

Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Důkazy vybraných geometrických konstrukcí

Proofs of selected geometric constructions

Marie Vaňková

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Michal Zamboj, Ph.D.

Studijní program: Specializace v pedagogice (B7507)

Studijní obor: B M-PG

Praha 2021

Odevzdáním této bakalářské práce potvrzuji, že jsem ji vypracovala samostatně pod vedením vedoucího práce a výhradně za použití v práci citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Valašské Meziříčí, 11.7.2021

Chtěla bych poděkovat svému vedoucímu práce, kterým byl pan Mgr. Michal Zamboj Ph.D., za jeho podporu, cenné rady, odborné konzultace, zpětnou vazbu a zejména za jeho přívětivý přístup.

Abstrakt

Tato práce je shrnutím vybraných konstrukcí používaných v deskriptivní a kinematické geometrii. Tyto konstrukce jsou vždy podrobně popsány a dokázány.

První kapitola je věnována samotnému pojmu křivka a křivost. Druhá se pak věnuje kuželosečkám, tedy elipse, hyperbole a parabole. Tyto křivky jsou zadefinovány, jsou popsány jejich hlavní vlastnosti a je odvozena jejich rovnice. Dále pak kapitola obsahuje popis různých druhů konstrukcí těchto křivek. Konkrétně jde zejména o bodové konstrukce a konstrukce pomocí oskulačních kružnic.

Třetí kapitola se věnuje cyklickým křivkám, tedy cykloidě, epicykloidě, hypocykloidě, pericykloidě a evolventě kružnice. U těchto křivek je zadefinován pohyb, kterým vznikají, a je představeno parametrické vyjádření dané křivky. Následuje popis konstrukce tohoto pohybu a důkaz, že body této konstrukce odpovídají parametrickému vyjádření cyklické křivky.

Na závěr se poslední čtvrtá kapitola věnuje konchoidám, které se spolu s cyklickými křivkami řadí mezi kinematické křivky. I zde je nejprve představen pohyb, kterým konchoidy vznikají, je popsána konstrukce tohoto pohybu a je dokázáno, že zkonstruované body odpovídají rovnici hledané křivky. Konkrétně u konchoidy kružnice je dokázána konstrukce Pascalových závitnic.

Všechny konstrukce v práci jsou doplněny interaktivními konstrukcemi v programu GeoGebra, které lze využít například při výuce na střední škole.

Klíčová slova

Geometrie, konstrukce, kuželosečky, cyklické křivky, konchoidy.

Abstract

This bachelor thesis is the summary of the chosen constructions used in descriptive and kinematic geometry. These constructions are always described in detail and proven.

The first chapter is devoted to the very concept of curve and curvature. The second chapter is focused on conic sections, ie ellipses, hyperbolas and parabolas. These curves are defined, their main characteristics are described, and their equation is derived. Further off, the chapter contains of the various kinds of constructions of these curves. It is particularly about point structures and structures using osculating circles.

The third chapter deals with the cyclic curves, ie cycloid, epicycloid, hypocycloid, pericycloid and involute of a circle. For these curves, the motion by which they arise is defined, and the given curve's parametric expression is presented. The following is a description of the construction of this motion and proof that the points of this construction correspond to the parametric expression of the cyclic curve.

Finally, the fourth chapter focuses on conchoids, which together with cyclic curves rank among the kinematic curves. Even here the motion by which conchoids are created is first introduced, the construction of this motion is described, and it is proved that the constructed points correspond to the equation of the searched curve. Specifically, for the conchoid of a circle, the construction of limaçon of Pascal is proven.

All constructions are supplemented by an interactive construction in the GeoGebra program, which can be used to teach in secondary school.

Keywords

Geometry, construction, conic sections, cyclic curves, conchoids.

Obsah

Úvod	8
1 Křivky	10
2 Kuželosečky	13
2.1 Elipsa	14
2.1.1 Definice	14
2.1.2 Základní pojmy a vlastnosti	15
2.1.3 Rovnice elipsy	16
2.1.4 Provázková konstrukce elipsy	17
2.1.5 Bodová konstrukce elipsy	17
2.1.6 Trojúhelníková konstrukce elipsy	20
2.1.7 Konstrukce elipsy pomocí oskulačních kružnic	22
2.2 Hyperbola	25
2.2.1 Definice	25
2.2.2 Základní pojmy a vlastnosti	26
2.2.3 Rovnice hyperboly	27
2.2.4 Bodová konstrukce hyperboly	29
2.2.5 Konstrukce hyperboly pomocí oskulačních kružnic	31
2.3 Parabola	33
2.3.1 Definice	33
2.3.2 Základní pojmy a vlastnosti	33
2.3.3 Rovnice paraboly	34

2.3.4	Bodová konstrukce paraboly	35
2.3.5	Konstrukce paraboly pomocí oskulační kružnice	36
3	Cyklické křivky	38
3.1	Cykloida	39
3.2	Epicykloida	44
3.3	Hypocykloida	52
3.4	Pericykloida	57
3.5	Evolventa kružnice	58
4	Konchoidy	64
4.1	Přímá konchoida přímky	65
4.2	Přímá konchoida kružnice	67
	Závěr	71
	Literatura	73
	Příloha – GeoGebra kniha	74

Úvod

Tématem této bakalářské práce jsou vybrané geometrické konstrukce a jejich důkazy. Konkrétně půjde o konstrukce kuželoseček, cyklických křivek a konchoid.

Konstrukce kuželoseček, tedy elipsy, hyperboly a paraboly, jsou velice rozšířeným tématem zejména v deskriptivní geometrii. Je možné najít mnoho literatury, ve které se autoři těmto konstrukcím věnují, avšak ne vždy jsou tyto konstrukce uváděny i s důkazem, respektive vysvětlením, proč fungují. Nejlepším příkladem tohoto problému jsou konstrukce kuželoseček pomocí hyperoskulačních kružnic. Tyto velice často používané konstrukce nalezneme téměř v každé učebnici deskriptivní geometrie, ovšem jejich důkaz již tak rozšířený není. Proto se budeme těmto konstrukcím a jejich důkazům věnovat.

Cyklické křivky a konchoidy se oproti kuželosečkám řadí pod kinematickou geometrii. Je však nutno podotknout, že cílem této práce není představovat základy kinematické geometrie, nýbrž souhrnně a přehledně sepsat konstrukce těchto vybraných křivek spolu s jejich důkazy. Samozřejmě se některým pojmům a vztahům z kinematické geometrie nemůžeme při výkladu kinematických křivek vyhnout, ovšem dané pojmy budeme vysvětlovat a používat pouze na základní úrovni nutné pro pochopení obsahu této práce.

Obecně tedy vždy nejprve zdefinujeme danou křivku, případně představíme její vlastnosti a sepíšeme postup její konstrukce. Následovat bude vždy důkaz, proč tato konstrukce skutečně vede k dané křivce.

