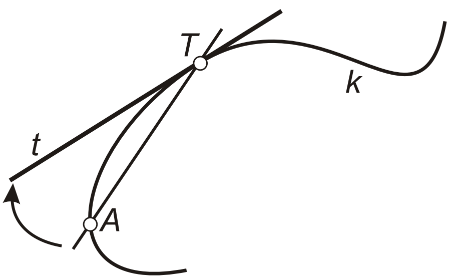
Sečna je spojnice dvou bodů křivky.

Asymptota je tečna v nevlastním bodě.

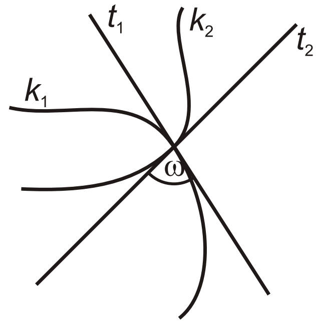
Normála v bodě T je přímka kolmá k tečně v bodě T.

Normálová rovina je množina všech normál v bodě křivky. Je to rovina kolmá k tečně.

Úhel křivek k_1, k_2 (protínajících se) je úhel jejich tečen v jejich průsečíku (obr.2.2).



Obrázek 2.1:



Obrázek 2.2:

Rovnoběžným nebo středovým průmětem prostorové křivky je rovinná křivka. Průmětem tečny je tečna nebo bod.

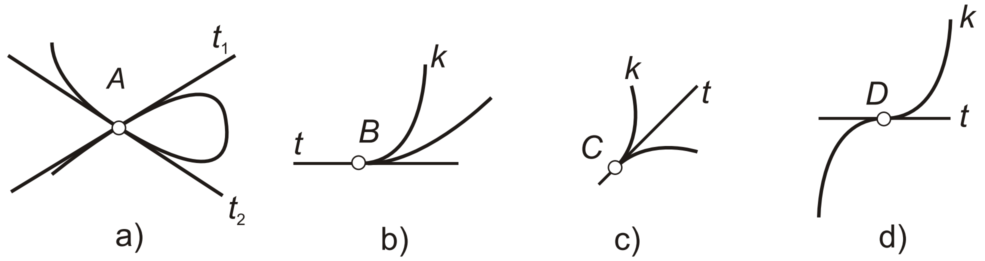
2.1.3 Klasifikace bodů křivky

Bod, ve kterém má křivka jedinou tečnu určenou jediným nenulovým vektorem, nazýváme **regulární** bod; v opačném případě bod nazveme **singulární**.

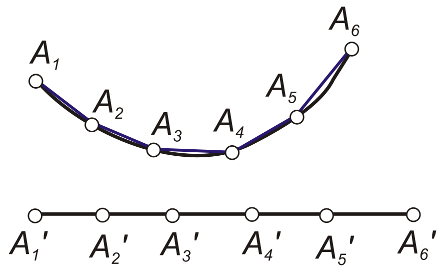
Různé typy singulárních bodů vidíme na obr. 2.3. Bod A v obrázku 2.3a) se nazývá uzlový bod, body B a C v obrázku 2.3b) a c) jsou body vratu a bod D v obrázku 2.3d) je inflexní bod.

2.1.4 Rektifikace

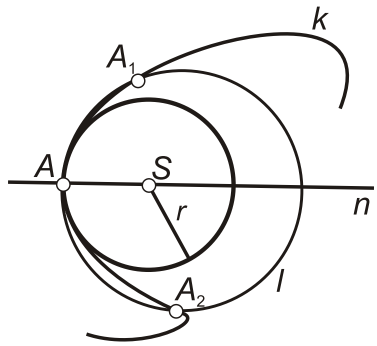
Rektifikace oblouku křivky je rozvinutí oblouku křivky na přímku, tj. sestrojení úsečky stejné velikosti, jako je délka oblouku křivky. Nejjednodušší rektifikace je založena na náhradě křivky lomenou čarou (lineární interpolace) - obr. 2.4. Na křivce zvolíme vhodný počet bodů (na obr. 2.4 jsou označeny $A_1, A_2, \ldots$, spojíme lomenou čarou a jednotlivé úsečky přeneseme na přímku. Je zřejmé, že čím více bodů zvolíme, tím přesněji můžeme zjistit délku křivky.



Obrázek 2.3:



Obrázek 2.4:



Obrázek 2.5:

Délku oblouku křivky, pro kterou známe její parametrické vyjádření, můžeme vypočítat pomocí integrálu

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt,$$

kde t_1 a t_2 jsou krajní body křivky.

K rektifikaci oblouku kružnice se často užívalo přibližných konstrukcí jako např. konstrukce Kochaňského, d'Ocagneova nebo Sobotkova. Použití počítačů v technických oborech nám umožňuje zjistit délku oblouku mnohem přesněji, proto i zde budeme používat buď výpočtu, nebo lineární interpolace.

Obráceně můžeme také navinout úsečku na křivku, tj. na dané křivce najdeme oblouk, jehož délka se rovná velikosti dané úsečky.

2.1.5 Oskulační rovina a oskulační kružnice

Je dán bod T a tečna t v tomto bodě, na křivce zvolíme v okolí bodu T bod A. Rovina α, je určená bodem A a tečnou t. Limitní poloha této roviny při $A \to T$ se nazývá **oskulační rovina**. V oskulační rovině leží jedna z normál křivky v daném bodě. Tuto normálu nazýváme **hlavní normála**.

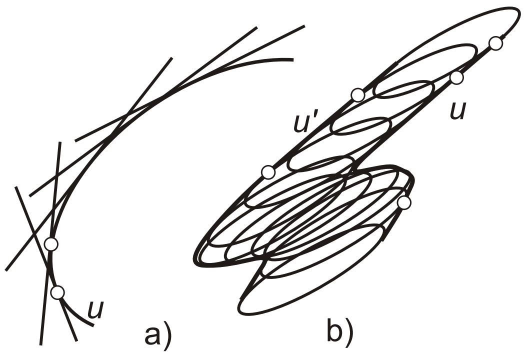
Na křivce k zvolíme libovolný regulární bod A. Dále na křivce zvolíme ještě další dva body A_1, A_2. Body A, A_1, A_2 je určena kružnice l. **Oskulační kružnice** křivky k v bodě A je limitní polohou kružnice $l(A, A_1, A_2)$, jestliže $A_1 \to A$ a $A_2 \to A$ (obr.2.5). Střed této kružnice nazýváme **střed křivosti** a poloměr této kružnice nazýváme **poloměr křivosti**. Číslo $\rho = \frac{1}{r}$ nazýváme *první křivostí* křivky k v bodě A.

Poznámka 2.1 Oskulační kružnice se v malém okolí bodu A velmi málo liší od křivky k, a proto můžeme v okolí bodu A nahradit křivku její oskulační kružnicí. Toto nahrazení se používá např. u kuželoseček, kde známe jednoduché konstrukce oskulačních kružnic ve vrcholech.

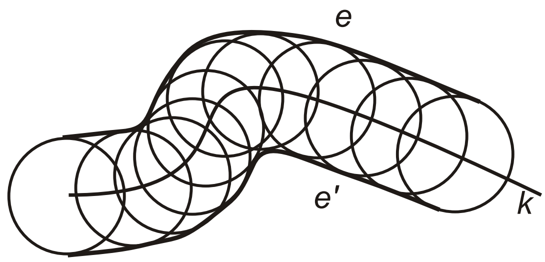
Křivky se **dotýkají** v daném bodě, mají-li v něm společnou tečnu.

Křivka může být dána i jiným způsobem, než jako dráha bodu, např. jako obálka jednoparametrické soustavy křivek, ekvidistanta, evoluta, evolventa, cykloida nebo jako průnik ploch.

Některé z těchto křivek si ukážeme a potom se více zaměříme na křivku důležitou pro technickou praxi - šroubovici.



Obrázek 2.6:



Obrázek 2.7:

2.1.6 Obálka

Je dána jednoparametrická soustava křivek v rovině. Křivka u, které se dotýkají všechny křivky soustavy se nazývá **obálka soustavy křivek**. Dotykový bod obálky a křivky daného systému se nazývá **charakteristický bod**.

Na obrázku 2.6a) je křivka u obálkou soustavy přímek, na obrázku 2.6b) je dvojice křivek u, u' obálkou soustavy elips. Na každé obálce je vyznačeno několik charakteristických bodů.

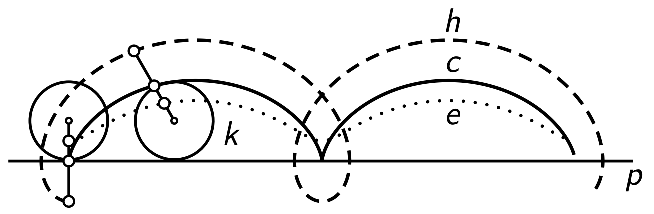
2.1.7 Ekvidistanta

Máme dánu křivku k. Okolo každého bodu této křivky opíšeme kružnici o poloměru r. Jestliže existuje obálka této soustavy kružnic nazýváme ji **ekvidistantou křivky** k- obr. 2.7.

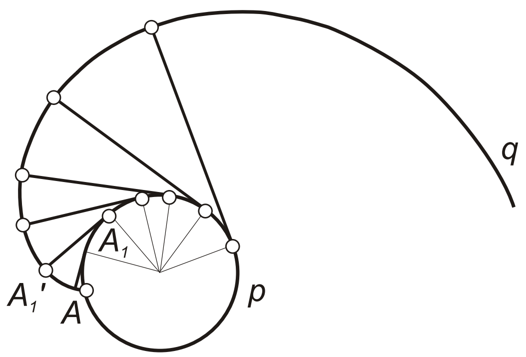
Body ekvidistanty můžeme získat také jiným způsobem: v každém bodě A křivky k sestrojíme normálu a naneseme na ni od bodu A úsečku o velikosti r.

2.1.8 Cykloida

Při odvalování křivky k po pevné křivce p, opíše každý bod roviny křivku, kterou nazýváme **trajektorie** (dráha).



Obrázek 2.8:



Obrázek 2.9:

Při odvalování kružnice k po přímce p opíše každý bod kružnice **(prostou) cykloidu**. Bod uvnitř kružnice k opíše zkrácenou cykloidu a bod vně kružnice opíše prodlouženou cykloidu. Na obrázku 2.8 je znázorněna cykloida c, zkrácená cykloida e a prodloužená cykloida h.

2.1.9 Evoluta a evolventa

Jestliže existuje obálka normál křivky, nazýváme ji **evolutou**.

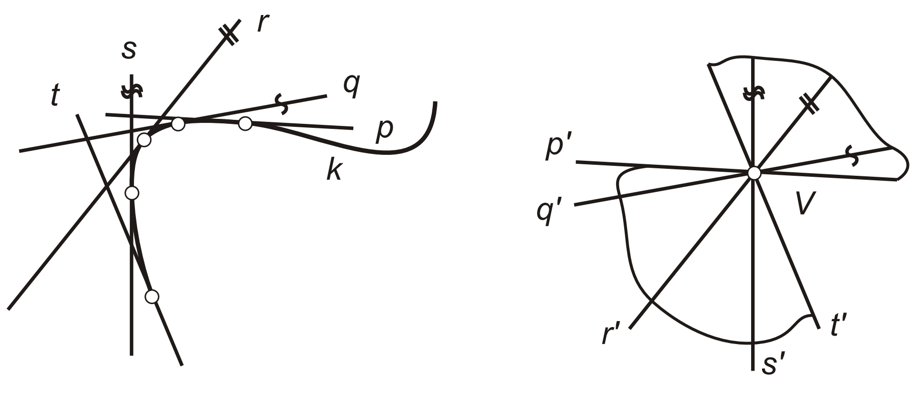
Evolventu křivky p získáme následujícím způsobem: Na křivce p zvolíme bod A, na křivce volíme další body, v každém bodě A_1 sestrojíme tečnu a naneseme na ni délku oblouku A_1A. Takto získaný bod je bodem evolventy křivky p.

Můžeme také říct, že jestliže odvalujeme přímku po křivce p, bod přímky opisuje evolventu.

Na obrázku 2.9 je část evolventy kružnice. Křivka q je evolventou kružnice p (kruhovou evolventou). Kružnice p je evolutou křivky q.

2.1.10 Řídící kuželová plocha

Řídící kuželová plocha prostorové křivky je množina všech přímek, vedených pevným bodem V rovnoběžně se všemi tečnami křivky (tečna křivky je rovnoběžná s povrchovou přímkou řídící kuželové plochy) (obr.2.10).

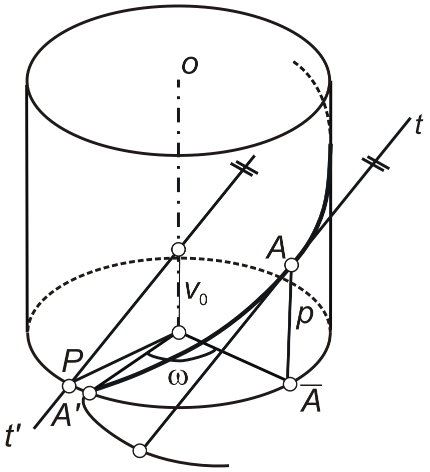


Obrázek 2.10:

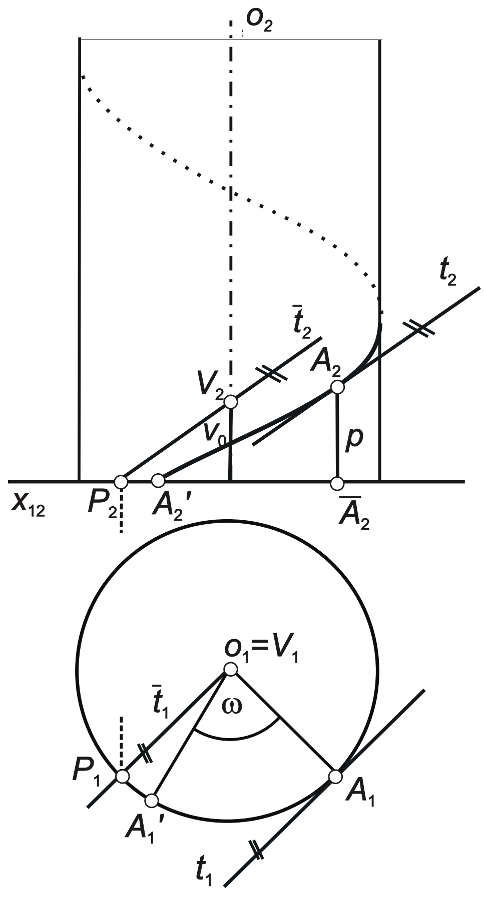
2.2 Šroubovice

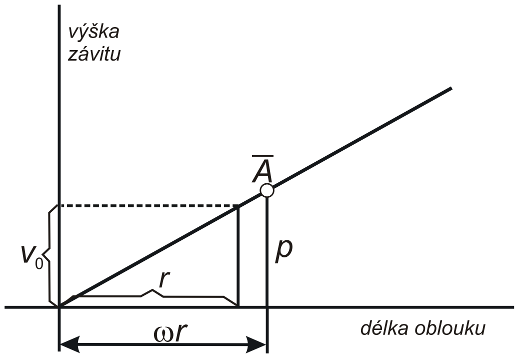
2.2.1 Základní pojmy

Definice 2.1 ***Šroubový pohyb*** *vzniká složením rovnoměrného* ***otáčivého*** *pohybu kolem pevné přímky (osy) a rovnoměrného* ***posuvného*** *pohybu ve směru této přímky.*



Obrázek 2.11:





Obrázek 2.12:

Obrázek 2.13:

Šroubovice je dráha bodu A při šroubovém pohybu, kde ω je úhel otočení a p posunutí bodu A (obr. 2.11).

Výška závitu v je velikost posunutí bodu při otočení o 2π radiánů. Jestliže otočíme bod o 1 radián, označíme velikost posunutí v_0 a nazýváme **redukovanou výškou závitu**. Platí $v_0 = \frac{v}{2\pi}$.

Šroubovice $(o, A, v_0, \{\pm\})$ je určena osou o, bodem A, redukovanou výškou závitu v_0 a informací o pravotočivosti nebo levotočivosti šroubovice (+ nebo −).

