DVOJNÝ INTEGRÁL

Výpočet dvojného integrálu pomocí Fubiniovy věty.
Geometrické a fyzikální aplikace (obsah rovinného obrazce, mechanické charakteristiky rovinné desky).
Transformace do polárních, resp. zobecněných polárních souřadnic.

Výpočet dvojného integrálu pomocí Fubiniovy věty

Riemannovy součty a jejich limita:

Předpokládejme, že $f(x;\ y)$ je omezená funkce na obdélníku $O = \langle a; b\rangle \times \langle c; d\rangle$ v E_2. Nechť D je dělení O na dílčí obdélníky $O_1, \ldots, O_n$, jejichž strany mají délky $\Delta x_1, \Delta y_1, \ldots, \Delta x_n, \Delta y_n$. Označme ν systém vybraných bodů $Z_i \in O_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Pak Reimannovým součtem funkce f na obdélníku O, odpovdajícím dělen D a systéemu bodů ν, nazýváme

$$s(f; D; \nu) = \sum_{i=1}^{n} f(Z_i) \cdot \Delta x_i \Delta y_i$$

Říkáme, že číslo S je limitou Riemannových součtů $s(f; D; \nu)$ pro $\|D\| \to 0_+$, jestliže ke každému danému $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D obdélníku O a pro každý zvolený systém ν platí: $\|D\| < \delta \Rightarrow |s(f; D; \nu) - S| < \epsilon$.

Píšeme: $\lim\limits_{\|D\| \to 0_+} s(f; D; \nu) = S$.

Výpočet dvojného integrálu pomocí Fubiniovy věty

Dvojný integrál na obdélníku:
Jestliže limita $\lim_{\|D\|\to 0_+} s(f; D; v) = S$ existuje, pak číslo S nazýváme dvojným integrálem funkce f na obdélníku O. Integrál obvykle značíme

$$\iint_O f(x,y)dxdy \text{ nebo } \iint_O f\ dxdy$$

Jestliže limita existuje, říkáme, že „dvojný integrál $\iint_O f\ dxdy$ existuje“ nebo že funkce f je integrovatelná na obdélníku O".

Výpočet dvojného integrálu pomocí Fubiniovy věty

Dvojný integrál na obecné omezené množině v E_2:
Předpokládejme, že M je omezená množina v E_2 a $f(x;y)$ je omezená funkce na M. Nechť $O=\langle a;b\rangle \times \langle c;d\rangle$ je obdélník, ve kterém je množina M obsažena. Definujme $f^*(x,y)=$
$$\begin{cases} f(x,y) \;\; pro \;[x,y]\in M \\ \;\; 0 \;\; pro \;[x,y]\in O\backslash M \end{cases}$$

Pak dvojným integrálem funkce f na množině M rozumíme dvojný integrál funkce f^*na

obdélníku O (pokud tento integrál existuje). Dvojný integrál f na M značíme

$\iint_M f(x,y)dxdy$ nebo $\iint_M f\; dxdy$.

- f^* je funkce f rozšířená nulou vně množiny M
- Pokud integrál $\iint_O f^*\; dxdy$ existuje, pak říkáme, že také „dvojný integrál $\iint_M f\; dxdy$ existuje" nebo že funkce f je integrovatelná na množině M". Množinu M nazýváme integrační obor nebo obor integrace a integrovanou funkci f často nazýváme integrand.

Měřitelná množina v E_2 a její Jordanova míra

Předpokládejme, že M je omezená množina v E_2. Říkáme, že tato množina je měřitelná (v Jordanově smyslu), jestliže dvojný integrál konstantní funkce $f(x;\ y) = 1$ na M existuje. V tomto případě nazýváme číslo

$$\mu_2(M) = \iint_M dxdy$$

dvourozměrnou Jordanovou mírou množiny M.

Příklady množin, jejichž dvourozměrná míra je rovna nule:

a) Prázdná množina a všechny množiny, sestávající z konečného počtu bodů nebo úseček.
b) Grafy spojitých funkcí jedné proměnné $y = \varphi(x)$ nebo $x = \psi(y)$ na omezených uzavřených intervalech.
c) Tzv. jednoduché hladké křivky nebo jednoduché po částech hladké křivky v E_2

Měřitelná množina v E_2 a její Jordanova míra

Věta:

a) Sjednocení konečně mnoha množin míry nula je množina míry nula.

b) Je-li N množina míry nula a $M \subset N$, pak M je také množina míry nula.

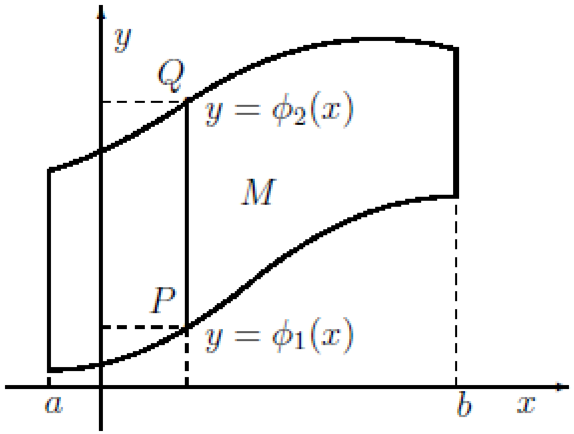
Věta: (Nutná a postačující podmínka pro to, aby množina v E_2 byla měřitelná.)
Množina $M \subset E_2$ je měřitelná (v Jordanově smyslu) právě tehdy, je-li omezená a $\mu_2(\partial M) = 0$.