Důležitou částí této práce budou také konstrukce v programu GeoGebra, kterými budeme doplňovat výklad jednotlivých konstrukcí.

Co se týče zdrojů, zřejmě nejcennějším zdrojem této práce budou učebnice deskriptivní geometrie od prof. RNDr. Aloise Urbana, který se v prvním díle věnuje mimo jiné právě kuželosečkám a zároveň poslední kapitolu druhého dílu věnoval kinematické geometrii

a kinematickým křivkám. Ostatní zdroje budou zřejmě tvořeny dalšími učebnicemi a texty z oblasti deskriptivní a kinematické geometrie.

Nyní už jen stručně ke struktuře práce. První kapitola bude věnována obecnému pojmu křivka a s ní úzce související křivosti. Druhá kapitola se bude věnovat kuželosečkám, jejich vlastnostem a zejména bodovým konstrukcím a již zmíněným konstrukcím pomocí hyperoskulačních kružnic. Ve třetí kapitole se budeme věnovat cyklickým křivkám a na konec, ve čtvrté kapitole, konchoidám, konkrétně konchoidě přímky a kružnice.

Kapitola 1

Křivky

Před tím, než se začneme zabývat jednotlivými vybranými křivkami, jejich konstrukcemi a důkazy, měli bychom se nejprve pozastavit nad samotným pojmem křivka a tím, co představuje.

Pro naše účely nám bude stačit, když si křivku představíme jako dráhu pohybujícího se bodu v rovině nebo v prostoru. Křivku ovšem můžeme získat také jako výsledek vzájemného průniku dvou ploch (například dvou válcových ploch) nebo při průniku plochy a roviny (například elipsa může vzniknout při průniku rotační válcové plochy a roviny, která prochází válcem a není kolmá na osu válce). Neméně důležité je ale také si uvědomit, že křivka může být chápána jako množina bodů, které odpovídají dané vlastnosti. [3, str. 125]

Křivky můžeme dělit do několika kategorií. Jedním ze základních dělení je rozdělení křivek na rovinné a prostorové, přičemž rovinnými křivkami nazýváme takové křivky, jejichž všechny body nalézájí jedné rovině. V opačném případě mluvíme o křivkách prostorových. Jako příklad rovinných křivek můžeme uvést kuželosečky, tedy kružnici, elipsu, parabolu či hyperbolu. Prostorovou křivkou je pak například šroubovice. [3, str. 125]

Nyní se pozastavme ještě nad tím, jak nejlépe konkrétní křivku popsat. Důležitý je v této souvislosti pojem empirická křivka. Jedná se o křivku, u které známe její tvar, respektive graf, ovšem nedokážeme takovouto křivku popsat žádnými matematickými vztahy [2, str. 7]. V této práci se však budeme zabývat pouze křivkami, které popsat lze a budeme k tomu využívat různé způsoby. Stejně jako se můžeme na pojem křivka dívat

z mnoha různých pohledů, můžeme ji také mnoha způsoby definovat. Vzhledem k tomu, že v dalším textu budeme často využívat parametrické rovnice, připomeňme, jak takovéto rovnice vypadají.

Máme-li pravouhlou souřadnicovou soustavu $\{O; x; y\}$, je rovinná křivka dána rovnicemi

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in I,$$

kde $x(t)$ a $y(t)$ jsou funkce proměnné t definované v intervalu I , které mají derivace všech řádů. Tyto rovnice nazýváme *parametrické rovnice* křivky, t nazýváme parametr. Tyto rovnice můžeme ale ještě upravit. Jestliže parametrické rovnice upravíme tak, abychom odstranili parametr t , získáme rovnici ve tvaru

$$f(x, y) = 0,$$

kteřou nazýváme *implicitní tvar* rovnice křivky. [2, str. 7-8]

Z těchto různých tvarů rovnice křivky budeme u jednotlivých křivek volit vždy ten pro naše potřeby nejvhodnější. Nebudeme však již rozebírat například jednoznačnost či existenci těchto různých tvarů pro jednotlivé křivky, jelikož tato problematika není tématem této práce.

S pojmem křivka se neodmyslitelně pojí také pojem křivost. Křivost lze vyjádřit číslem, které přiřazujeme ke konkrétnímu bodu křivky. Toto číslo popisuje chování křivky v daném bodě, respektive, přesněji řečeno, popisuje chování nekonečně malého oblouku křivky v okolí daného bodu.

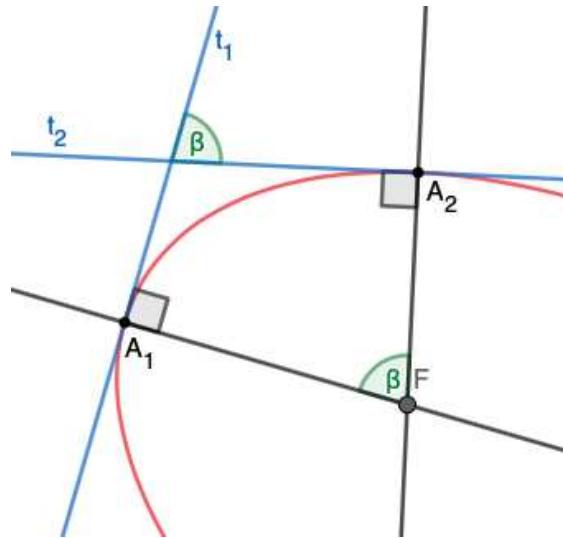
Křivost může nabývat stejných hodnot na celé délce křivky (například u kružnice), ovšem hodnota křivosti se také může v různých bodech křivky měnit. Jako příklad můžeme využít elipsu. Křivost elipsy se opakuje v jednotlivých kvadrantech elipsy, ovšem v jednom daném kvadrantu elipsy se její křivost neustále mění. [3, str. 126]

Později se v souvislosti s oskulačními kružnicemi budeme zabývat tzv. *středem křivosti* a *poloměrem křivosti*. Nyní se však ještě podívejme, jak obecně lze vyjádřit hodnotu křivosti křivky v libovolném jejím bodě.

Křivost křivky v jakémkoliv jejím bodě A_1 (obr. 1.1) je rovna limitě poměru úhlu mezi tečnami křivky v sousedních bodech A_1, A_2 a délkou oblouku A_1A_2 , jestliže bod A_2 jde k bodu A_1 . Hodnotu křivosti nejčastěji označujeme písmenem k a předchozí text lze zkráceně zapsat takto:

$$k = \lim_{A_2 \rightarrow A_1} \frac{\beta}{\widehat{A_1A_2}}.$$

[3, str. 128]



Obrázek 1.1: Křivost křivky

Podívejme se například, jak by se určila křivost kružnice. Kružnice má ve všech bodech stejnou křivost, a proto zvolme libovolné body A_1 a A_2 . Užijeme vzorec pro výpočet křivosti a získáme

$$k = \lim_{A_2 \rightarrow A_1} \frac{\beta}{\widehat{A_1A_2}} = \lim_{A_2 \rightarrow A_1} \frac{\beta}{\beta \cdot r} = \lim_{A_2 \rightarrow A_1} \frac{1}{r} = \frac{1}{r}.$$

Křivost kružnice je tedy rovna převrácené hodnotě jejího poloměru.