Šroubovice leží na rotační válcové ploše. Jestliže rozvineme tuto válcovou plochu do roviny, šroubovice se rozvine do přímky. Pokud zavedeme souřadnicový systém tak, aby stopník šroubovice (bod ve kterém šroubovice protíná půdorysnu) ležel v počátku a osa šroubovice byla rovnoběžná s osou y, je toto rozvinutí šroubovice grafem závislosti posunutí na délce oblouku (neboli úhlu otočení) (obr.2.12).

2.2.2 Parametrické vyjádření šroubovice

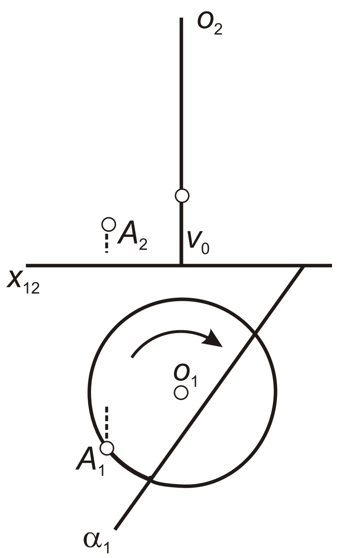
Parametrické rovnice pravotočivé šroubovice, jejíž osou je osa z, r je poloměr válcové plochy, na níž šroubovice leží, redukovaná výška závitu je v_0 a bod $A[r,0,0]$, jsou

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = v_0\varphi, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

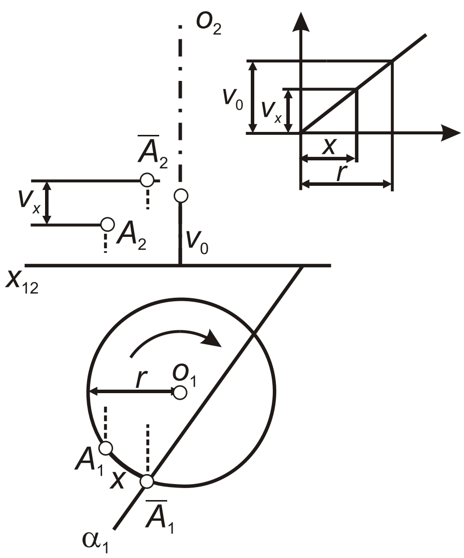
Jestliže šroubovici umístíme tak, aby osa šroubovice byla kolmá na půdorysnu, pak půdorysem šroubovice je kružnice a nárysem šroubovice je zobecněná sinusoida (křivka odpovídající sinusoidě v afinitě).

2.2.3 Tečna šroubovice a její průvodní trojhran

Tečny šroubovice svírají konstantní úhel s rovinou kolmou k ose šroubovice, resp. s osou šroubového pohybu. Říkáme, že šroubovice je **křivka konstantního spádu**.



Obrázek 2.14:



Obrázek 2.15:

Půdorysné stopníky tečen šroubovice leží na kruhové evolventě kružnice, která je půdorysem šroubovice.

Řídící kužel šroubovice (řídící kuželová plocha) je rotační kužel s výškou v_0 a poloměrem podstavy r; tečny šroubovice jsou rovnoběžné s površkami řídícího kužele.

Hlavní normála šroubovice je normála kolmá k ose a osu protíná.

Oskulační rovina je určena hlavní normálou a tečnou šroubovice.

Binormála je normála kolmá na oskulační rovinu.

Frenetův průvodní trojhran je tvořen tečnou, hlavní normálou a binormálou.

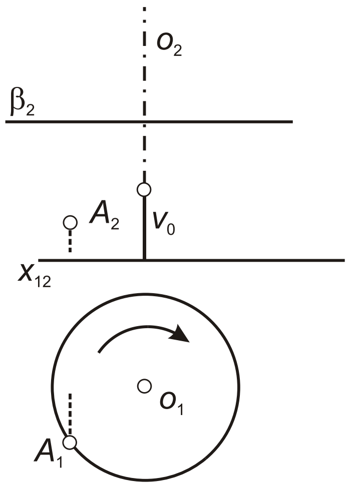
Poznámka 2.2 Šipkou budeme v půdorysu vyznačovat směr klesání šroubovice.

Příklad 2.1 Sestrojíme průsečík šroubovice $(o, A, v_0, +)$ s rovinou $\alpha \parallel o$ - obr. 2.14.

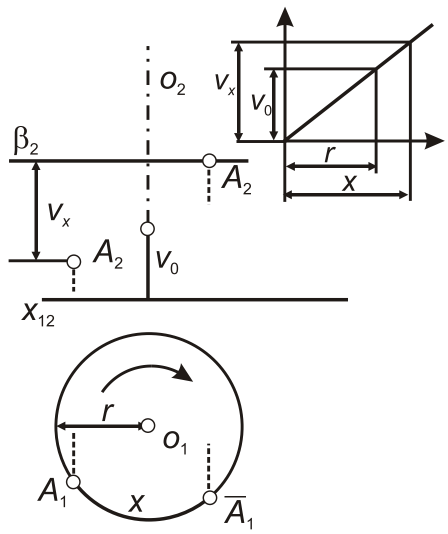
Řešení: (obr.2.15)

1. Najdeme půdorys průsečíku $\overline{A}_1$ šroubovice s rovinou α.
2. Pomocí velikostí v_0 a r sestrojíme graf závislosti výšky na délce oblouku.
3. Ze znalosti délky oblouku $x = A_1\overline{A}_1$ odečteme z grafu velikost výšky v_x a tuto výšku naneseme od bodu A_2 ve směru stoupání. Na ordinále pak najdeme bod $\overline{A}_2$.

□



Obrázek 2.16:



Obrázek 2.17:

Příklad 2.2 Sestrojíme průsečík šroubovice $(o, A, v_0, +)$ s rovinou $\beta \perp o$ - obr. 2.16.

Řešení: (obr.2.17)

1. V nárysu zjistíme vzdálenost v_x bodu A šroubovice od roviny β.
2. Pomocí velikostí v_0 a r sestrojíme graf závislosti výšky na délce oblouku.
3. Ze znalosti změny výšky, o kterou musí vystoupat bod A, odečteme z grafu délku oblouku x, tento oblouk naneseme od bodu A_1 ve směru stoupání. Na ordinále pak najdeme v rovině β bod $\overline{A}$ (rozumí se jeho nárys).

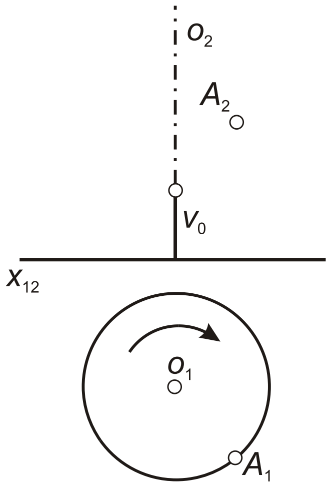
□

Příklad 2.3 Sestrojíme tečnu šroubovice $(o, A, v_0, +)$ v bodě A - obr. 2.18.

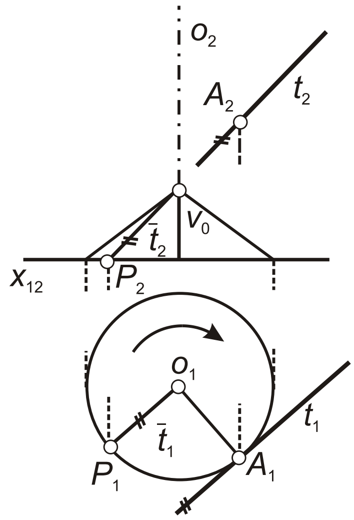
Řešení: (obr.2.19)

1. Určíme půdorys t_1 tečny t v bodě A.
2. Sestrojíme půdorys površky $\overline{t}$ řídícího kužele, která je rovnoběžná s tečnou (její stopník najdeme na půdorysu šroubovice o úhel 90^o ve směru klesání od bodu A).
3. Odvodíme nárys P_2 stopníku P a nárys površky $\overline{t}$.
4. Tečna prochází bodem A a je rovnoběžná s $\overline{t}$.

□



Obrázek 2.18:



Obrázek 2.19:

2.3 Kontrolní otázky

2.1 Definujte hlavní normálu prostorové křivky.

2.2 Definujte řídící kuželovou plochu prostorové křivky.

2.3 Uveďte definici šroubového pohybu.

2.4 Čím je určen šroubový pohyb?

2.5 Definujete parametr v_0 šroubového pohybu?

2.6 Uveďte vztah mezi výškou závitu šroubovice a redukovanou výškou závitu.

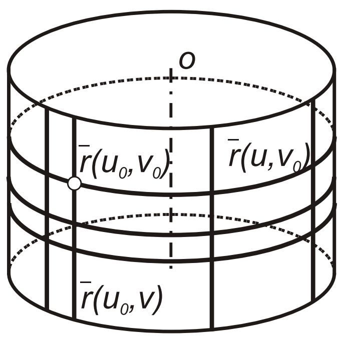
Kapitola 3

Obecné poznatky o plochách

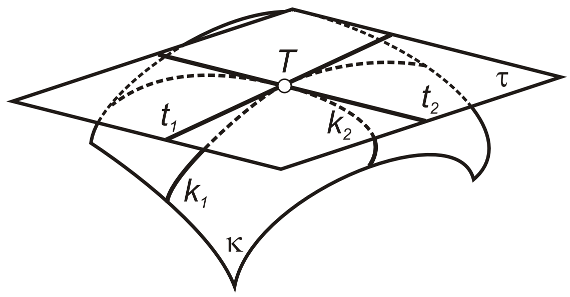
3.1 Základní pojmy

Plocha je

- jednoparametrická soustava křivek (plocha vzniká pohybem křivky, která není dráhou pohybu - křivka se může během pohybu měnit)
- dvouparametrická soustava bodů



Obrázek 3.1:



Obrázek 3.2:

Klasifikace ploch

Plocha vzniká pohybem křivky, proto nás zajímají dva způsoby klasifikace ploch: podle druhu pohybu a podle tvořící křivky. V následujících dvou tabulkách jsme plochy roztřídili podle těchto dvou hledisek.

Podle druhu pohybu		
Název	**Pohyb**	**Příklad**
translační	posunutí	válec, rovina
rotační	rotace	rot. válec, rot. kužel, rot. hyperboloid
šroubové	šroubový pohyb	cyklická šroubová plocha, vývrtková plocha

Podle tvořící křivky		
Název	**Křivka**	**Příklad**
přímkové	přímka	kuželová plocha, hyperbolický paraboloid
cyklické	kružnice	válec, Archimédova serpentina
jiné	jiná křivka	kvadriky, obalové, grafické

Rovnice plochy

- Parametrické vyjádření:
  $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $u \in I, v \in J$
  (např. parametrické vyjádření rotační válcové plochy je $x = 3\cos u$, $y = 3\sin u$, $z = v$, $u \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $v \in \mathbf{R}$
  nebo zápis pomocí vektorové funkce: $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

  jestliže $u =$ konst. dostáváme:
  $x = x(u_0, v)$, $y = y(u_0, v)$, $z = z(u_0, v)$ *v-křivky*, (pro uvedený válec jsou v-křivkami přímky)

  jestliže $v =$ konst. dostáváme:
  $x = x(u, v_0)$, $y = y(u, v_0)$, $z = z(u, v_0)$ *u-křivky*, (pro uvedený válec jsou u-křivkami kružnice)

- Explicitní tvar: $z = f(x, y)$ (např. $z = 3x + 7y - 9$)

- Implicitní vyjádření: $F(x, y, z) = 0$ (např. $3x^2 + y^2 + 4z - 2x = 0$)

Křivka na ploše je křivka, jejíž body vyhovují rovnici plochy. **Tečná rovina plochy** je množina tečen křivek plochy v daném bodě. **Tečna plochy** je přímka tečné roviny, která prochází dotykovým bodem. **Normála plochy** je kolmice k tečné rovině plochy v bodě dotyku. Dvě plochy se **dotýkají** v daném bodě, jestliže v něm mají společnou tečnou rovinu. **Průniková křivka** je množina společných bodů dvou ploch.

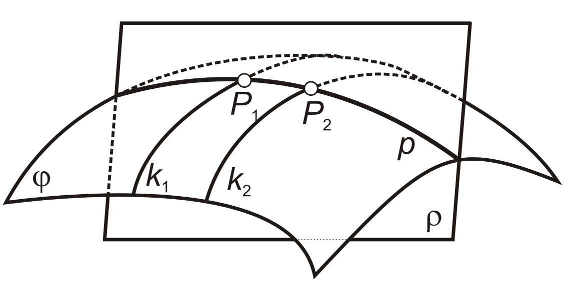
Bod na ploše je **regulární**, jestliže v něm existuje právě jedna tečná rovina a **singulární** v ostatních případech.

Přímky na ploše rozdělujeme na **regulární**, kdy v každém bodě přímky existuje jiná tečná rovina - tečné roviny tvoří svazek rovin (např. přímky na rotačním jednodílném hyperboloidu) a **torzální**, kdy existuje jediná tečná rovina podél celé přímky (např. přímky na kuželové ploše).

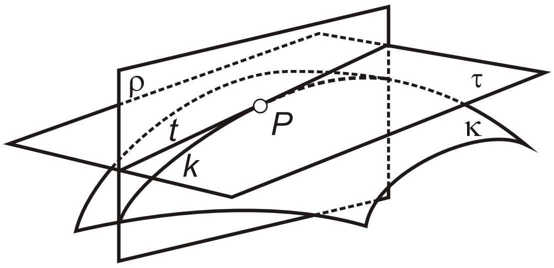
3.2 Úlohy na plochách

- **Tečná rovina τ v bodě T:**

  1. zvolíme dvě křivky k_1, k_2 na ploše procházející bodem T (vhodné jsou např. tvořící křivka a dráha pohybu),
  2. určíme tečny t_1 a t_2 k těmto křivkám (předpokládáme, že jsou různé),
  3. tečná rovina τ je určena tečnami t_1 a t_2 (obr. 3.2).

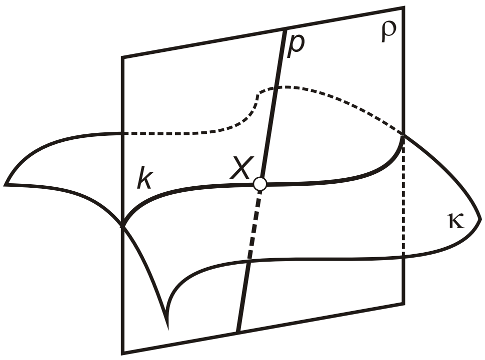


Obrázek 3.3:

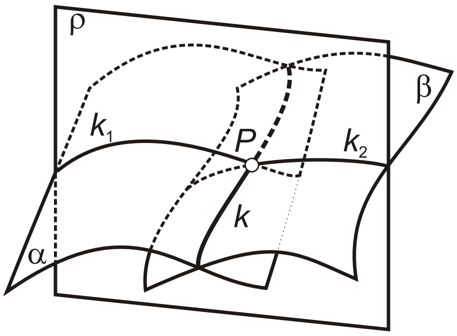


Obrázek 3.4:

- **Řez plochy rovinou ϱ a tečna řezu**:
  1. zvolíme křivku k plochy
  2. průnikem křivky k s rovinou ϱ je bod K (jeden bod řezu)
  3. opakováním bodů 1) a 2) dostáváme jednotlivé body řezu (obr. 3.3).
  4. tečna řezu je průsečnicí tečné roviny a roviny řezu (obr. 3.4).
- **Průsečík přímky p s plochou κ**:
  1. proložíme rovinu ϱ přímkou p,
  2. určíme řez plochy κ rovinou ϱ, dostaneme průnikovou křivku k,
  3. průnik přímky p a křivky k je hledaný průsečík X (obr. 3.5).



Obrázek 3.5:



Obrázek 3.6:

- **Průnik dvou ploch α a β**:
  1. zvolíme pomocnou rovinu ϱ,
  2. najdeme průnikovou křivku k_1 roviny ϱ s plochou α,
  3. najdeme průnikovou křivku k_2 roviny ϱ s plochou β,

4. průsečík P křivek k_1 a k_2 je bodem průniku ploch α a β (obr. 3.6),
5. opakováním bodů 1)-4) najdeme požadovaný počet bodů průniku ploch α a β,
6. tečna průnikové křivky v daném bodě je průsečnicí tečných rovin obou ploch v daném bodě (jiná možnost určení tečny průnikové křivky spočívá v konstrukci kolmice k rovině dané normálami daných ploch v daném bodě).