Věta: (Postačující podmínka pro existenci dvojného integrálu)
Nechť M je měřitelná množina v E_2 a f je omezená a spojitá funkce na M. Pak dvojný integrál $\iint_M f \, dxdy$ existuje.
(předpoklad spojitosti f na M je splněn i při nespojitosti f na množině míry nula v M)

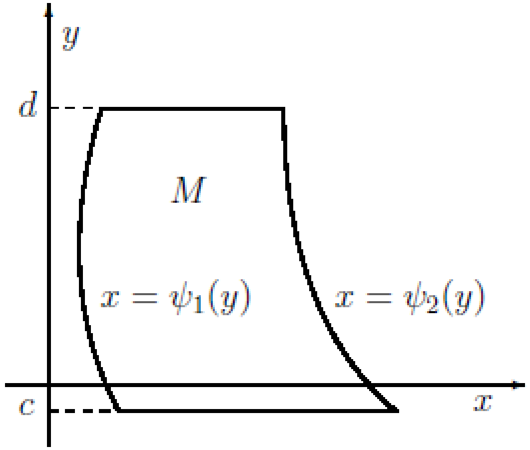
Výpočet dvojného integrálu - Fubiniho věta

Elementární obor integrace v $\mathbf{E_2}$:

Nechť $y = \varphi_1(x)$ a $y = \varphi_2(x)$ jsou spojité funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Pak množinu $M = \{[x, y] \in E_2; a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ nazýváme elementárním oborem integrace vzhledem k ose x.



Nechť $x = \varphi_1(y)$ a $x = \varphi_2(y)$ jsou spojité funkce v intervalu $\langle c, d\rangle$ a nechť $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ pro všechna $x \in \langle c, d\rangle$. Pak množinu $M = \{[x, y] \in E_2; c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ nazýváme elementárním oborem integrace vzhledem k ose y.



Výpočet dvojného integrálu - Fubiniho věta

Fubiniho věta pro dvojný integrál:

Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k ose x. Nechť funkce $f(x;\ y)$ je spojitá v M. Pak $\iint_M f(x,y)\ dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right) dx$.

Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k ose y. Nechť funkce $f(x;\ y)$ je spojitá v M. Pak $\iint_M f(x,y)\ dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right) dy$.

dvojný integrál

dvojnásobný integrál

* pro spojitou funkci a elementární obor integrace nezávisí na pořadí integrálů vpravo

Aplikace dvojného integrálu

- **objem množiny $\boldsymbol{Q}$ mezi rovinou $\boldsymbol{xy}$ a grafem funkce $\boldsymbol{f}$ na $\boldsymbol{M}$**: $V = \iint_M f\,dxdy$
- **hmotnost desky**: $m = \iint_M \rho(x,y)dxdy$, kde M je omezená množina (tenká deska) v E_2 a $\rho(x,y)$ je plošná hustota desky
- **statický moment**: vzhledem k ose x: $m_x = \iint_M y \cdot \rho(x,y)dxdy$

  vzhledem k ose y: $m_y = \iint_M x \cdot \rho(x,y)dxdy$
- **těžiště**: $x_T = \frac{m_y}{m}$, $y_T = \frac{m_x}{m}$
- **moment setrvačnosti**: vzhledem k ose x: $J_x = \iint_M y^2 \cdot \rho(x,y)dxdy$

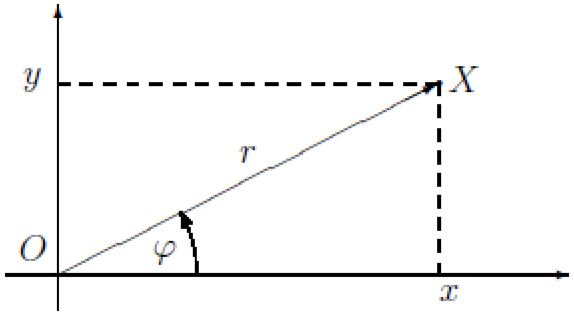
  vzhledem k ose y: $J_y = \iint_M x^2 \cdot \rho(x,y)dxdy$

  vzhledem k počátku O: $J_O = \iint_M (x^2 + y^2) \cdot \rho(x,y)dxdy$

Transformace do polárních souřadnic

- **Polární souřadnice v $\boldsymbol{E_2}$:**

  bod X lze určit souřadnicemi r, φ, kde r je vzdálenost X od počátku O a φ je úhel mezi kladnou částí osy x a úsečkou OX



- Vztah mezi kartézskými souřadnicemi x, y a polárními souřadnicemi r, φ je dán rovnicemi:

  $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$, odkud plyne $r \geq 0$, $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$
- při integraci se mění meze dle substituce a $dxdy$ se nahradí výrazem $r\ drd\varphi$, což je determinant Jakobiho matice:

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

Transformace do zobecněných polárních souřadnic

- bod X lze určit souřadnicemi r, φ, kde r je vzdálenost X od počátku O a φ je úhel mezi kladnou částí osy x a úsečkou OX
- Vztah mezi kartézskými souřadnicemi x, y a zobecněnými polárními souřadnicemi r, φ je dán rovnicemi:

  $x = x_0 + ar \cdot \cos\varphi, y = y_0 + br \cdot \sin\varphi$, kde $a, b \geq 0$ zvolené konstanty, $[x_0, y_0]$ je zvolený bod
- při integraci se mění meze dle substituce a $dxdy$ se nahradí výrazem $rab\ drd\varphi$