Později si pomocí konstrukce oskulačních kružnic odvodíme křivost i dalších křivek. Například hodnotu křivosti elipsy v jejích vrcholech.

Kapitola 2

Kuželosečky

Pojem kuželosečky je souhrnným názvem pro množinu rovinných křivek, obsahující elipsu, parabolu a hyperbolu. V některé literatuře se k těmto třem křivkám řadí ještě kružnice, my ovšem budeme s kružnicí pracovat pouze jako se speciálním případem elipsy. Název kuželosečky je odvozen ze skutečnosti, že tyto křivky vznikají při řezu rotační kuželové plochy rovinou [1, str. 31].

Kuželovou plochou rozumíme množinu všech přímek v prostoru, které procházejí daným bodem V a kružnicí k , která náleží do roviny neprocházející bodem V . Bod V nazýváme vrcholem kuželové plochy a kružnici k řídící kružnicí. Vrcholovou rovinou rozumíme rovinu, která prochází vrcholem V . Přímkou procházející vrcholem V a středem řídící kružnice k nazýváme osou kuželové plochy. Přímkou procházející vrcholem V a řídící kružnicí k nazýváme povrchové přímky, respektive površky [1, str. 83].

Rotační kuželová plocha se běžně definuje pomocí rotace přímky. Mějme dvě různoběžky v prostoru, které na sebe nejsou kolmé (jsou tedy vzájemně kosé). Jednu z těchto přímek si zvolíme jako osu otáčení (osu kuželové plochy) a druhou přímku kolem této osy necháme rotovat. Rotací této přímky kolem osy otáčení vzniká rotační kuželová plocha [1, str. 85].

Takovouto plochu můžeme proložit rovinou, přičemž průnikem těchto dvou objektů vznikne (za předpokladu, že se nejedná o vrcholovou rovinu) jedna ze zmíněných kuželoseček. Pokud by rovina procházela vrcholem V , mohly by nastat tři možnosti. Jestliže by takováto rovina protínala řídící kružnici ve dvou bodech, průnikem by byly dvě různoběžné přímky. Pokud by vrcholová rovina procházela jedním bodem řídící kružnice, výsledkem řezu by

byla povrchová přímka (površka) a danou rovinu bychom nazývali tečnou rovinou. A nakonec, pokud by rovina procházela pouze vrcholem V a neprotínala řídicí kružnici v žádném bodě, získali bychom pouze vrchol V [1, str. 84].

Předpokládejme tedy, že nanestane ani jeden z těchto speciálních případů. Pak můžeme rozlišit tři různé typy řezů. Jestliže bude rovina protínat všechny povrchové přímky, respektive nebude rovnoběžná s ani jednou povrchovou přímkou, výsledkem řezu bude elipsa. Speciálním případem je pak již zmíněná kružnice, která vznikne tehdy, když je daná rovina kolmá na osu kuželové plochy. V případě, že je rovina rovnoběžná s právě jednou povrchovou přímkou, vznikne parabola. A pokud je rovina řezu rovnoběžná se dvěma povrchovými přímkami, je výsledkem hyperbola, jejíž asymptoty mají stejný směr, jako dané povrchové přímky [4, str. 272].

V následujících kapitolách se na tyto jednotlivé kuželočky zaměříme. Zdefinujeme si je, zavedeme nejdůležitější pojmy, odvodíme jejich rovnice a ukážeme si některé jejich nejpoužívanější konstrukce.

2.1 Elipsa

2.1.1 Definice

Elipsa je množina všech bodů roviny, které mají od dvou pevných bodů stálý součet vzdáleností větší než vzdálenost pevných bodů.

Tato definice elipsy připouští splynutí daných pevných bodů a můžeme tedy díky této definici klasifikovat kružnici jako speciální případ elipsy. V některé literatuře se však tyto dva případy odlišují a do definice elipsy se přidává podmínka, aby dané pevné body byly různé. Dalším důležitým prvkem definice je podmínka, aby součet vzdáleností od daných bodů byl větší než vzdálenost těchto bodů. Pokud bychom tuto podmínku vynechali, připustili bychom, že součet vzdáleností může být buď stejný jako vzdálenost pevných bodů, čímž bychom získali úsečku, nebo dokonce menší než vzdálenost pevných bodů, čemuž by však žádné body roviny neodpovídaly a množina takovýchto bodů by byla prázdná [1, str. 31].

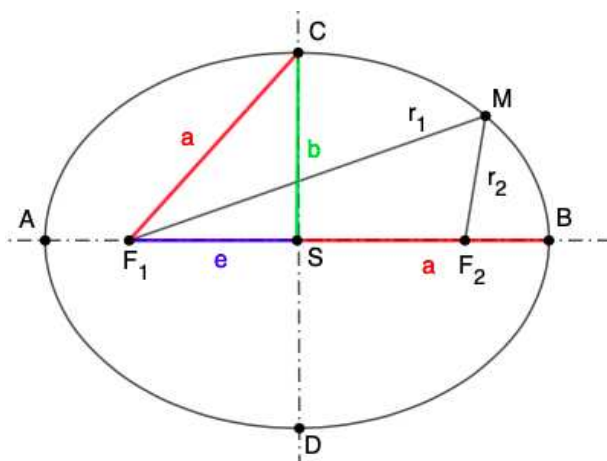
2.1.2 Základní pojmy a vlastnosti

Dané dva pevné body se nazývají *ohniska* a značí se obvykle F_1 a F_2 .¹ Vzdálenosti bodu elipsy od ohniska nazýváme *průvodiče* a značíme je r_1 a r_2 .²

Body A, B se nazývají *hlavní vrcholy* elipsy a body C, D *vedlejší vrcholy* elipsy. Přímka \overleftrightarrow{AB} se nazývá *hlavní osa* elipsy a přímka \overleftrightarrow{CD} *vedlejší osa* elipsy. Průsečík os se značí S a nazývá se *střed* elipsy.

Vzdálenost hlavních vrcholů od středu elipsy se nazývá *délka hlavní poloosy* a značí se písmenem a . Vzdálenost vedlejších vrcholů od středu elipsy nazýváme *délka vedlejší poloosy* a značí se písmenem b . Délka hlavní osy je tedy rovna číslu $2a$ a délka vedlejší osy $2b$ [5, str. 132].

Vzdálenost ohnisek od středu se značí písmenem e a nazývá se *excentricita* (neboli délková výstřednost). [1, str. 31] [4, str. 38]



Obrázek 2.1: Elipsa

Elipsa je vždy osově souměrná podle své hlavní a vedlejší osy. Z tohoto důvodu se tyto osy někdy označují jako osy souměrnosti. Dále je pak elipsa také středově souměrná podle svého středu (průsečíku os souměrnosti).