Skutečný obrys plochy tvoří body plochy, v nichž jsou promítací přímky tečnami plochy. **Zdánlivý obrys plochy** je průmět skutečného obrysu plochy.

3.3 Kontrolní otázky

3.1 Popište, jak lze obecně určit tečnou rovinu a normálu plochu.

3.2 Popište, jak lze zkonstruovat tečnu řezu plochy.

3.3 Uveďte dva způsoby určení tečny průnikové křivky dvou ploch (návod: pomocí tečných rovin nebo pomocí normál ploch).

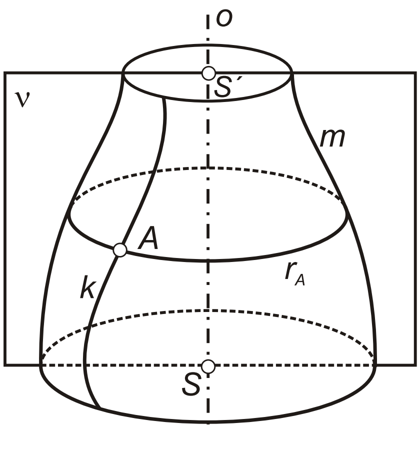
Kapitola 4

Rotační plochy

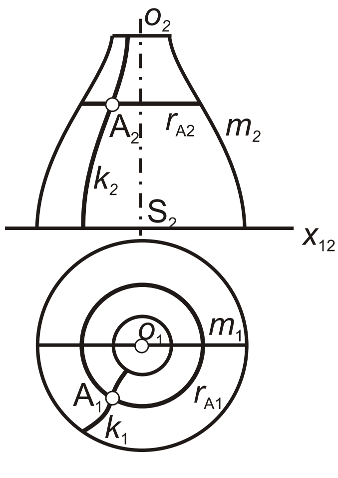
4.1 Základní pojmy

Rotační plocha vzniká rotací křivky k kolem přímky o. Předpokládáme, že křivka k nesplývá s přímkou o a neleží v rovině kolmé na přímku o (obr. 4.1, 4.2). Při řešení úloh v Mongeově promítání budeme volit osu o zpravidla kolmou k půdorysně.

Křivku k nazýváme **tvořící křivka** rotační plochy, přímku o **osou rotační plochy**.



Obrázek 4.1:



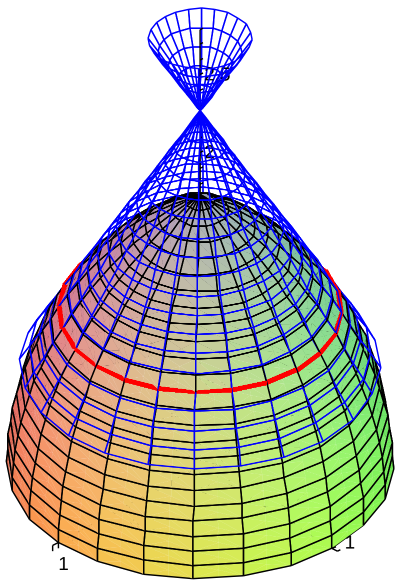
Obrázek 4.2:

Rovnoběžková kružnice (rovnoběžka) r_A je kružnice, která vznikne rotací libovolného bodu A tvořící křivky kolem osy o.
Meridián (poledník) je řez rotační plochy rovinou, procházející osou rotační plochy; **hlavní meridiá**n m je meridián ležící v rovině rovnoběžné s průmětnou.

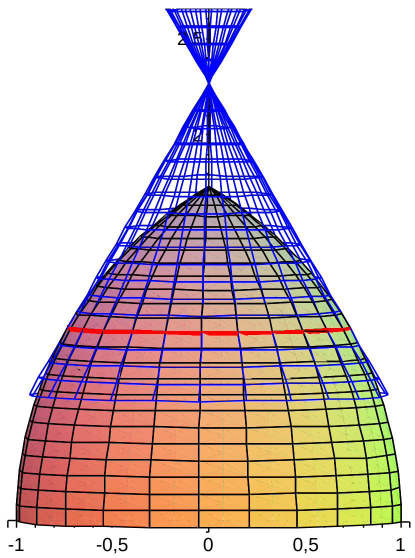
Tečnou rovinu rotační plochy určujeme tečnami dvou křivek plochy procházejících daným bodem. Obvykle je tečná rovina určena buď tečnou meridiánu (t_m) a tečnou rovnoběžkové kružnice (t_r), nebo tečnou tvořící křivky (t_k) a tečnou rovnoběžkové kružnice (t_r).
Normála n rotační plochy je kolmice na tečnou rovinu v bodě dotyku.

4.2 Vlastnosti rotačních ploch

- Rotační plocha je **souměrná** podle své osy a podle roviny každého meridiánu.
- **Tečná rovina** rotační plochy je **kolmá** k rovině meridiánu procházející dotykovým bodem.
- **Tečné roviny** rotační plochy v bodech téže rovnoběžkové kružnice obalují buď rotační kuželovou plochu, nebo rotační válcovou plochu nebo rovinu.
- **Tečny** meridiánu v bodech téže rovnoběžkové kružnice tvoří buď rotační kuželovou plochu, nebo rotační válcovou plochu nebo rovinu (obr. 4.3, 4.4).
- **Normála** rotační plochy protíná osu nebo je s ní rovnoběžná.
- **Normály** rotační plochy v bodech téže rovnoběžkové kružnice tvoří buď rotační kuželovou plochu, nebo rotační válcovou plochu nebo rovinu.



Obrázek 4.3:



Obrázek 4.4:

Rovnoběžková kružnice se nazývá

hrdlo, jestliže tečny podél této rovnoběžky tvoří rotační válcovou plochu a poloměr je lokálním minimem, tj. ze všech okolních rovnoběžek je tento poloměr nejmenší,

rovník, jestliže tečny podél této rovnoběžky tvoří rotační válcovou plochu a poloměr je lokálním maximem, tj. ze všech okolních rovnoběžek je tento poloměr největší,

kráter, jestliže tečny podél této rovnoběžky tvoří rovinu.

Skutečným obrysem rotační plochy při pravoúhlém promítání na rovinu rovnoběžnou s osou je hlavní meridián a hraniční kružnice plochy. V případě kolmého průmětu na rovinu kolmou k ose jsou skutečným obrysem hrdelní, rovníkové a hraniční kružnice plochy.

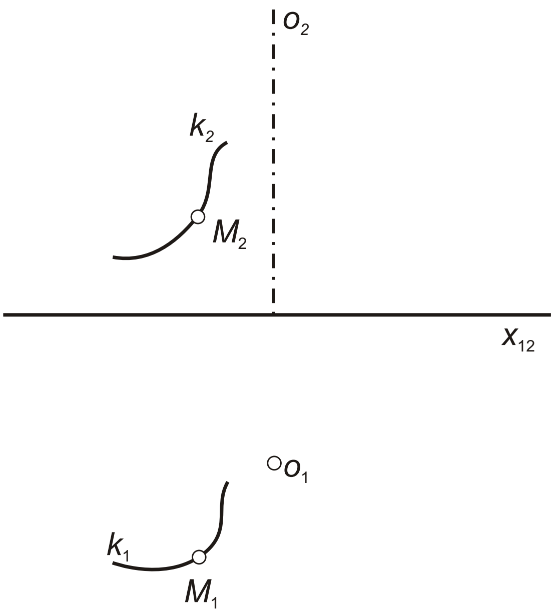
Zdánlivým obrysem rotační plochy je průmět skutečného obrysu.

4.3 Klasifikace rotačních ploch

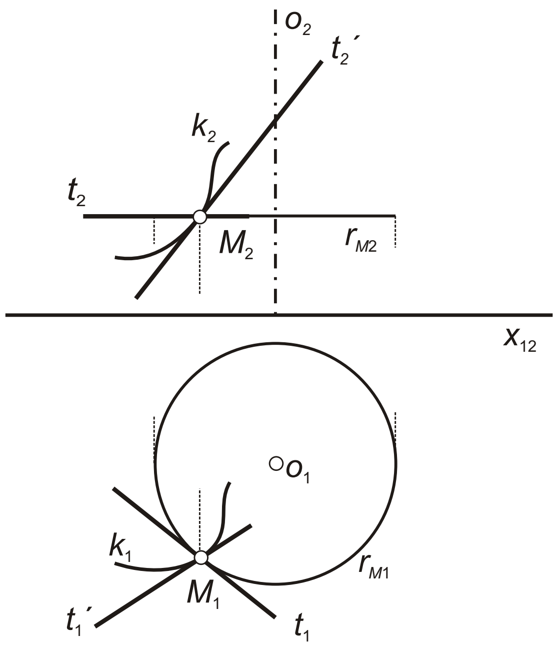
podle tvořící křivky:

Název	**Tvořící křivka**	**Rotační plocha**
Přímkové	přímka $p \parallel o$	válcová
	přímka p různoběžná s o	kuželová
	přímka p mimoběžná s o	jednodílný rot. hyperboloid
Cyklické	kružnice $k \subset \beta$, $o \subset \beta$	anuloid
	kružnice $k \subset \beta$, $o \not\subset \beta$	globoid
	kružnice $k \subset \beta$, $o \subset \beta$ a $S \in o$	kulová plocha
Rotační kvadriky	elipsa $e \subset \beta$, $o \subset \beta$	rotační elipsoid
	parabola $p \subset \beta$, $o \subset \beta$	rotační paraboloid
	hyperbola (rotace okolo vedlejší osy)	jednodílný rot. hyperboloid
	hyperbola (rotace okolo hlavní osy)	dvojdílný rot. hyperboloid
Obecné		

4.4 Úlohy na rotačních plochách



Obrázek 4.5:



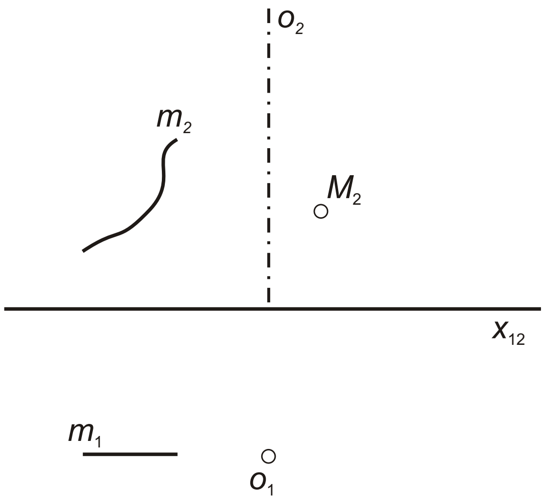
Obrázek 4.6:

Příklad 4.1 Rotační plocha je dána osou o a tvořící křivkou k. Sestrojte tečnou rovinu v bodě $M \in k$ - obr. 4.5.

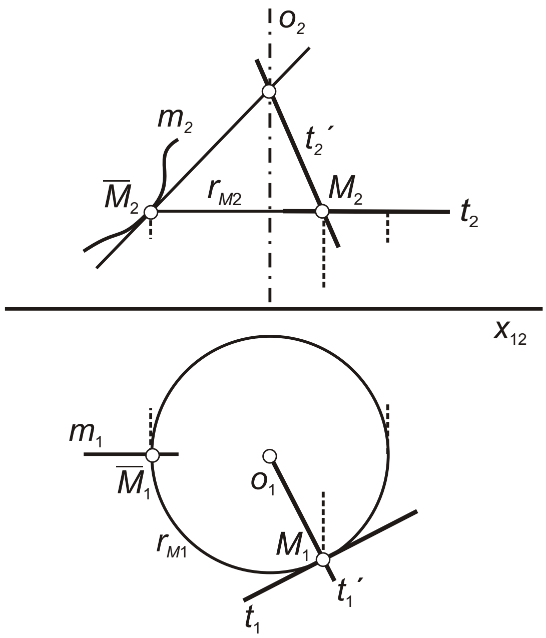
Řešení: (obr. 4.6)

1. Sestrojíme nárys a půdorys rovnoběžkové kružnice r procházející bodem M.
2. Sestrojíme v bodě M tečnu t k rovnoběžkové kružnici.
3. Sestrojíme v bodě M tečnu t' ke křivce k.
4. Tečná rovina τ je určena tečnami t a t'.

□



Obrázek 4.7:



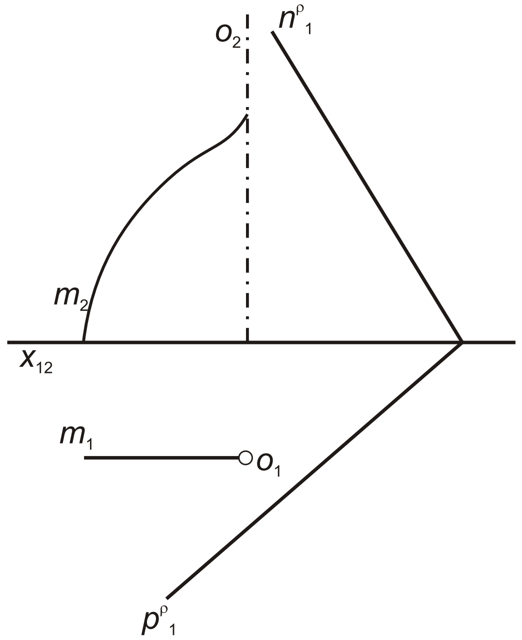
Obrázek 4.8:

Příklad 4.2 Rotační plocha je dána osou o a hlavním meridiánem m. Sestrojíme tečnou rovinu plochy v bodě $M \in k$, je-li dáno M_2 - obr. 4.7.

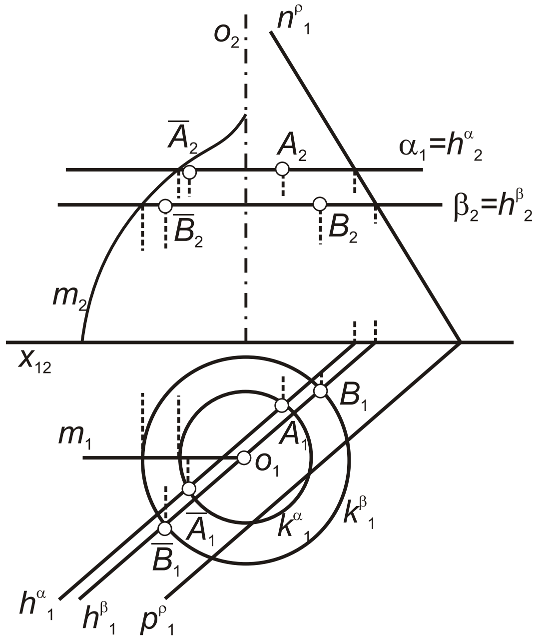
Řešení: (obr. 4.8)

1. Sestrojíme nárys a půdorys rovnoběžkové kružnice r procházející bodem M a odvodíme půdorys bodu M.
2. Sestrojíme v bodě M tečnu t k rovnoběžkové kružnici.
3. Najdeme bod $\overline{M}$ hlavního meridiánu, ležící na stejné rovnoběžkové kružnici jako bod M.
4. Sestrojíme v bodě $\overline{M}$ tečnu t_M k meridiánu.
5. Použitím vlastnosti, že tečny meridiánu v bodech téže rovnoběžkové kružnice se protínají na ose, sestrojíme tečnu t' meridiánu v bodě M.
6. Tečná rovina τ je určena tečnami t a t'.

□



Obrázek 4.9:



Obrázek 4.10:

Důležitou úlohu představuje určení řezu rotační plochy rovinou ρ. Použijeme obecný postup z úvodní kapitoly o plochách, ale provedeme modifikaci pro rotační plochy. Nejprve najdeme vhodnou křivku na ploše. Touto vhodnou křivkou je na rotační ploše rovnoběžková kružnice, kterou dostaneme jako řez pomocnou rovinou kolmou na osu rotační plochy. Tuto rovinu využijeme i při hledání průsečíků křivky s rovinou ρ.

Příklad 4.3 Rotační plocha je dána osou o a meridiánem m. Sestrojíme řez rotační plochy rovinou ρ, která je určena stopami - obr. 4.9.