Z definice lze snadno nahlédnout, že součet průvodičů se rovná velikosti hlavní osy, tedy vzdálenosti hlavních vrcholů. Z toho dále plyne, že vzdálenost vedlejších vrcholů

¹Písmeno F je odvozeno od latinského slova *fokus* pro ohnisko.

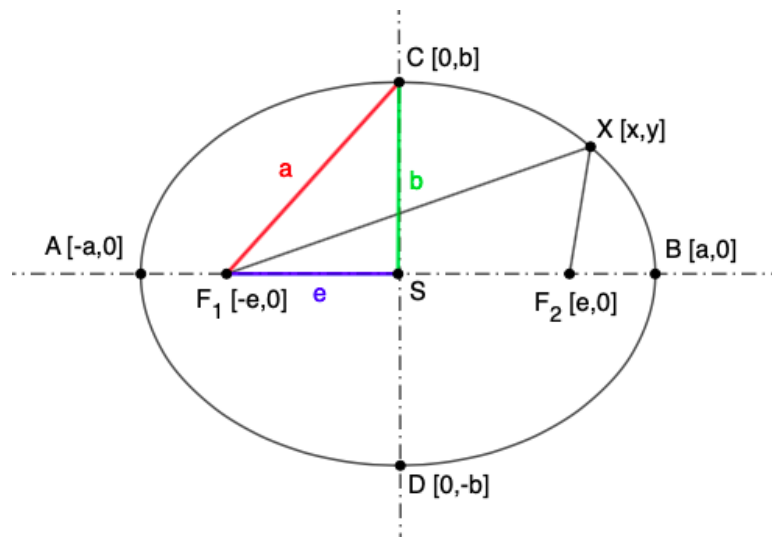
²Písmeno r je odvozeno od latinského slova *radius* pro průvodič.

a ohnisek se rovná číslu a . V elipse se nám tedy vytvoří pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsnami jsou excentricita e s poloosou b a přeponou je poloosa a . Tento trojúhelník se označuje jako *charakteristický trojúhelník* elipsy ($\triangle F_1SC$ na obr. 2.1).

Z pomoci Pythagorovy věty lze z daného trojúhelníku odvodit vztah $a^2 = b^2 + e^2$. Dále z něj také plyne, že $a > b$ a $a > e$. [1, str. 32]

2.1.3 Rovnice elipsy

Rovnici elipsy lze snadno odvodit z definice. Odvodíme si rovnici elipsy, jejíž střed umístíme do počátku soustavy souřadnic a jejími osami budou osy x a y . Hlavní body takovéto elipsy mají souřadnice, které vidíme na obr. 2.2.



Obrázek 2.2: Elipsa umístěná v počátku souřadnicové soustavy.

Z definice víme, že bod $X[x,y]$ bude bodem elipsy právě tehdy, pokud bude platit:

$$|XF_1| + |XF_2| = 2a.$$

Tuto rovnost si nejprve rozepíšeme pomocí vzorce pro výpočet vzdálenosti dvou bodů v rovině.

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a.$$

Nyní výraz umocníme na druhou a upravíme.

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a^2 - x^2 - y^2 - e^2.$$

Rovnici opět umocníme, abychom získali výraz bez odmocnin a opět upravíme.

$$x^2 \cdot (a^2 - e^2) + a^2 y^2 = a^2 \cdot (a^2 - e^2).$$

Z charakteristického trojúhelníku jsme si již odvodili vztah $a^2 = b^2 + e^2$. Můžeme tedy využít rovnosti $b^2 = a^2 - e^2$ a rovnici ještě dále upravit.

$$x^2 b^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

Poslední úpravou získáváme námi hledanou rovnici.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2.1.4 Provázková konstrukce elipsy

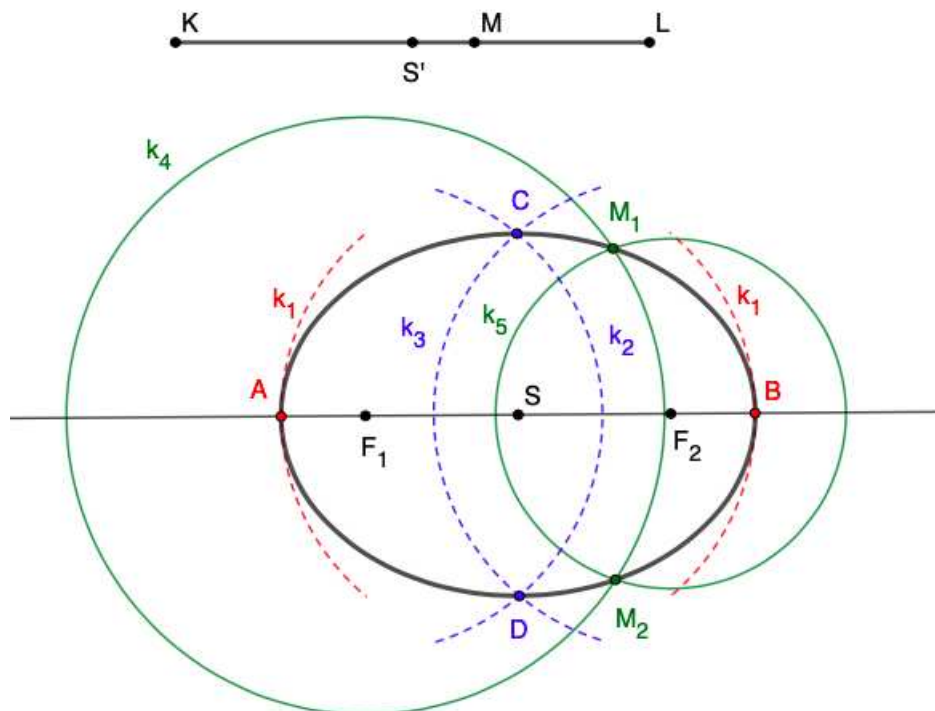
Provázková konstrukce elipsy, též známá jako zahradnická, vychází přímo z definice a je ryze praktická. Umístíme si dva pevné body (ohniska) a vezmeme si provázek, jehož délka bude větší než vzdálenost ohnisek. Konce provázku upevníme v ohniscích a pomocí tužky (kolíku) provázek napneme a začneme kroužit kolem ohnisek, čímž se nám vytvoří elipsa [4, str. 36].

2.1.5 Bodová konstrukce elipsy

V geometrické konstrukci samozřejmě nebudeme používat provázky a kolíky, ale zkonstruujeme elipsu díky podobné myšlence. Jen místo provázku použijeme úsečku. Tuto konstrukci elipsy využijeme v případě, že známe umístění ohnisek a součet průvodičů jejích bodů. Sestrojíme dostatečný počet bodů elipsy, abychom mohli (nejlépe pomocí křivítka) elipsu nakreslit.

Postup konstrukce: Obr. 2.3

1. Ohniska označíme F_1 a F_2 a součet průvodičů $2a$.
2. Sestrojíme úsečku KL , jejíž délka bude $2a$ a střed S úsečky F_1F_2 .
3. Hlavní vrcholy A, B najdeme jako průsečíky kružnice $k_1(S, \frac{1}{2}|KL|)$ a přímky F_1F_2 .
4. Vedlejší vrcholy C, D najdeme jako průsečíky kružnic $k_2(S, \frac{1}{2}|KL|)$ a $k_3(S, \frac{1}{2}|KL|)$.
5. Libovolný další bod elipsy najdeme tak, že si na úsečce KL zvolíme libovolný bod M a narýsujeme kružnice $k_4(F_1, |KM|)$ a $k_5(F_2, |ML|)$. Průsečíky těchto dvou kružnic jsou dva body (M_1, M_2) námi hledané elipsy.
6. Tímto postupem najdeme dostatek bodů elipsy tak, abychom mohli nakreslit plynulou křivku.



Obrázek 2.3: Konstrukce jednotlivých bodů elipsy (GeoGebra)

Důkaz. Dokažme si nyní, že takto zkonstruované body jsou skutečně body námi hledané elipsy s ohnisky F_1 a F_2 a součtem průvodičů $2a$.

Z konstrukce hlavních vrcholů plyne, že platí:

$$|F_1A| + |F_2A| = |F_1A| + |F_1B| = |AB| = |KL| = 2a,$$

$$|F_1B| + |F_2B| = |F_1B| + |F_1A| = |AB| = |KL| = 2a.$$

Body A, B jsou tedy body elipsy.

Z konstrukce vedlejších vrcholů plyne, že platí:

$$|F_1C| + |F_2C| = a + a = 2a,$$

$$|F_1D| + |F_2D| = a + a = 2a.$$

Body C, D jsou tedy body elipsy.

Zbývá dokázat, že i námi zkonstruovaný bod $M_1(M_2)$ má součet průvodičů $2a$. To je však opět zřejmé ihned z konstrukce:

$$|F_1M| + |F_2M| = |KM| + |ML| = |KL| = 2a.$$

□

Dvě poznámky na závěr této konstrukce. Pro správné použití konstrukce je nutné si ještě uvědomit, že bod M nemůžeme na úsečce KL volit zcela libovolně. V trojúhelníku F_1F_2M platí trojúhelníková nerovnost, z čehož plyne, že bod M musíme volit tak, aby (na úsečce AB) ležel mezi ohnisky elipsy. Pokud bychom na toto pravidlo nepamatovali, mohlo by se stát, že kružnice k_4 a k_5 by se nám neprotly v žádném bodě.

Nakonec se ještě pozastavme nad využitím této konstrukce v praxi. Pokud rýsuje v programu Geogebra, můžeme si konstrukci velice usnadnit animací bodu M po úsečce KL . Když budeme zaznamenávat stopu bodů M_1 a M_2 , vytvoří se nám přesná elipsa, kterou hledáme. Při klasickém rýsování se však konstrukce v této podobě příliš nepoužívá. Abychom dokázali nakreslit přesnou elipsu, potřebujeme k tomu dostatek bodů, což ovšem vyžaduje velký počet kroků a nakonec vede k nepřehlednosti celé konstrukce. Menší počet bodů by však na druhou stranu vedl k nepřesnosti výsledné elipsy. K tomu navíc elipsa

procházející velkým počtem bodů zkrátka není příliš „hezká“. Proto se tato konstrukce nejčastěji spíše kombinuje s konstrukcí oskulačních, resp. hyperoskulačních, kružnic, kterou si ukážeme později [1, str. 31-32] [4, str. 36-37].

2.1.6 Trojúhelníková konstrukce elipsy

Trojúhelníkovou konstrukci využijeme tehdy, když známe střed elipsy a její hlavní a vedlejší vrcholy. Cíl konstrukce je podobný jako u předchozí, tedy narýsovat dostatečné množství bodů elipsy, abychom mohli dokreslit plynulou křivku, procházející těmito body. Předpokládejme tedy, že známe polohu středu S , hlavního vrcholu A a vedlejšího vrcholu C . Pro účely důkazu si zadání rovnou umístíme do soustavy souřadnic tak, aby byl střed elipsy v počátku a osy elipsy splývaly s osami soustavy souřadnic. Nalézt vrcholy B a D je vzhledem k symetrii elipsy podle jejích os snadné. Ostatní body najdeme pomocí následujícího postupu.

Postup konstrukce: Obr. 2.4

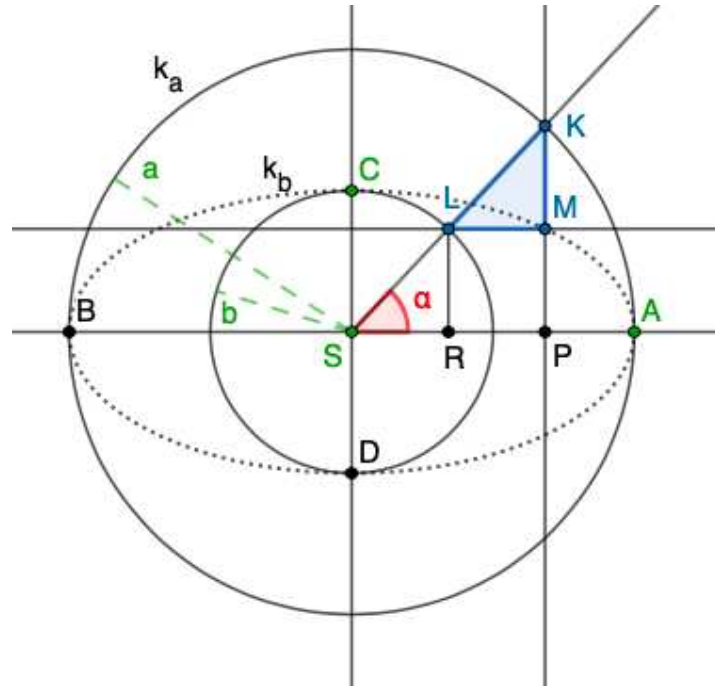
1. Nejprve sestrojíme kružnice $k_a(S, |SA| = a)$ a $k_b(S, |SC| = b)$.
2. Na kružnici k_a si zvolíme libovolný bod K a nalezneme bod L , ležící na průniku úsečky SK a kružnice k_b .
3. Bodem K vedeme rovnoběžku s osou y a bodem L vedeme rovnoběžku s osou x .
4. Náš hledaný bod elipsy M leží na průniku těchto přímk, a tedy platí $ML \parallel SA$ a $MK \parallel SC$.