Řešení: (obr. 4.10)

1. Zvolíme pomocnou rovinu α kolmou k ose o rotační plochy. V nárysu se tato rovina promítne do přímky kolmé k ose o.
2. Sestrojíme průnik roviny α s rotační plochou. Průnikem je rovnoběžková kružnice k^α, jejíž poloměr najdeme v nárysu ve skutečné velikosti (je to vzdálenost průsečíku roviny α s meridiánem od osy). Nárysem této kružnice je úsečka, půdorysem kružnice.
3. Určíme průnik roviny α s rovinou ρ. Průnikem je hlavní přímka h^α roviny ρ, odvodíme ji do půdorysu.
4. v půdoryse najdeme průsečíky A, $\overline{A}$ hlavní přímky h^α s rovnoběžkovou kružnicí k^α. Tyto body jsou zároveň průsečíky kružnice k^α s rovinou ρ. Z půdorysu je odvodíme na hlavní přímku h^α do nárysu.
5. Body A, $\overline{A}$ jsou dva body řezu rotační plochy rovinou ρ.
6. Postup opakujeme volbou další roviny kolmé k ose. Na obr. 4.10 jsou sestrojeny čtyři body průniku roviny ϱ s touto plochou. Body $A, \overline{A}$ jsme sestrojili v pomocné rovině $\alpha\,(\alpha \perp o)$, body $B, \overline{B}$ v pomocné rovině $\beta\,(\beta \perp o)$. Tímto způsobem najdeme dostatečný počet bodů, kterými pak proložíme křivku řezu.

□

Poznámka 4.1 Jestliže je rotační plochou rotační kvadrika, je řezem kuželosečka. V tomto případě můžeme řez sestrojit přesněji.

4.5 Průniky rotačních ploch

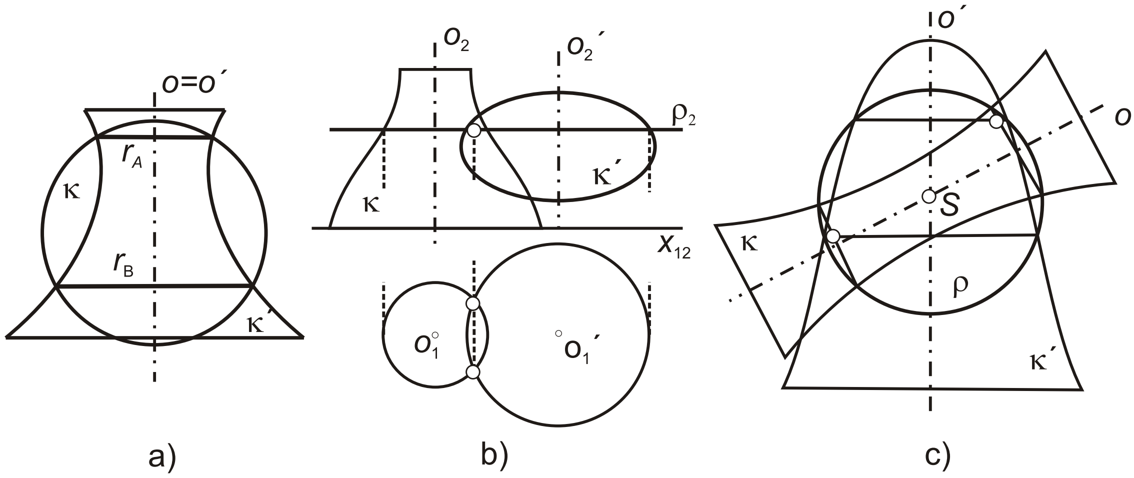
Použijeme algoritmus pro určení průniku ploch, pouze použijeme speciální typ plochy ϱ pro jednotlivé vzájemné polohy (obr. 4.11).

a) Pokud osy rotačních ploch splývají, jsou průnikovými křivkami společné rovnoběžkové kružnice.

b) Pokud jsou osy rotačních ploch rovnoběžné, volíme jako plochu ϱ rovinu kolmou na osy.

c) Pokud jsou osy rotačních ploch různoběžné, volíme jako plochu ϱ kulovou plochu se středem v průsečíku os.

d) Pokud jsou osy rotačních ploch mimoběžné, použijeme obecný algoritmus.



Obrázek 4.11:

4.6 Rotační kvadriky

- singulární (vzniknou rotací singulární kuželosečky)

  a) rotační válcová plocha $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

  b) rotační kuželová plocha $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

- regulární (vzniknou rotací regulární kuželosečky)

a) kulová plocha $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

b) elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

b) paraboloid $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \pm z = 0$

b) hyperboloid

jednodílný $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
dvojdílný $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2}\frac{z^2}{c^2} = 1$

Řezem rotační kvadriky je kuželosečka.
Konstrukce řezu:

- najít 5 prvků (5 bodů, 3 body a 2 tečny ve dvou z nich, apod.) a použít Pascalovu větu
- nebo v konkrétních případech najít určující prvky řezu (např. hlavní osy elipsy).

Průnikem rotačních kvadrik je křivka 4. stupně.

Věta 4.1 *Průnik dvou rotačních kvadrik se rozpadne na dvě kuželosečky právě tehdy, když existuje kulová plocha současně vepsaná oběma kvadrikám.*

4.7 Kontrolní otázky

4.1 Uveďte, jakým postupem se konstruuje průnik dvou rotačních ploch v závislosti na poloze jejich os.

4.2 Popište dva způsoby vytvoření rotačního jednodílného hyperboloidu.

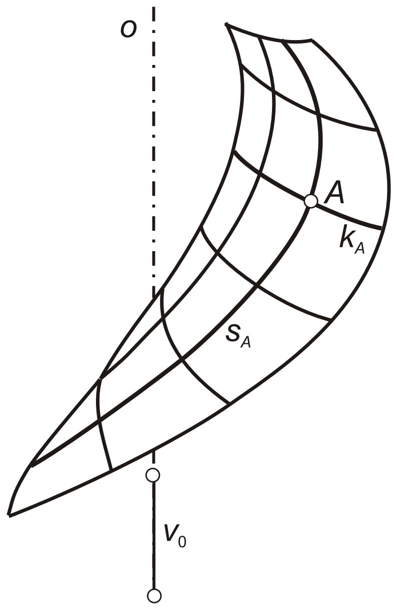
4.3 Vyjmenujte rotační kvadriky a rozdělte je na singulární a regulární.

4.4 Uveďte nutnou a postačující podmínku pro rozpad průniku dvou rotačních kvadrik na dvě kuželosečky.

Kapitola 5

Šroubové plochy

5.1 Základní pojmy



Obrázek 5.1:

Šroubová plocha vzniká šroubovým pohybem křivky k. Šroubový pohyb je dán osou o, redukovanou výškou závitu v_0 a orientací $\{\pm\}$ $(o, v_0, \{\pm\})$. Křivku k nazýváme **tvořící křivkou**. **Tečná rovina** τ je obvykle určena tečnou ke šroubovici t_s a tečnou k tvořící křivce t_k.
Normála šroubové plochy je kolmice k tečné rovině v bodě dotyku.
Osový řez (podélný profil) je řez šroubové plochy rovinou σ, procházející osou šroubové plochy.
Meridián je osový řez na jednom závitu plochy. **Polomeridián** je osový řez polorovinou s hraniční přímkou o na jednom závitu plochy.
Čelní řez (příčný profil, normální řez) je řez šroubové plochy rovinou ϱ, kolmou na osu.

5.2 Vlastnosti šroubových ploch

- Každým bodem šroubové plochy prochází šroubovice s_A, která leží na této šroubové ploše (obr. 5.1).
- Každým bodem šroubové plochy prochází (alespoň) jedna poloha tvořící křivky.
- Všechny polomeridiány jedné šroubové plochy jsou shodné.

- Všechny čelní řezy jedné šroubové plochy jsou shodné.
- Existuje pouze jediná rozvinutelná šroubová plocha - plocha tečen šroubovice.

5.3 Klasifikace šroubových ploch

podle tvořící křivky:

Název	**Tvořící křivka**	**Šroubová plocha**
Přímková plocha	Přímka p	Otevřená - p, o mimoběžky -pravoúhlá -kosoúhlá – speciálně rozvinutelná šroubová plocha
	Přímka p	Uzavřená - p, o různoběžky -pravoúhlá -kosoúhlá – vývrtková plocha)
Cyklická plocha	Kružnice k	- vinutý sloupek ($k \in \beta$, β je kolmá na o) - osová ($k \in \beta$, $o \in \beta$) - Archimédova serpentina ($k \in \beta$, β je kolmá k tečně t) - ostatní

5.4 Úlohy na šroubových plochách

Příklad 5.1 Sestrojíme 2 body řezu cyklické šroubové plochy polorovinou α, procházející osou o. - obr. 5.2.

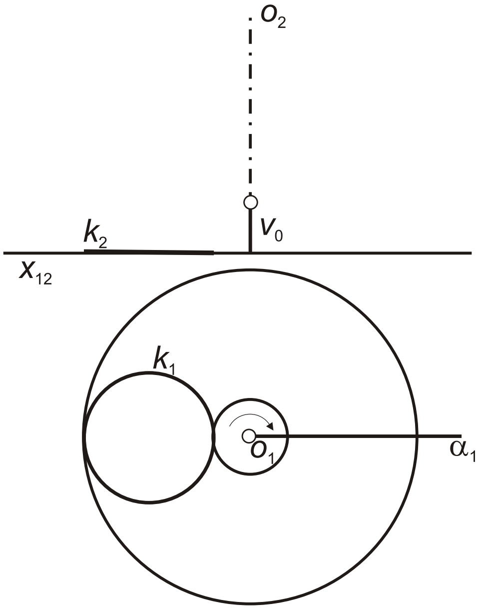
Řešení: (obr. 5.3)

1. Na tvořící křivce zvolíme bod A.
2. Bodem A proložíme šroubovici, která leží na šroubové ploše (zakreslíme půdorys).
3. Sestrojíme průsečík $\overline{A}$ této šroubovice s rovinou α.
4. Totéž opakujeme pro bod B.

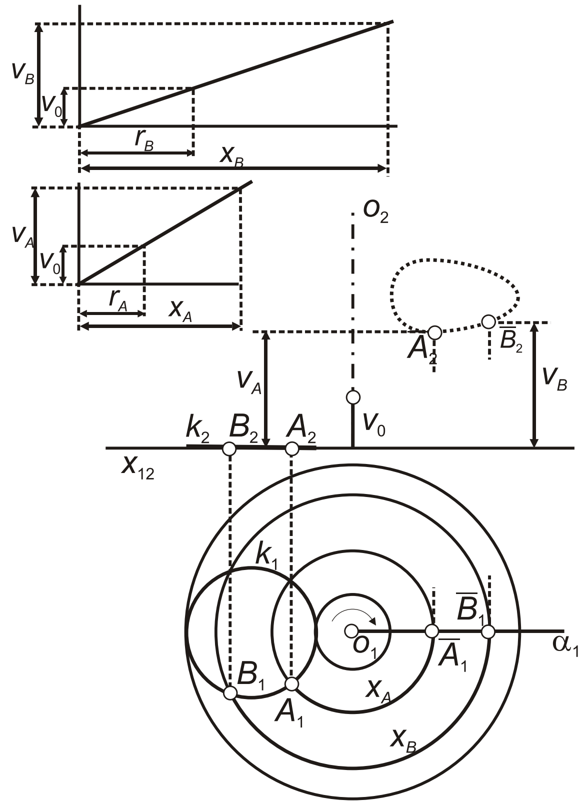
Uvědomte si , že graf závislosti je nutné konstruovat pro každý bod znovu, neboť pro šroubovice se mění poloměr příslušné válcové plochy.

Tečkovaně je vyznačen tvar celého řezu.

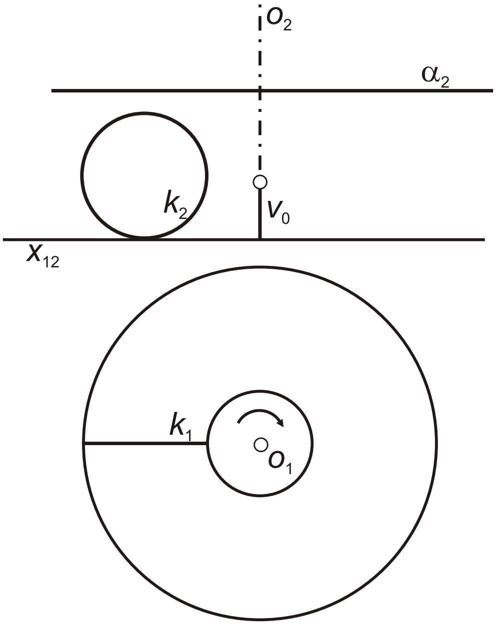
□



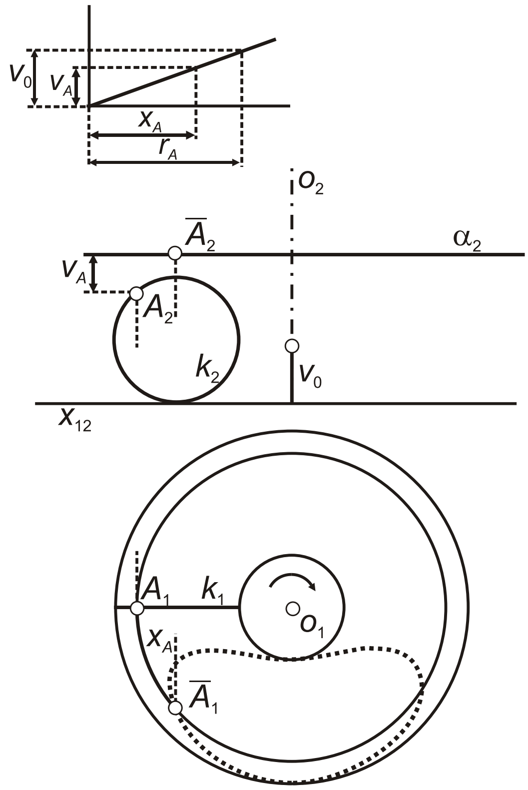
Obrázek 5.2:



Obrázek 5.3:



Obrázek 5.4:



Obrázek 5.5:

Příklad 5.2 Sestrojíme bod řezu osové cyklické šroubové plochy rovinou α ($\alpha \perp o$). - obr. 5.4.

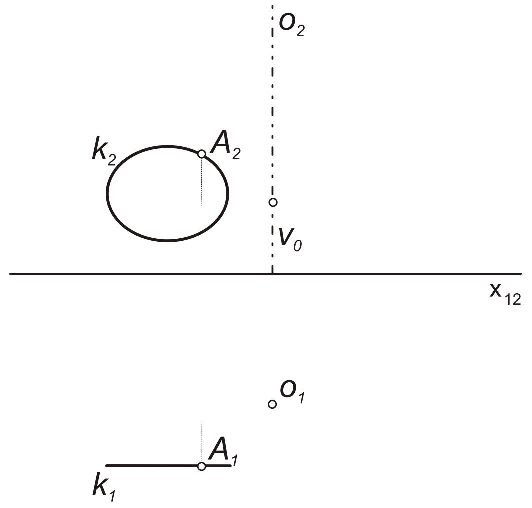
Řešení: (obr. 5.5) Postup je podobný jako v předchozím příkladě, pouze z výšky odvozujeme délku oblouku.

1. Na tvořící křivce zvolíme bod A.
2. Bodem A proložíme šroubovici s_A, která leží na šroubové ploše (zobrazíme v půdorysu).
3. Sestrojíme průsečík $\overline{A}$ této šroubovice s rovinou α. (Sestrojíme graf závislosti výšky na oblouku (rozvinutá šroubovice s_A - známe v_0 a r_A). V nárysu zjistíme vzdálenost v_A bodu A od roviny α. Z grafu odvodíme délku x_A oblouku příslušnou k výšce v_A. Délku oblouku x_A naneseme na půdorys šroubovice ve směru stoupání (protože bod s_A je pod rovinou α). Nárys bodu A najdeme v rovině α.)