Důkaz. Dokažme si nyní, že takto zkonstruovaný bod M je bodem elipsy, jejíž poloosy mají délky a a b .

Nejprve si označme úhel $\alpha = \sphericalangle ASK$.

Odvodíme si souřadnice bodu M . Označme je takto:

$$M [x_M, y_M].$$



Obrázek 2.4: Trojúhelníková konstrukce elipsy (GeoGebra)

Z trojúhelníku SPK s pravým úhlem u vrcholu P můžeme odvodit souřadnici x_M . Souřadnici y_M odvodíme z pravoúhlého trojúhelníku SRL s pravým úhlem u vrcholu R .

$$\cos \alpha = \frac{|SP|}{|SK|} = \frac{x_M}{a}$$

$$\sin \alpha = \frac{|LR|}{|SL|} = \frac{y_M}{b}$$

Nyní tyto dvě rovnice umocníme a sečteme. Získáme:

$$\frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha,$$

$$\frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1.$$

Tím jsme dokázali, že bod M je bodem námi hledané elipsy. □

Na závěr opět poznámka. Obecně lze říci, že je tato konstrukce přesnější oproti předchozí³, jelikož pracuje pouze s rovnoběžnými a kolmými přímkami. I v této konstrukci se však

³Samozřejmě za předpokladu, že nepracujeme například v programu Geogebra, kde se nemusíme potýkat s rizikem nepřesného rýsování, způsobeného lidskou chybou.

při velkém počtu kroků dá časem ztratit a proto ani ona není samostatně příliš vhodná pro konstrukci elipsy. Opět však můžeme tuto konstrukci doplnit konstrukcí oskulačních kružnic a tím snížit nároky na počet bodů, které je nutno takto zkonstruovat, abychom odhalili dráhu námi hledané křivky [7, str. 42-43].

2.1.7 Konstrukce elipsy pomocí oskulačních kružnic

Již v první kapitole jsme poprvé užili pojem „oskulační kružnice“. Nyní si tedy pojdme podrobněji vyložit, o co se vlastně jedná a k čemu tyto kružnice slouží.

Tyto kružnice jsou velice praktickým nástrojem pro rýsování elipsy. Můžeme jimi napodobit průběh elipsy v libovolném jejím bodě. Pokud tyto oskulační kružnice konstruujeme ve vrcholech elipsy, nazýváme je hyperoskulační kružnice.

Jedná se o kružnice, které mají v daném bodě podobné zakřivení, jako námi hledaná křivka. Nejedná se však o libovolnou kružnici napodobující chování křivky, ale o kružnici, která nahrazuje křivku v daném bodě ze všech kružnic nejlépe. Oskulační kružnice se často popisuje jako kružnice, která má s danou křivkou společnou dvojnásobnou tečnu. Blíže se touto myšlenkou budeme zabývat v důkazu.

Středů oskulačních kružnic nazýváme středy křivosti a poloměry oskulačních kružnic nazýváme poloměry křivosti. Již jsme si v předchozí kapitole vyložili pojem křivost a jeho výpočet. Připomeňme, že křivost křivky lze vypočítat pomocí vzorce

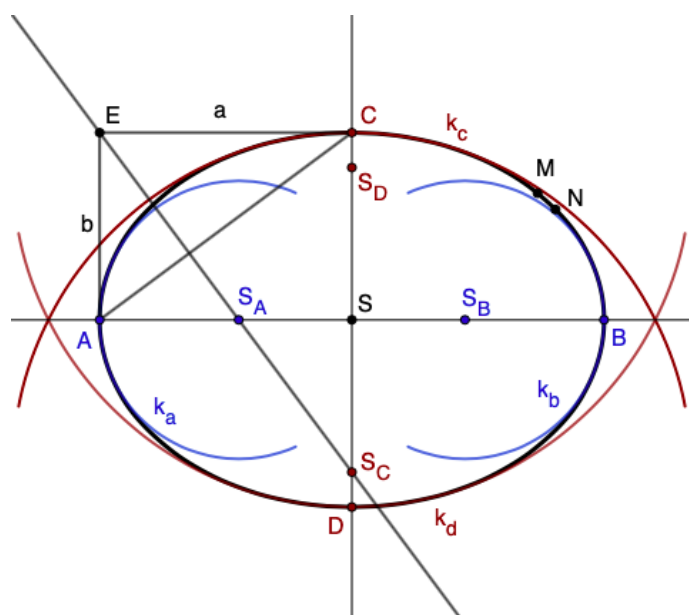
$$k = \lim_{A_2 \rightarrow A_1} \frac{\beta}{\widehat{A_1 A_2}}.$$

Pokud vezmeme do úvahy tento vztah a definici oskulačních kružnic, dojdeme snadno k závěru, že křivost křivky v daném bodě se rovná převrácené hodnotě poloměru oskulační kružnice, která křivku v daném bodě nahrazuje.

Pojďme si nyní vyložit, jak se tyto oskulační kružnice konstruují, konkrétně provedeme konstrukci hyperoskulačních kružnic, které se využívají při konstrukci elipsy nejčastěji. Následně si pak dokážeme, že takto zvolené kružnice skutečně napodobují elipsu ve vrcholech.

Postup konstrukce: Obr. 2.5

1. Střed elipsy označíme S , hlavní vrcholy A, B a vedlejší vrcholy C, D .
2. Sestrojíme obdélník $ASCE$ a jeho úhlopříčku AC .
3. Vedeme kolmici bodem E na úsečku AC . V místech, kde se tato kolmice protne s osami elipsy leží středy oskulačních kružnic (S_A, S_C). Další dva středy (S_B, S_D) nalezneme buď obdobnou konstrukcí nebo pomocí symetrie elipsy podle jejích os.
4. Výsledné kružnice mají střed v nalezených bodech a procházejí příslušným vrcholem elipsy.



Obrázek 2.5: Konstrukce pomocí oskulačních kružnic (GeoGebra)

Oskulační kružnice na sebe nenasazují a proto se konstrukce často ještě doplňuje konstrukcí několika samostatných bodů, na obr. 2.5 se konkrétně jedná o body M a N . Výslednou elipsu následně konstruujeme pomocí křivítka tak, aby procházela nalezenými body a dotýkala se oskulačních kružnic [5, str. 132-133].

Důkaz. Nejprve si uvědomme, že každá kružnice, která se dotýká elipsy například v jejím vrcholu, ji přibližně v okolí tohoto vrcholu nahrazuje. My ovšem hledáme kružnici, která

elipsu v jejím vrcholu nahrazuje ze všech nejlépe. Užijeme k tomu následující úvahu.