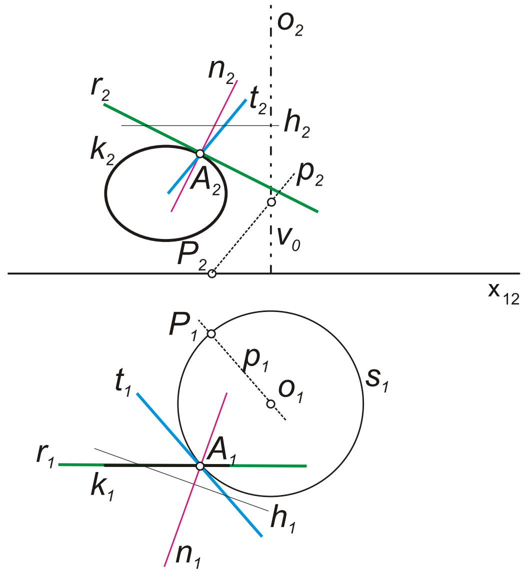
Další body bychom sestrojovali stejným způsobem. Uvědomte si , že graf závislosti je nutné konstruovat pro každý bod znovu (mění se poloměr).

Tečkovaně je vyznačen tvar celého řezu.

□



Obrázek 5.6:



Obrázek 5.7:

Příklad 5.3 Sestrojíme tečnou rovinu a normálu šroubové plochy, která je určena tvořící křivkou k a šroubovým pohybem $(o, v_0, +)$. - obr. 5.6.

Řešení: (obr. 5.7)

1. Sestrojíme v bodě A tečnu r ke křivce k (nárys i půdorys).
2. Sestrojíme půdorys šroubovice s procházející bodem A.
3. Sestrojíme v bodě M tečnu t ke šroubovici s (její nárys odvodíme pomocí površky p řídícího kužele).
4. Tečná rovina τ je určena tečnami t a r.
5. Normála n je kolmá k tečné rovině τ (sestrojíme hlavní přímky - v našem případě je frontální hlavní přímka totožná s přímkou r).

□

5.5 Kontrolní otázky

5.1 Popište vznik tzv. Archimédovy serpentiny.

5.2 Popište konstrukci normály šroubové plochy a porovnejte možnosti její konstrukce se stejnou úlohou pro rotační plochy.

Kapitola 6

Přímkové plochy

6.1 Základní pojmy

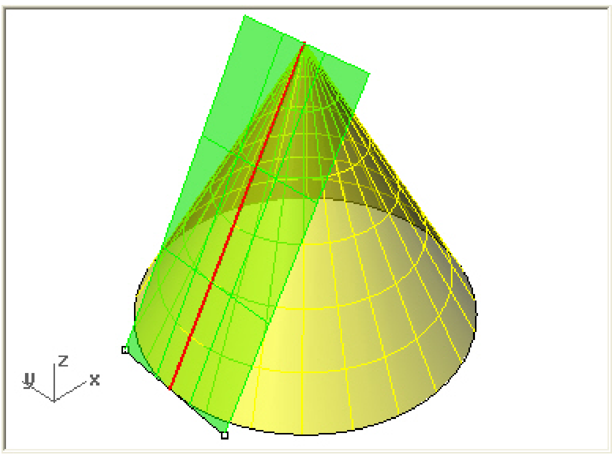
Přímkové plochy lze vytvořit pohybem přímky p, která protíná (stále) tři řídící křivky (nebo se dotýká tří řídících ploch).

Speciálně: Pokud leží jedna z řídících křivek v nevlastní rovině, plocha je určena řídící kuželovou plochou (tvořící přímky plochy jsou rovnoběžné s površkami této kuželové plochy. Pokud je nevlastní řídící křivka přímkou, pak jsou tvořící přímky plochy rovnoběžné s tzv. řídící rovinou, plochy se nazývají **Catalanovy plochy**.

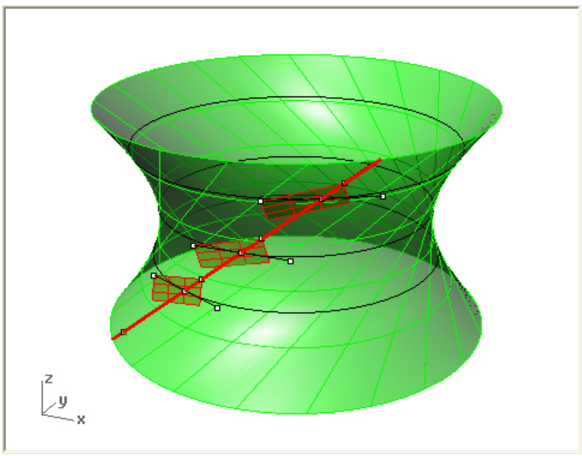
Přímkové plochy lze určit i dalšími způsoby - např. pohybem (rotací přímky - JRH, šroubovým pohybem přímky).

Rozdělení přímkových ploch:

- **rozvinutelné** (viz obr.6.1) - všechny tvořicí přímky jsou torzální (podél tvořící přímky existuje jediná tečná rovina),
- **zborcené** (viz obr.6.2) - obsahuje regulární přímky (podél tvořicí přímky tvoří tečné roviny svazek rovin).



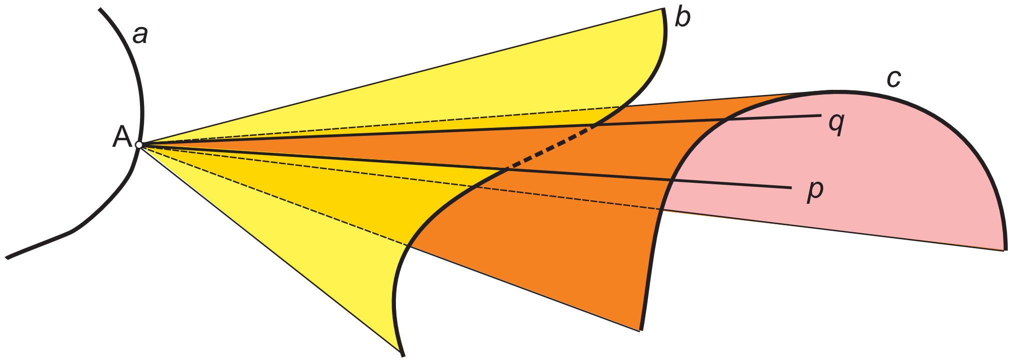
Obrázek 6.1: Rozvinutelná plocha, torzální přímka



Obrázek 6.2: Zborcená plocha, regulární přímka

6.2 Zborcené plochy

Konstrukce tvořicí přímky zborcené plochy (viz obr. 6.3): Plocha Φ je určena řídicími křivkami a, b, c. Každým bodem $A \in a$ a řídicími křivkami b, c jsou určeny dvě kuželové plochy se společným vrcholem A. Pokud jsou jejich průnikem přímky (na obr. p, q), pak jsou tvořicími přímkami plochy Φ.



Obrázek 6.3: Konstrukce tvořicí přímky

Zborcená plocha může mít i izolovanou torzální přímku. [1]

Příklad 6.1 Sestrojte několik tvořicích přímek nerozvinutelné přímkové plochy Φ určené křivkami k, m a rovinou κ. K bodům A, B ležícím na ploše Φ najděte druhý průmět. - obr. 6.4.

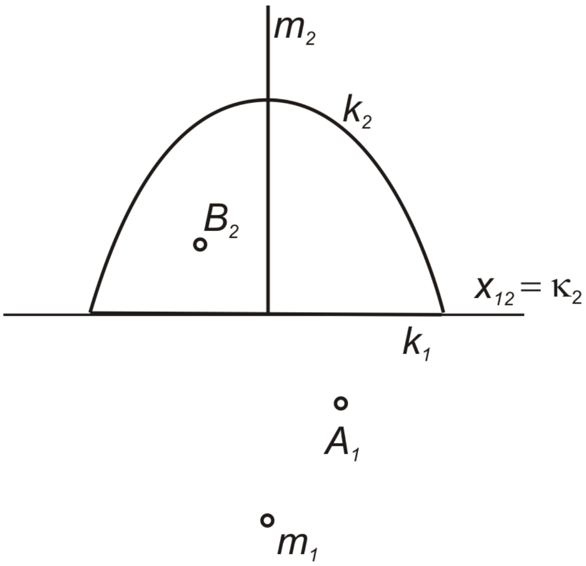
Řešení: (obr.6.5) V tomto případě je jedna z řídicích křivek nevlastní a leží v rovině κ rovnoběžné s půdorysnou. Všechny hledané tvořicí přímky plochy Φ jsou tedy rovnoběžné s rovinou κ (a s půdorysnou). Sestrojíme přímky a resp. b procházející body A resp. B

1. Půdorys a_1 přímky a prochází bodem A_1 a protíná m_1.
2. Průsečík přímky a_1 s křivkou k_1 odvodíme do nárysu na křivku k_2.
3. Přímka a_2 je rovnoběžná s x_{12} (a je rovnoběžná s rovinou κ) a prochází odvozeným průsečíkem.
4. Nárys A_2 bodu A leží na přímce a_2.
5. Nárys b_2 přímky b prochází bodem B_2 a je rovnoběžný s x_{12} (b je rovnoběžná s rovinou κ).
6. Průsečík přímky b_2 s křivkou k_2 odvodíme do půdorysu na křivku k_1.

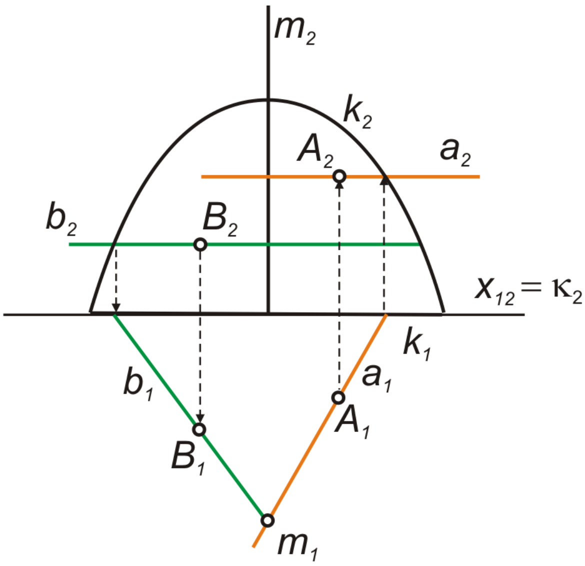
[1] Torzální přímka spolu se soumeznou přímkou určují **torzální rovinu** a jejich průsečík se nazývá **kuspidální bod**. Obrysové křivky nerozvinutelných ploch procházejí kuspidálními body. Vlastní tečnou rovinu v nevlastním bodě tvořicí přímky nazýváme **asymptotickou rovinou**. Rovina procházející tvořicí přímkou kolmo k asymptotické rovině se nazývá **centrální rovina** a její dotykový bod **centrální bod** tvořicí přímky. Množina centrálních bodů všech tvořících přímek se nazývá **strikční** křivka (křivka zúžení).

7. Půdorys b_1 přímky b prochází odvozeným průsečíkem a protíná přímku m_1
8. Půdorys B_1 bodu B leží na přímce b_1.
9. Další přímky bychom sestrojili analogickým způsobem.

□



Obrázek 6.4: Příklad 6.1

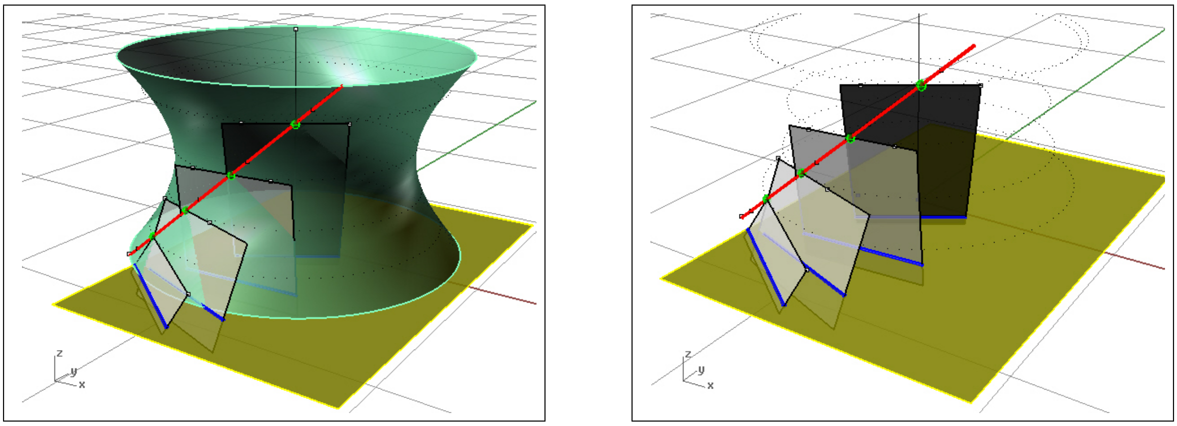


Obrázek 6.5: Příklad 6.1 - řešení

6.2.1 Tečné roviny podél tvořící přímky zborcené plochy

Tečné roviny v každém bodě tvořící přímky p zborcené plochy tvoří svazek o ose p. Vztah mezi dotykovými body a tečnými rovinami vyjadřuje **Chaslesova věta** (čti Šálova) viz obr. 6.6

Věta 6.1 *Přímá řada dotykových bodů na obecné tvořící přímce p nerozvinutelné přímkové plochy je projektivní se svazkem příslušných tečných rovin. Platí* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (A, B, C, D)$.



Obrázek 6.6: Chaslesova věta

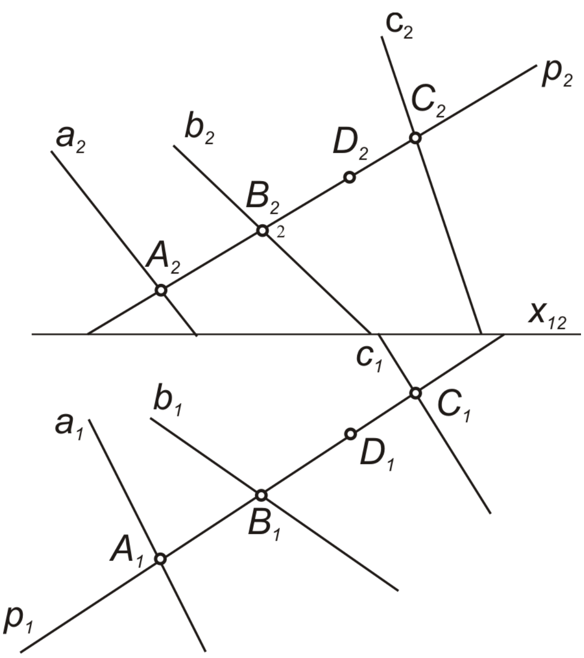
Jsou-li známy tečné roviny α, β, γ ve třech bodech A, B, C přímky p zborcené plochy Φ, lze sestrojit tečnou rovinu v dalším bodě D přímky p.

Příklad 6.2 Sestrojíme tečnou rovinu v bodě D nerozvinutelné přímkové plochy Φ, kde p je tvořící přímka této plochy a přímky a, b, c jsou její tečny v bodech A, B, C. - obr. 6.7.

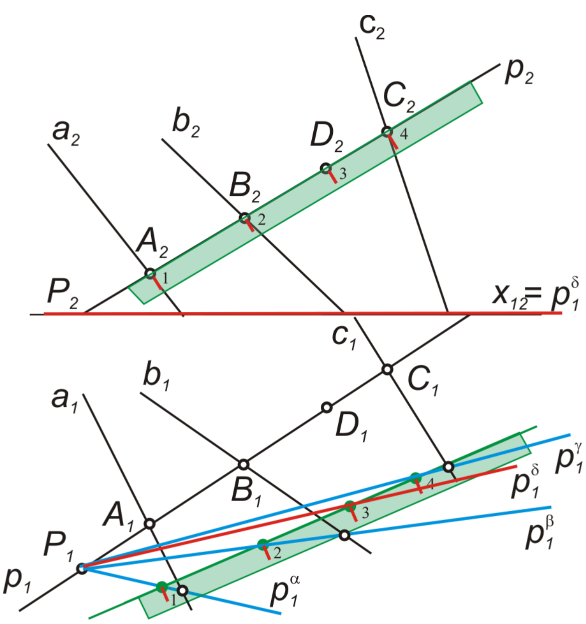
Řešení: (obr. 6.8)

1. Tečná rovina α v bodě A, resp. β v bodě B, resp. γ v bodě C je určena přímkami a, p resp. b, p resp. c, p. Sestrojíme půdorysné stopy rovin α, β, γ (jejich půdorysy procházejí půdorysným stopníkem P_1).
2. K přenesení dvojpoměru bodů A, B, C, D použijeme proužek papíru (v nárysе přeneseme body na proužek papíru, odpovídající body označíme $1, 2, 4, 3$. [2]
3. Proužek papíru umístíme v půdoryse tak, aby body $1, 2, 4$ ležely na stopách $p_1^\alpha, p_1^\beta, p_1^\gamma$.
4. Půdorysná stopa p_1^δ hledané roviny δ je určena půdorysným stopníkem P_1 a bodem 3 na proužku papíru.
5. Rovina δ je určena půdorysnou stopou p^δ a bodem D.

□



Obrázek 6.7: Příklad 6.2

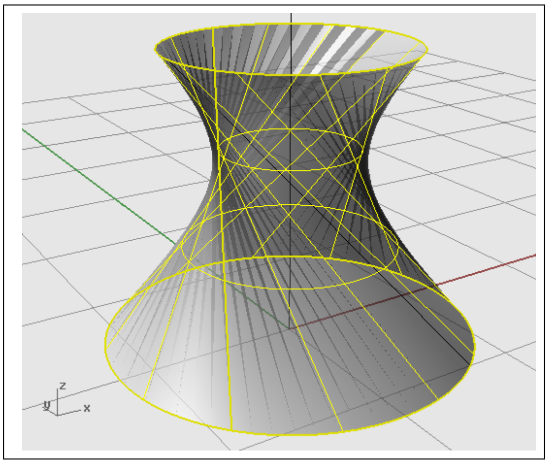


Obrázek 6.8: Příklad 6.2 - řešení

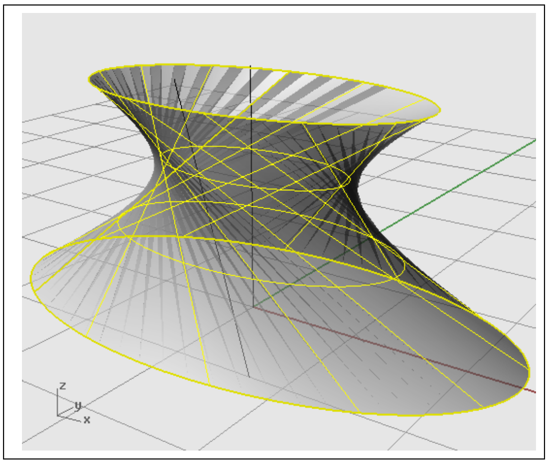
6.2.2 Zborcený hyperboloid

Jednodílný rotační hyperboloid je rotační kvadrika, která vznikne rotací přímky k kolem osy o, kde přímky k, o jsou mimoběžné. Množinu přímek, které vznikly rotací přímky k nazýváme **regulem** $\mathcal{K}$ rotačního hyperboloidu. Pokud sestrojíme ke každé přímce regulu $\mathcal{K}$, přímku souměrně sdruženou podle roviny procházející osou o - například roviny hlavního meridiánu (nebo sestrojíme přímku k' souměrnou ke k a tu necháme rotovat kolem osy o), získáme přímky druhého regulu $\mathcal{K}'$. Plocha má tedy dvě soustavy přímek (reguly):

[2] Tento zjednodušený způsob přenesení dvojpoměru je použit, protože výklad korektní konstrukce není součástí učiva tohoto předmětu.



Obrázek 6.9: Jednodílný rotační hyperboloid



Obrázek 6.10: Zborcený hyperboloid

- Přímky jednoho regulu jsou navzájem mimoběžné.
- Každá přímka jednoho regulu protíná všechny přímky druhého regulu.

Afinitou v prostoru se přímky zobrazí na přímky, vlastní body na vlastní body a nevlastní body na nevlastní body. Jednodílný rotační hyperboloid se v afinitě zobrazí na **zborcený hyperboloid**.

Ten bude mít opět dva reguly přímek (přímky jednoho regulu jsou navzájem mimoběžné a každým bodem jednoho regulu prochází přímka druhého regulu). Zborcený hyperboloid je opět kvadrika (nerotační).

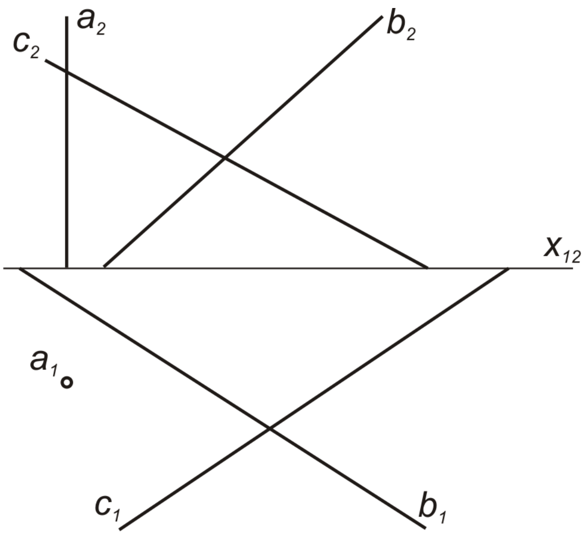
Řídícími křivkami jsou tři mimoběžné přímky a, b, c. Konstrukce tvořící přímky - bodem na jedné přímce (např. a) sestrojíme příčku mimoběžek (b, c) mimoběžek. Při speciální poloze přímek dostáváme op2t jednodílný rotační hyperboloid.

Příklad 6.3 Jsou dány tři řídící přímky a, b, c jednoho regulu zborceného hyperboloidu. Sestrojte několik přímek druhého regulu. - obr. 6.11.

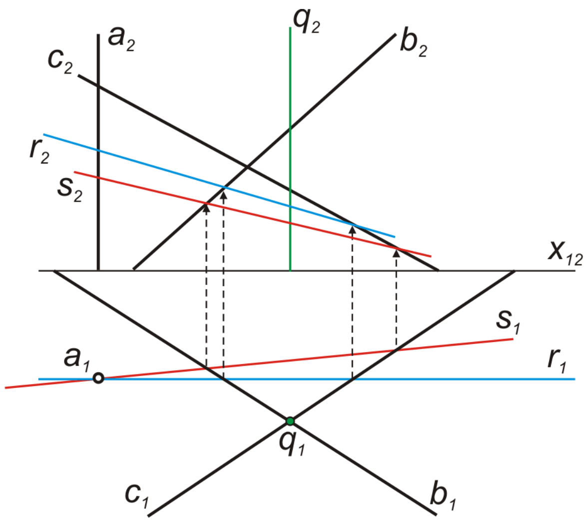
Řešení: (obr. 6.12) Na jedné z přímek zvolíme bod a úlohu převedeme na úlohu sestrojení příčky mimoběžek (zbývajících dvou přímek) daným bodem. Zde je přímka a rovnoběžná s nárysnou, a proto jsou konstrukce jednodušší než v obecném případě.

1. Přímku q volíme rovnoběžnou s přímkou a (průsečík přímek a a q je nevlastní bod). Půdorysem přímky q je tedy bod q_1, který leží na přímkách b_1 a c_1 (tedy v jejich průsečíku). Nárys přímky q je rovnoběžný s nárysem přímky q ($q_1 \parallel a_1$).
2. Přímka s protíná přímku a a tedy její půdorys s_1 prochází bodem a_1 (do kterého se zobrazí všechny body přímky a). Průsečíky přímky s_1 s přímkami b_1, c_1 odvodíme do nárysu a sestrojíme nárys přímky s.
3. Přímku r sestrojíme podobným způsobem jako přímku s, přímka je volena tak, aby byla rovnoběžná s nárysnou ($r_1 \parallel x_{12}$).

□



Obrázek 6.11: Příklad 6.3



Obrázek 6.12: Příklad 6.3 - řešení

6.2.3 Hyperbolický paraboloid

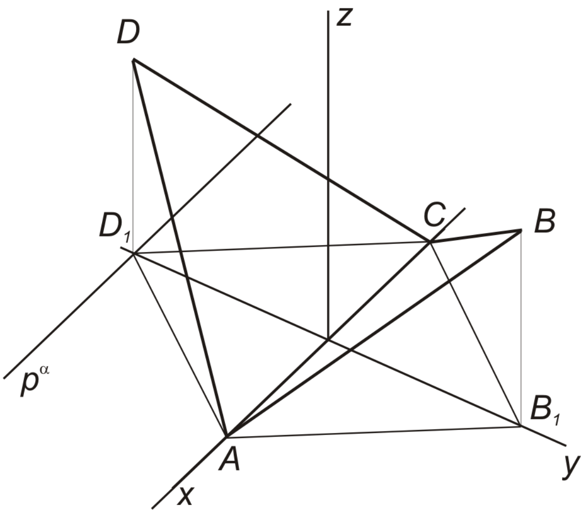
Obrazem jednodílného zborceného hyperboloidu ve středové kolineaci, jejíž úběžnicovou rovinou je tečná rovina hyperboloidu je plocha, která se nazývá **hyperbolický paraboloid**. Hyperbolický paraboloid je opět kvadrika (nerotační). Jedna přímka každého regulu se zobrazí do nevlastní přímky. Třemi mimoběžkami je určena zborcená kvadrika a jestliže je jedna z nich nevlastní, pak příčky zbývajících dvou mimoběžek tuto nevlastní přímku protínají. To znamená, že jsou rovnoběžné s rovinou, která nevlastní přímku obsahuje (správně: nevlastní přímka je ze zaměření této roviny). Tato rovina se nazývá **řídicí rovina hyperbolického paraboloidu**. Hyperbolický paraboloid má dvě řídicí roviny (všechny přímky jednoho regulu jsou rovnoběžné s jednou z řídicích rovin. Jestliže zvolíme dvě přímky jednoho regulu a dvě přímky druhého regulu, je těmito přímkami resp. jejich průsečíky určen **zborcený čtyřúhelník**. Zborcený čtyřúhelník určuje hyperbolický paraboloid jednoznačně.

Příklad 6.4 Sestrojte několik přímek obou regulů hyperbolického paraboloidu určeného zborceným čtyřúhelníkem $ABCD$. Sestrojte řez plochy rovinou α rovnoběžnou s rovinou xz - obr. 6.13.

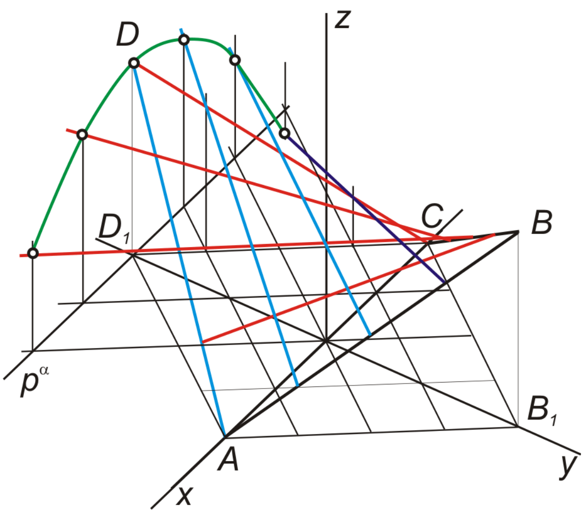
Řešení: (obr.6.14)

1. Protější strany zborceného čtyřúhelníka rozdělíme na stejný počet dílů. (Rozdělíme strany čtverce AB_1CD_1 a odvodíme body na strany čtyřúhelníka $ABCD$, v našem případě jsme rozdělili strany na čtyři díly).
2. Površky plochy získáme spojením odpovídajících si bodů na protějších stranách zborceného čtyřúhelníka. Každá dvojice stran zborceného čtyřúhelníka určuje přímky jednoho regulu.
3. Průsečíky površek s rovinou α určují řez plochy rovinou α, řezem je parabola.

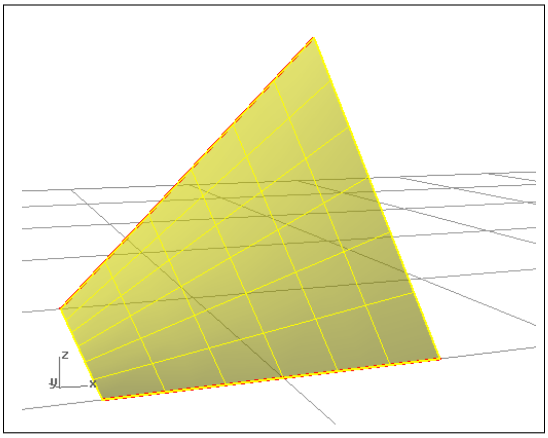
□



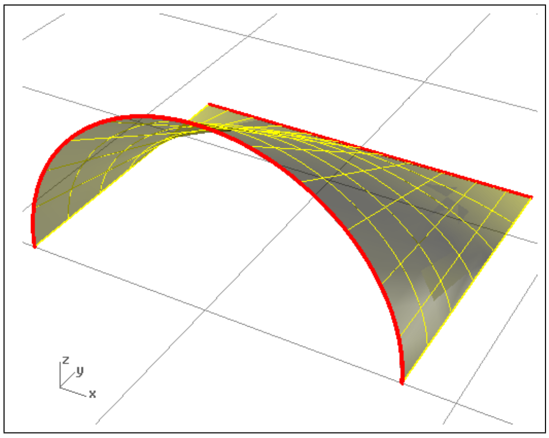
Obrázek 6.13:



Obrázek 6.14:



Obrázek 6.15: Hyperbolický paraboloid

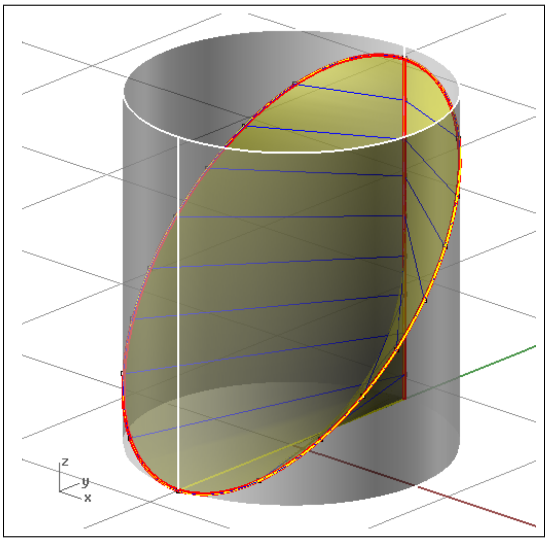


Obrázek 6.16: Přímý kruhový konoid

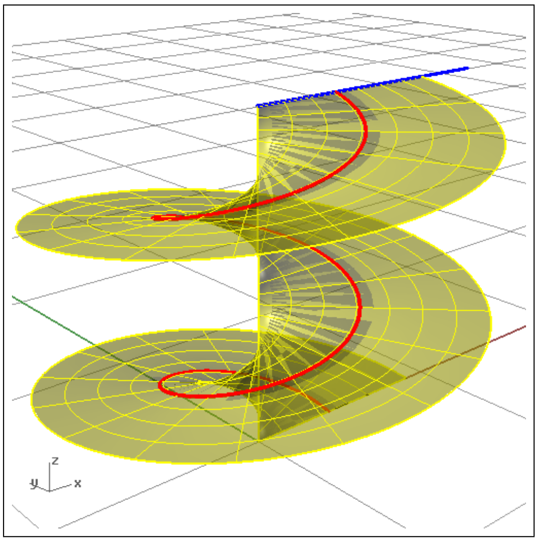
6.2.4 Konoidy

Plochy určené řídicí křivkou (popř. plochou) a dvěma přímkami z nichž jedna je nevlastní se nazývají konoidy (konoidy jsou tedy určeny křivkou, přímkou a řídicí rovinou). Speciálním případem je hyperbolický paraboloid (viz obr. 6.15), kde i řídicí křivka je přímkou. Jestliže je řídicí přímka (vlastní) kolmá k řídicí rovině, pak se konoid nazývá pravoúhlý (přímý).