Položme si elipsu do soustavy souřadnic tak, aby její střed byl v počátku a osami elipsy byly osy x a y . Pak každá kružnice k_0 , která se dotýká elipsy v bodě A má střed $S_0 [x_0, 0]$ (různý od vrcholu A) a její rovnici můžeme zapsat ve tvaru

$$(x - x_0)^2 + y^2 = (a + x_0)^2.$$

Množinu bodů, které leží na kružnici k_0 i elipse najdeme pomocí řešení soustavy těchto dvou rovnic:

$$(x - x_0)^2 + y^2 = (a + x_0)^2,$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

První rovnici vynásobíme číslem $-a^2$, sečteme ji s druhou rovnicí a převedeme vše na levou stranu.

$$-a^2(x - x_0)^2 + b^2x^2 + a^2(a + x_0)^2 - a^2b^2 = 0.$$

Umocníme a roznásobíme závorky, vytkneme b^2 a a^2 a výraz upravíme.

$$b^2(x^2 - a^2) + a^2(a^2 - x^2 + 2x_0(x + a)) = 0.$$

Vytknutím výrazu $(x + a)$ nakonec získáme

$$(x + a) \cdot (b^2 \cdot (x - a) + a^2 \cdot (a + 2x_0 - x)) = 0.$$

Společné body kružnice k_0 a elipsy tedy leží na dvou přímkách. Jednou z nich je

$$x + a = 0,$$

což znamená, že kružnice k_0 se skutečně dotýká elipsy v bodě A .

Druhou přímkou je

$$\left[b^2 \cdot (x - a) + a^2 \cdot (a + 2x_0 - x) \right] = 0. \quad (2.1)$$

Abychom získali kružnici, která bude elipsu v bodě A nahrazovat ze všech nejlépe, musí také všechny ostatní průsečíky kružnice k_0 a elipsy splývat s bodem A , což znamená, že i druhá přímka musí odpovídat rovnici $x + a = 0$. Toho můžeme ovšem docílit vhodným

dosazením do 2.1 za x_0 .

Nyní se tedy na chvíli pozastavme a odvoďme si souřadnici středu S_A , který jsme našli pomocí výše popsané konstrukce. Z podobnosti $\triangle AS_A E$ a $\triangle SCA$ plyne, že platí

$$\frac{|AS_A|}{|AE|} = \frac{|SC|}{|AS|}.$$

Po úpravě dostáváme

$$|AS_A| = \frac{b^2}{a},$$

a umístění bodu S_A na ose x určíme následovně:

$$-a + \frac{b^2}{a} = \frac{b^2 - a^2}{a} = -\frac{e^2}{a}.$$

Oskulační kružnice k_a má tedy střed v bodě $S_A \left[-\frac{e^2}{a}, 0 \right]$ a poloměr $\frac{b^2}{a}$.

Dosaďme tedy $x_0 = -\frac{e^2}{a}$ do 2.1. Rovnici pak upravíme a dostáváme

$$b^2x + ab^2 - a^3 - a^2x = 0.$$

Dále můžeme ještě vytknout výraz $(x + a)$ a celou rovnici vydělit číslem $(b^2 - a^2)$, čímž získáme rovnici

$$x + a = 0.$$

Tímto jsme dokázali, že námi sestavená kružnice k_a skutečně nahrazuje elipsu v jejím vrcholu A , a to lépe, než kterákoliv jiná kružnice. Je tedy oskulační kružnicí elipsy ve vrcholu A .

Z toho zároveň plyne, že křivost elipsy ve vrcholu A je rovna $\frac{a}{b^2}$.

Obdobně bychom vedli důkaz i pro kružnici k_c [1, str. 38]. □

2.2 Hyperbola

2.2.1 Definice

Hyperbola je množina všech bodů, které mají od dvou pevných různých bodů stálý kladný rozdíl vzdáleností, který je menší než vzdálenost daných pevných bodů.

Definice hyperboly je velice podobná definici elipsy a stejně tak se budeme setkávat s mnoha pojmy a vztahy, které jsme si zavedli již u elipsy. Pevné body například také značíme F_1 a F_2 a nazýváme je ohniska. Nyní se podrobněji zaměříme na definici hyperboly.

Kdybychom nepožadovali, aby byl rozdíl vzdáleností kladný, připouštěli bychom, že může být i nulový, čímž bychom však získali osu souměrnosti úsečky F_1F_2 . U definice elipsy jsme připustili, aby mohly ohniska splynout v jeden bod, čímž jsme získali kružnici. V tomto případě bychom však tímto krokem pouze připustili, že stálý rozdíl vzdáleností může být nulový, přičemž v takovém případě by definici odpovídaly všechny body roviny. Jako poslední upozorníme na to, že požadujeme, aby body měly vzdálenosti „menší než“. Kdybychom tuto podmínku vynechali, připustili bychom možnost, že rozdíl vzdáleností může být roven vzdálenosti F_1F_2 . V takovém případě bychom však získali přímku F_1F_2 , ze které bychom vyjmuli body úsečky F_1F_2 [1, str. 40].

2.2.2 Základní pojmy a vlastnosti

Jak jsme již řekli, dané dva pevné body z definice se nazývají *ohniska* a značí se F_1 a F_2 . Obdobně se od elipsy přenáší také pojem *průvodič*, kterým označujeme vzdálenost bodu hyperboly od jednoho z ohnisek.

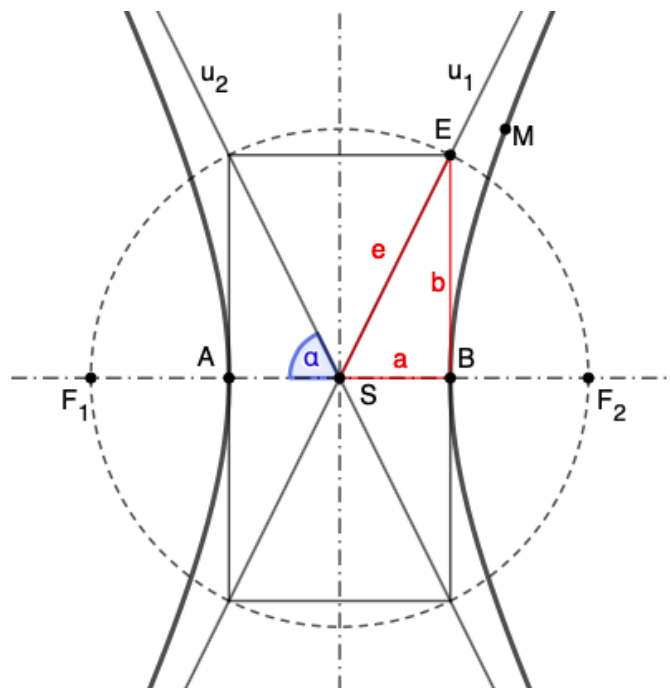
Body A, B nazýváme *vrcholy* hyperboly. Přímka F_1F_2 se označuje jako *hlavní osa* hyperboly, osa souměrnosti úsečky F_1F_2 jako *vedlejší osa*. Průsečík obou os nazýváme *středem* hyperboly a značíme S .