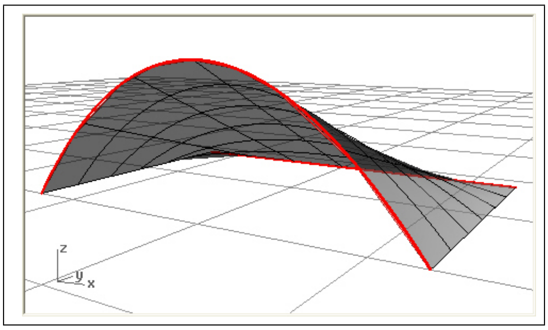
Některé konoidy jsou pojmenovány podle řídicí křivky, např. **přímý kruhový konoid** (viz obr. 6.16) jehož řídicí křivkou je kružnice, **parabolický konoid** (viz obr. 6.19) jehož řídicí křivkou je parabola nebo **přímý šroubový konoid** (viz obr. 6.18) jehož řídicí křivkou je šroubovice. Šroubový konoid se také nazývá plocha hlavních normál šroubovice, jeho tvořicí křivky jsou přímky kolmé na osu šroubovice a jsou to její hlavní normály. Dalším zástupcem konoidů je **Plückerův konoid** jehož řídicí přímkou je površka rotační válcové plochy, řídicí křivkou její eliptický řez a řídicí rovina je kolmá k řídicí přímce (viz obr. 6.17). Konoid, který je na obr. 6.20 se nazývá **Whitney umbrela** a jejími řídicími prvky je parabola, přímka rovnoběžná s osou paraboly a řídicí rovina kolmá na řídicí přímku.



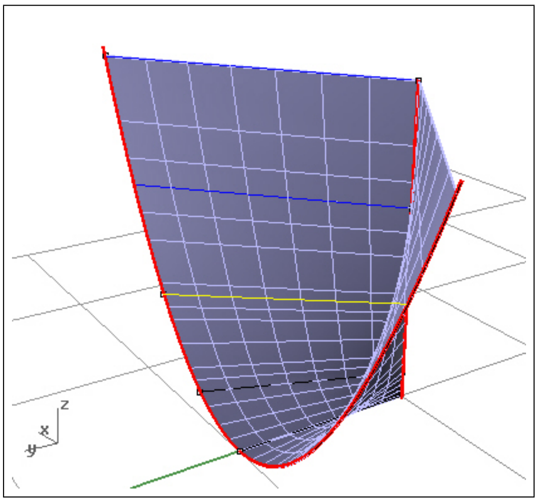
Obrázek 6.17: Pluckerův konoid



Obrázek 6.18: Přímý šroubový konoid



Obrázek 6.19: Parabolický konoid



Obrázek 6.20: Whitney umbrella

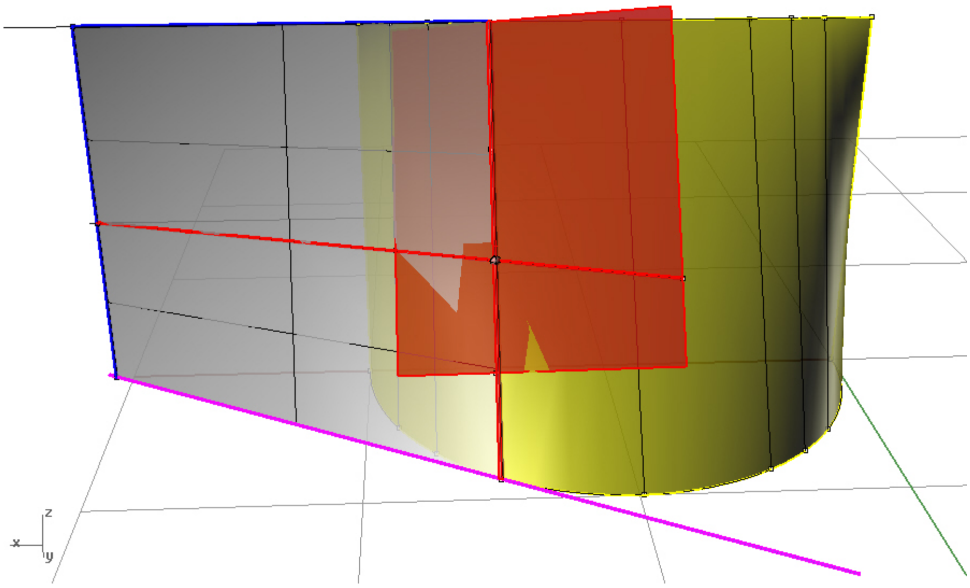
Tečná rovina konoidu

Tečnou rovinu konoidu můžeme sestrojit využitím hyperbolického paraboloidu, který je určen površkou konoidu, řídicí přímkou a řídicí rovinou konoidu. Tyto dvě plochy pak mají v každém bodě površky společnou tečnou rovinu (viz obr. 6.21).

Příklad 6.5 V obecné axonometrii sestrojte několik površek přímého kruhového konoidu, jehož řídicí křivkou je půlkružnice k ležící v rovině xy, řídicí přímkou přímka a v rovině xz a řídicí rovinou rovina yz. Sestrojte tečnou rovinu v bodě T konoidu známe-li jeho půdorys T_1 . - obr. 6.22.

Řešení: (obr.6.23)

1. Sestrojíme tvořící přímku p:



Obrázek 6.21: Společná tečná rovina konoidu a hyperbolického paraboloidu

a) Bodem T_1 sestrojíme rovinu α rovnoběžnou s řídicí rovinou konoidu ($p^\alpha \parallel y, n^\alpha \parallel z$).

b) Body R a V jsou průsečíky roviny α s řídicími křivkami a a k ($R = n^\alpha \cap a, V = p^\alpha \cap k$).

c) Tvořící přímka p konoidu prochází body R, V. Bod T konoidu leží na přímce p (a na rovnoběžce s osou z vedené bodem T_1).

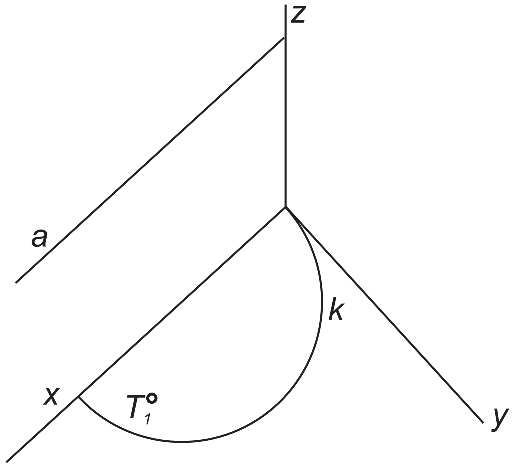
d) Podobným způsobem sestrojíme přímky d, c.

2. Sestrojíme zborcený čtyřúhelník, který určuje dotykový hyperbolický paraboloid (má s konoidem společnou površku p, řídicí přímku a a řídicí rovinu yz. Přímky zborceného čtyřúhelníka jsou:

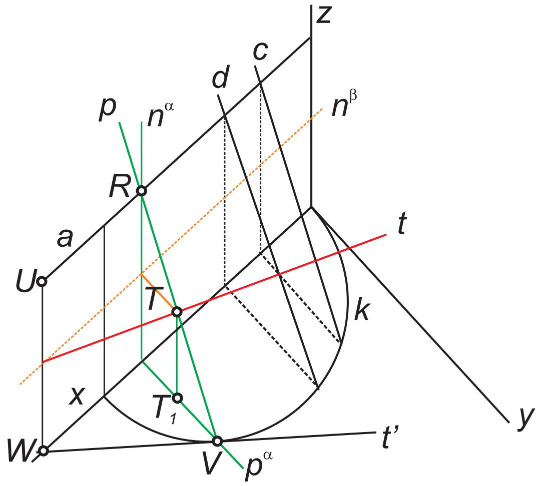
   - površka p, sestrojená v bodě T,
   - tečna t' k řídicí křivce k v bodě V,
   - řídicí přímka a,
   - příčka mimoběžek t' a a rovnoběžná s řídicí rovinou yz (U je průsečík příčky s a, W je průsečík příčky s t').

   Body R, V, W, U jsou vrcholy hledaného čtyřúhelníka.
3. Druhou řídicí rovinou hyperbolického paraboloidu (určeného R, V, W, U) je rovina xy. Sestrojíme površku t hyperbolického paraboloidu ležící v rovině β ($\beta \parallel xy$ a tedy $n^\beta \parallel x$) a procházející bodem T.
4. Přímky t a p určují společnou tečnou rovinu konoidu a hyperbolického paraboloidu.

□



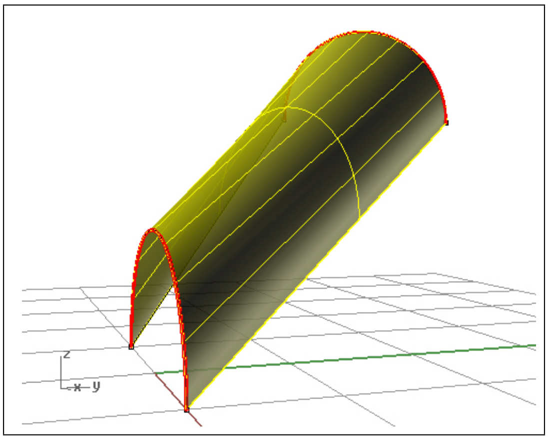
Obrázek 6.22:



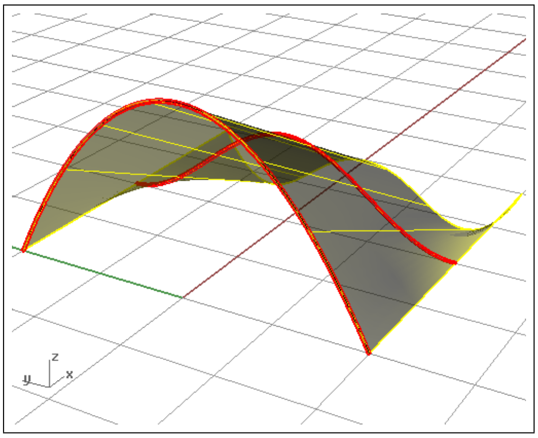
Obrázek 6.23:

6.2.5 Další přímkové plochy

Cylindroidy jsou plochy určené dvěma řídicími křivkami a nevlastní řídicí přímkou. Na obrázku 6.24 je **Frezierův cylindroid** určený dvěma kružnicemi v různých rovinách a rovinou kolmou k rovině xy. Tato plocha se používá k zastřešení schodiště. Na obrázku 6.25 je cylindroid určený parabolou, sinusoidou a řídicí rovinou xz.



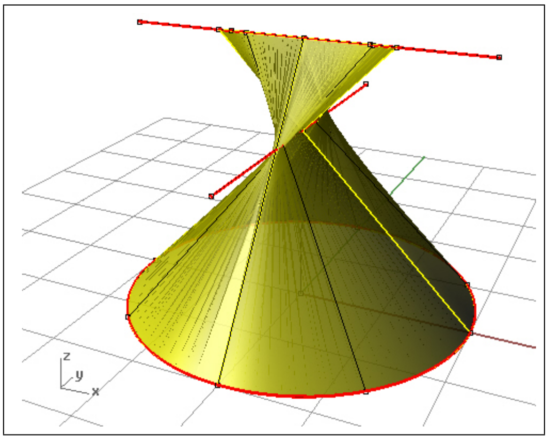
Obrázek 6.24: Frezierův cylindroid



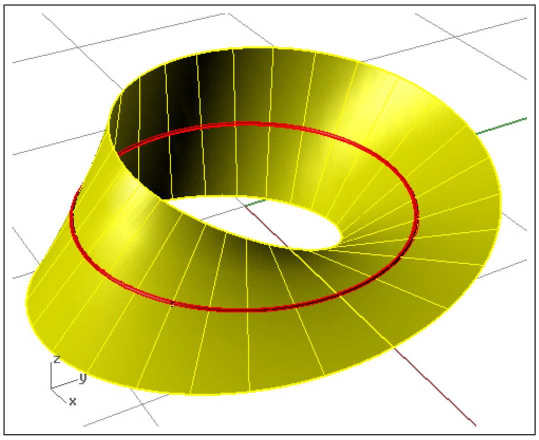
Obrázek 6.25: Cylindroid

Konusoidy jsou plochy určené dvěma řídicími křivkami a vlastní řídicí přímkou. Na obrázku 6.26 je konusoid, který nazýváme **Štramberská trúba**. Je určený kružnicí (lze i elipsou nebo parabolou) a dvěma přímkami, které jsou navzájem mimoběžné, kolmé a obě rovnoběžné s rovinou řídicí křivky. Část této plochy je použita k zastřešení věže hradu ve Štramberku.

Další zajímavou plochou z matematického hlediska je **Möbiův list** (obr. 6.27). Řídicí plochou křivkou této plochy je kružnice, její tvořicí přímka protíná řídicí kružnici a pohybuje se tak, že se během své dráhy otočí o π rad. Tato plocha je zajímavá svou neorientovatelností.



Obrázek 6.26: Štramberská trúba



Obrázek 6.27: Möbiův list

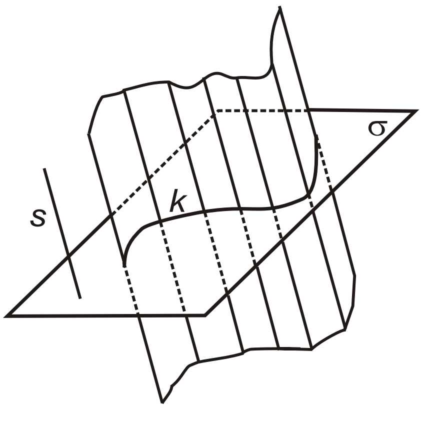
6.3 Rozvinutelné plochy

Torzální površkou přímkové plochy rozumíme přímku p, pro kterou platí, že v každém jejím bodě je stejná tečná rovina τ, tj. tečná rovina τ se dotýká plochy podél torzální površky p.

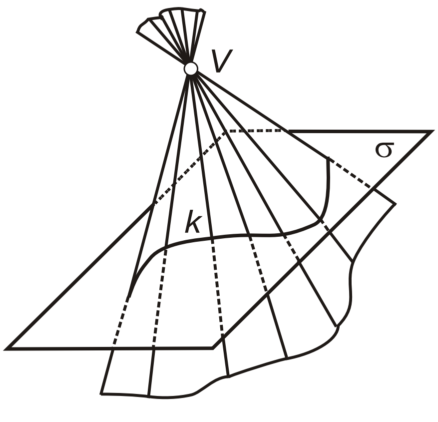
Přímková plocha je **rozvinutelná**, jestliže všechny její površky jsou torzální.
Rozvinutelná plocha je obalovou plochou pohybující se roviny.

6.3.1 Typy rozvinutelných ploch

Rozvinutelnými plochami jsou pouze následující plochy a jejich části: **rovina**, **válcové plochy** – obr. 6.28, **kuželové plochy** – obr. 6.29 a **plochy tečen prostorových křivek** – obr. 6.30.



Obrázek 6.28:

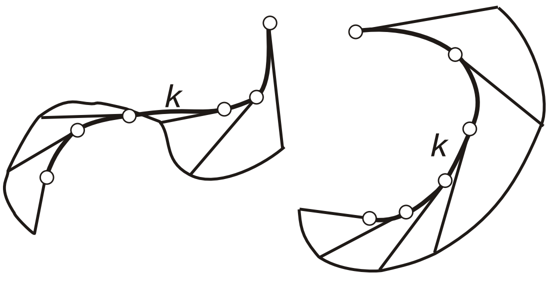


Obrázek 6.29:

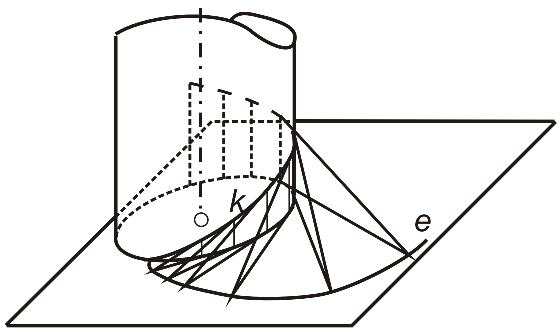
Válcová plocha je určena rovinnou křivku k ($k \subset \sigma$) a směrem s, který nenáleží dané rovině ($s \nparallel \sigma$), a je tvořena přímkami, které protínají křivku k a jsou směru s.

Kuželová plocha je určena rovinnou křivku k ($k \subset \sigma$) a bodem V, který neleží v rovině dané křivky ($V \notin \sigma$), a je tvořena přímkami, které protínají křivku k a procházejí bodem V.

V projektivním rozšíření euklidovského prostoru lze definovat válcovou a kuželovou plochu jednou definicí, a to jako množinu přímek, které protínají danou křivku k a procházejí daným vrcholem V. Oba typy ploch se liší tím, zda vrchol V je vlastní, pak jde o kuželovou plochu, nebo je nevlastní, pak jde o válcovou plochu.



Obrázek 6.30:



Obrázek 6.31:

Plocha tečen prostorové křivky je určena prostorovou křivkou k a je tvořena jejími tečnami. Na obr. 6.30 jsou uvedeny dva příklady takové plochy. Příkladem plochy tečen je *rozvinutelná šroubová plocha*, která je tvořena tečnami šroubovice – obr. 6.31. Řezem této plochy rovinou kolmou k ose šroubového pohybu je **kruhová evolventa**, tj. křivka, která vzniká jako trajektorie bodu přímky odvalující se po kružnici.

6.3.2 Metody komplanace

Komplanací neboli rozvinutím rozumíme zobrazení φ rozvinutelné plochy do roviny, které zachovává délky a úhly.

Obecné metody pro rozvinutí jsou dány následující tabulkou.

Typ rozvinutelné plochy	**Metoda rozvinutí**
Obecná válcová plocha	Normálový řez
Obecná kuželová plocha	Triangulace
Plocha tečen prostorové křivky	Triangulace

Metoda normálového řezu

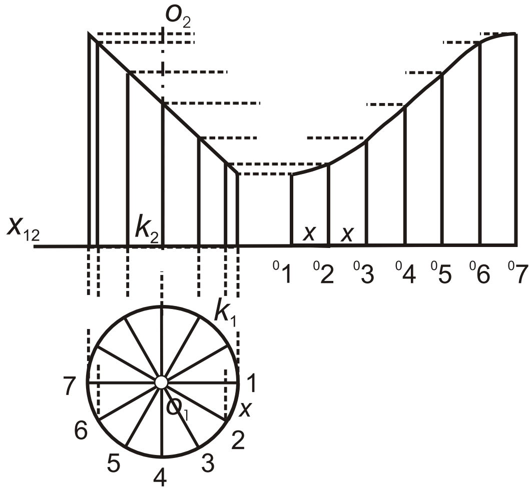
Normálovým řezem válcové plochy rozumíme řez rovinou kolmou na povrchové přímky plochy. Takový řez se při rozvinutí zobrazí na přímku kolmou na obrazy površek.

Při rozvinutí válcové plochy postupujeme takto:

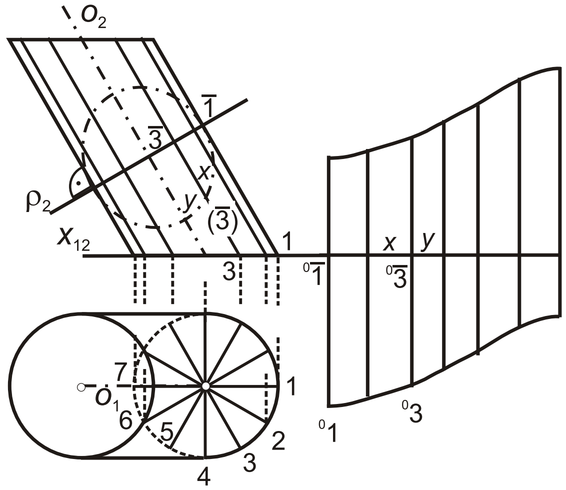
1. Vedeme libovolnou rovinu ϱ kolmou na povrchové přímky válcové plochy.
2. Určíme řez k dané válcové plochy rovinou ϱ.
3. V rozvinutí se křivka k zobrazí do úsečky ${}^0k$. Délka obrazu se rovná délce vzoru, tj. délku úsečky ${}^0k$ určíme pomocí rektifikace křivky k.

Pokud chceme v rozvinutí zobrazit další křivku ležící na dané obecné válcové ploše, stačí na povrchové přímky vynášet úseky površky mezi normálovým řezem a danou křivkou.

Normálovým řezem na rotační válcové ploše je např. její podstava. Oblouk šroubovice ležící na dané rotační válcové ploše se rozvine do úsečky.



Obrázek 6.32:



Obrázek 6.33:

Příklad 6.6 Na obr. 6.32 je provedeno rozvinutí poloviny pláště rotačního válce s řezem rovinou σ. Normálovým řezem je podstava k. Vzdálenost x površek v rozvinutí se rovná délce oblouku na podstavě.

Příklad 6.7 Na obr. 6.33 je provedeno rozvinutí poloviny pláště kruhového (kosého) válce. Rovina ϱ normálového řezu je zobrazena v nárysu (volíme jednu z rovin kolmých na površky). Normálovým řezem je elipsa, jejíž hlavní poloosa se rovná poloměru kružnice podstavy. Normálový řez je vyznačen ve sklopení. Délky oblouků elipsy ve sklopení určují vzdálenosti jednotlivých površek v rozvinutí (např. délky x a y). V daném případě mají v rozvinutí všechny površky stejnou délku. Poměr, v němž dělí bod normálového řezu površku, zjistíme z nárysu, neboť površky jsou rovnoběžné s nárysnou.

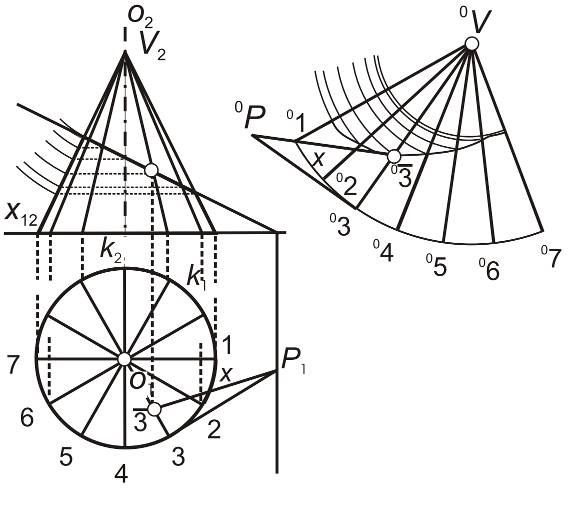
Metoda triangulace

Podstatou této metody je náhrada plochy mnohostěnem, který má trojúhelníkové stěny.

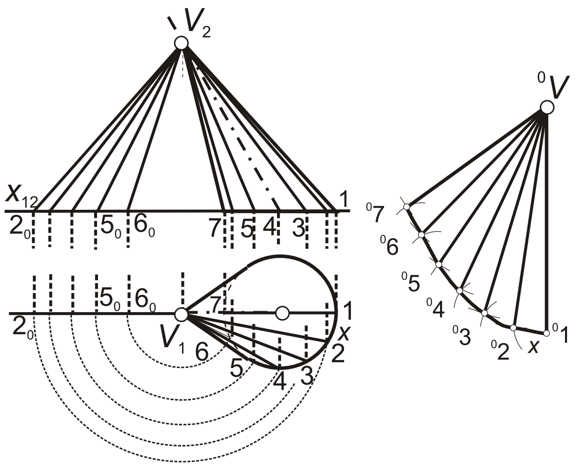
V případě kuželových ploch volíme trojúhelníky tak, že mají vždy jeden vrchol ve vrcholu kuželové plochy. Pro rotační kuželovou plochu platí, že podstava k se rozvine do oblouku kružnice, jehož délka se musí rovnat obvodu kružnice k. Poloměr oblouku v rozvinutí se rovná délce úseku površky mezi vrcholem a podstavou.

Příklad 6.8 Na obr. 6.34 je zobrazeno rozvinutí části rotační kuželové plochy. Pro určení skutečných délek úseků površek plochy je využito rotace površky do roviny obrysové površky.

Příklad 6.9 Na obr. 6.35 je zobrazeno rozvinutí části kruhové kuželové plochy. Použita je triangulace a celý postup spočívá v určování skutečných délek úseček (úseků površek plochy). K tomu je využito otočení do polohy rovnoběžné s nárysnou. Površky určené bodem 1, resp. 7, na podstavě se zobrazují v nárysu ve skutečné velikosti.



Obrázek 6.34:



Obrázek 6.35:

6.3.3 Tečna křivky v rozvinutí

Obrazem tečny křivky na ploše je tečna křivky v rozvinutí.

Vzhledem k tomu, že rozvinutí je zobrazení, které zachovává úhly, je možné určit tečnu křivky v rozvinutí pomocí určení úhlu površky a tečny křivky na ploše.

Příklad 6.10 Na obr. 6.34 je zkonstruována tečna křivky řezu v rozvinutí. K určení úhlu tečny a površky je využito trojúhelníka $3P_1\bar{3}$, pro nějž je určena skutečná velikost pomocí skutečných délek jeho stran. Bod $\bar{3}$ je bodem řezu, bod 3 leží na podstavě a bod P_1 je průsečíkem tečny s podstavnou rovinou. Přímka $3P_1$ je tečnou podstavy.

6.3.4 Rozvinutí rozvinutelné šroubové plochy

Rozvinutelnou šroubovou plochu lze rozvinout tak, že určíme obraz hrany vratu, tj. určující šroubovice. Platí, že šroubovice vratu se v rozvinutí zobrazí do kružnice, pro jejíž poloměr ρ platí

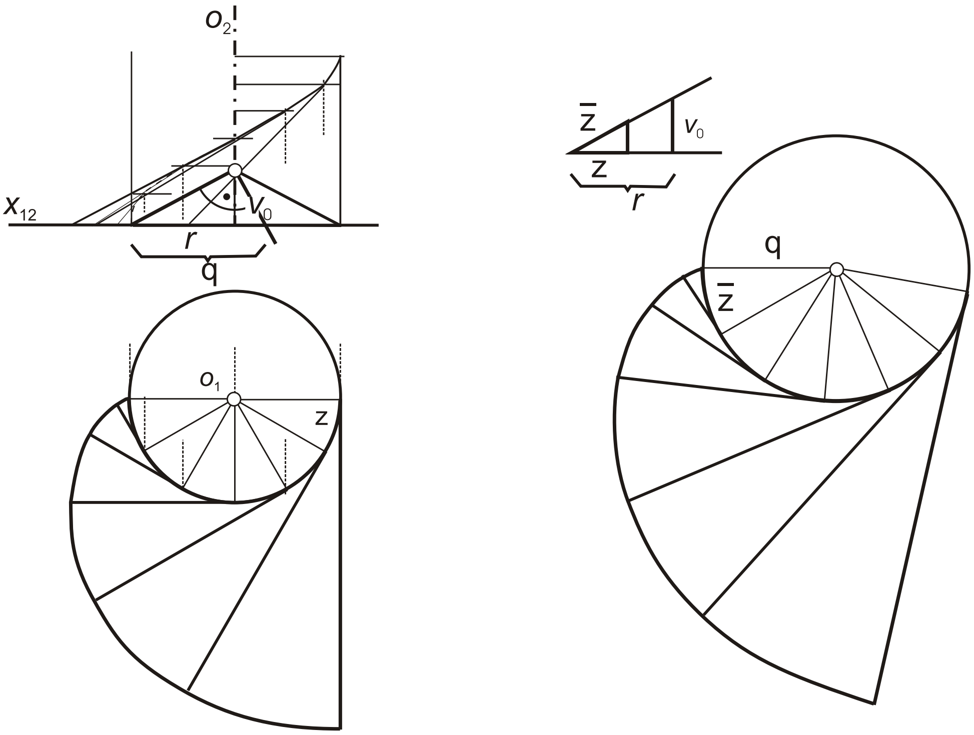
$$\rho = \frac{r^2 + v_0^2}{r}.$$

Příklad 6.11 Na obr. 6.36 je zobrazeno rozvinutí části rozvinutelné šroubové plochy. Pro šroubovici vratu je určen poloměr ρ, který je poloměrem příslušného oblouku v rozvinutí. Obrazem kruhové evolventy, která je řezem dané plochy půdorysnou, je opět kruhová evolventa. Pro zobrazení daných površek v rozvinutí byla určena k otočení, které odpovídá oblouku ω, délka oblouku šroubovice $\bar{\omega}$.

6.3.5 Konstrukce a rozvinutí přechodové rozvinutelné plochy

Uvažujme dvě rovinné křivky a a b ležící v rovinách α a β – obr. 6.37. V řadě technických aplikací vzniká požadavek na určení rozvinutelné plochy Ω, která obsahuje obě dané křivky ($a \subset \Omega, b \subset \Omega$). Plochu Ω nazýváme *přechodová plocha mezi danými křivkami.*

Postup konstrukce přechodové plochy:



Obrázek 6.36:

1. Na jedné z křivek zvolíme bod – např. $A \in a$ a určíme tečnu t_A křivky a v bodě A.

2. Na druhé křivce, tj. na křivce b, určíme bod B tak, aby tečna t_B v tomto bodě nebyla v tečnou t_A mimoběžná. Tento krok realizujeme takto:

   $t_A \parallel \beta$ – vedeme tečnu t_B křivky b rovnoběžnou s přímkou t_A – obr. 6.38,

   $t_A \nparallel \beta$ – označme p průsečnici rovin α a β; z průsečíku $t_A \cap p$ vedeme tečnu t_B křivky b – obr. 6.37.

3. Přímka AB je torzální přímkou – tečná rovina v bodech A a B je stejná a tato rovina se dotýká vytvářené plochy i ve všech bodech této površky.

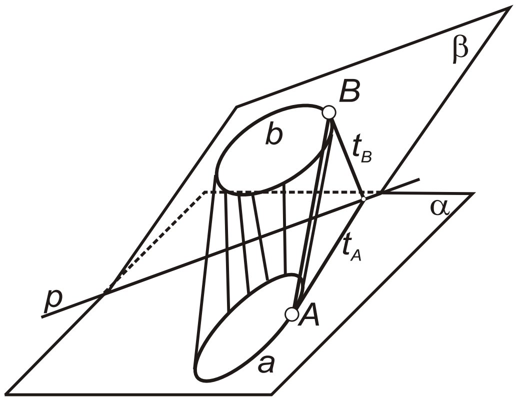
Zkonstruovaná přechodová plocha je vždy buď plochou tečen prostorové křivky (zpravidla neznámé či neurčované), nebo ve výjimečných případech plochou válcovou nebo kuželovou.

Rozvinutí přechodové plochy se provede zpravidla pomocí triangulace.

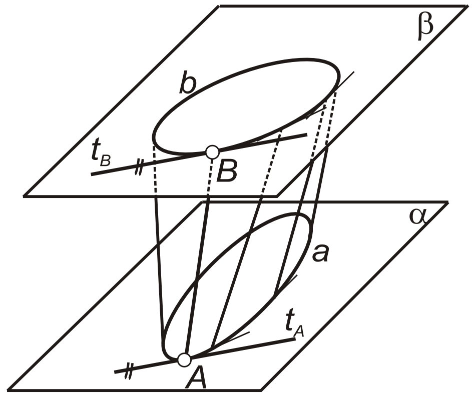
6.4 Kontrolní otázky

6.1 Uveďte dva způsoby vytvoření hyperbolického paraboloidu (jako přímkovou plochu a jako kvadriku jejímiž ptvořícími křivkami jsou regulární kuželosečky).

6.2 Definujte konoid a uveďte příklad konoidu.



Obrázek 6.37:



Obrázek 6.38:

6.3 Uveďte příklady tří zborcených ploch: rotační, šroubovou a plochu, která není ani rotační ani šroubová.

6.4 Definujte torzální površku plochy.

6.5 Definujte rozvinutelné plochy a uveďte všechny typy rozvinutelných ploch.

6.6 Uveďte dva způsoby vytvoření rozvinutelné šroubové plochy (návod: jako obalovou plochu a jako jeden z typů rozvinutelných ploch).

6.7 Popište metodu normálového řezu pro rozvinutí. Pro které rozvinutelné plochy se tato metoda dá aplikovat?

Literatura

[1] Bohne, E. – Klix, W.D.: Geometrie – Grundlagen für Anwendungen. Leipzig, Fachbuchverlag 1995.

[2] Glaeser, G.: Geometry and its Applications. Springer Wien New York, 2012.

[3] Ježek, F. – Míková, M.: Maticová algebra a analytická geometrie. Plzeň, ZČU 2003.

[4] Pottmann, H.–Asperl, A.–Hofer, M.– Kilian, A.: Architectural Geometry. Bentley Institute Press, 2007.

[5] Rogers, D.F. – Adams, J.A.: Mathematical Elements for Computer Graphics. New York, Mc Graw–Hill 1990.

[6] Urban, A.: Deskriptivní geometrie I. Praha, SNTL 1965.

[7] Urban, A.: Deskriptivní geometrie II. Praha, SNTL 1967.