Vzdálenost vrcholů hyperboly od jejího středu nazýváme *délka hlavní poloosy*, vzdálenost vrcholů AB pak *délka hlavní osy* a používáme zavedené značení $|AB| = 2a$.

Absolutní hodnota rozdílu průvodičů libovolného bodu hyperboly se musí rovnat velikosti hlavní osy, tedy $|F_1M - F_2M| = 2a$.

Vzdálenost ohnisek od středu hyperboly nazýváme *excentricita* a značíme e .

Délku vedlejší osy nemůžeme vyjádřit tak snadno jako u elipsy, jelikož hyperbola nemá se svou vedlejší osou žádný společný bod (vedlejší osa je množina bodů, které mají nulový rozdíl vzdáleností od ohnisek). Můžeme ji však vyjádřit hodnotami a a e pomocí pravoúhlého trojúhelníku SBE (viz obr. 2.6). Pak je tedy $b = \sqrt{e^2 - a^2}$. Trojúhelník SBE nazýváme *charakteristický trojúhelník* hyperboly.



Obrázek 2.6: Hyperbola

Hyperbola je osově souměrná podle svých os a středově souměrná podle jejich průsečíku (středu hyperboly).

Podle definice lze rozdělit body do dvou skupin. Pro jednu bude platit rovnost $|F_1M| - |F_2M| = 2a$ a pro druhou rovnost $|F_2M| - |F_1M| = 2a$. Je zřejmé, že pro žádný bod hyperboly nebudou platit obě tyto rovnosti současně a proto hyperbolu tvoří dvě tzv. *větvě hyperboly*, které se v žádném bodě neprotínají.

Dvě přímky u_1 a u_2 , k nimž se větve hyperboly neomezeně blíží se nazývají *asymptoty* hyperboly. Tyto přímky procházejí středem hyperboly S a s hlavní osou hyperboly svírají úhel α , pro který platí $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$. Tento vztah lze snadno odvodit z charakteristického trojúhelníku. Hyperbolu nazveme rovnoosou, jestliže její asymptoty budou svírat pravý úhel, což nastane právě tehdy, když bude platit $a = b$ [1, str. 40-41] [4, str. 56-58].

2.2.3 Rovnice hyperboly

Rovnici hyperboly lze opět snadno odvodit z definice. Odvodíme si rovnici hyperboly, jejíž střed umístíme do počátku soustavy souřadnic a jejími osami budou osy x a y . Hlavní

body takovéto hyperboly mají souřadnice, které vidíme na obr. 2.7.

Z definice víme, že bod $M[x, y]$ bude bodem hyperboly právě tehdy, když

$$||MF_1| - |MF_2|| = 2a.$$

Tuto rovnost si nejprve rozepíšeme pomocí vzorce pro výpočet vzdálenosti dvou bodů v rovině.

$$\left| \sqrt{(x-e)^2 + y^2} - \sqrt{(x+e)^2 + y^2} \right| = 2a.$$

Výraz stejně jako u elipsy dvakrát umocníme a upravíme.

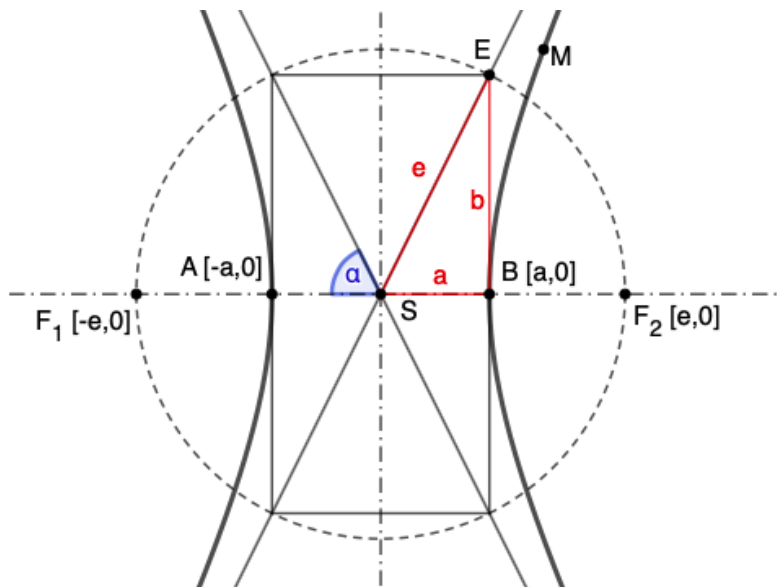
$$x^2 \cdot (e^2 - a^2) - y^2 a^2 = a^2 \cdot (e^2 - a^2).$$

Z charakteristického trojúhelníku jsme si již odvodili vztah $b^2 = e^2 - a^2$. Můžeme tedy využít tuto rovnost a rovnici ještě dále upravit.

$$x^2 b^2 - y^2 a^2 = a^2 b^2$$

Poslední úpravou získáváme námi hledanou rovnici.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Obrázek 2.7: Hyperbola umístěná v počátku souřadnicové soustavy.

2.2.4 Bodová konstrukce hyperboly

Tuto konstrukci použijeme v případě, kdy známe ohniska hyperboly a stálý rozdíl průvodičů jejích bodů. Nicméně stejně jako u elipsy se tato konstrukce samostatně příliš nepoužívá a většinou slouží jen jako pomocná konstrukce při konstrukci pomocí oskulačních kružnic. Dále je také vhodné si při jakékoliv konstrukci elipsy pomoci konstrukcí asymptot. Nyní si však vyložíme, jak tedy zkonstruovat jednotlivé body.

Postup konstrukce: Obr. 2.8

1. Ohniska označíme F_1 a F_2 a stálý rozdíl průvodičů $2a$.
2. Sestrojíme úsečku KL , $|KL| = 2a$ a střed S úsečky F_1F_2 .
3. Vrcholy hyperboly A, B nalezneme jako průsečíky kružnice $k_1(S, \frac{1}{2}|KL|)$ a přímky F_1F_2 .
4. Na přímce F_1F_2 si zvolíme bod R tak, aby ležel mimo úsečku F_1F_2 .
5. Další body hyperboly (M_1, M_2, M_3, M_4) nalezneme jako průsečíky dvou kružnic, které volíme následujícím způsobem: Jedna kružnice bude mít střed v ohnisku F_1 , druhá v ohnisku F_2 . Jedna z těchto kružnic bude mít poloměr $|AR|$, druhá $|BR|$. Kombinacemi těchto parametrů můžeme pro jeden bod R nalézt 4 body hyperboly, které budou souměrné podle os hyperboly a jejího středu.

Důkaz. Nyní si dokažme, že takto zkonstruované body skutečně odpovídají námi hledané hyperbole s ohnisky F_1 a F_2 a rozdílem průvodičů $2a$.

Pro body A, B platí:

$$||F_2A| - |F_1A|| = |AB| = |KL| = 2a,$$

$$||F_1B| - |F_2B|| = |AB| = |KL| = 2a.$$

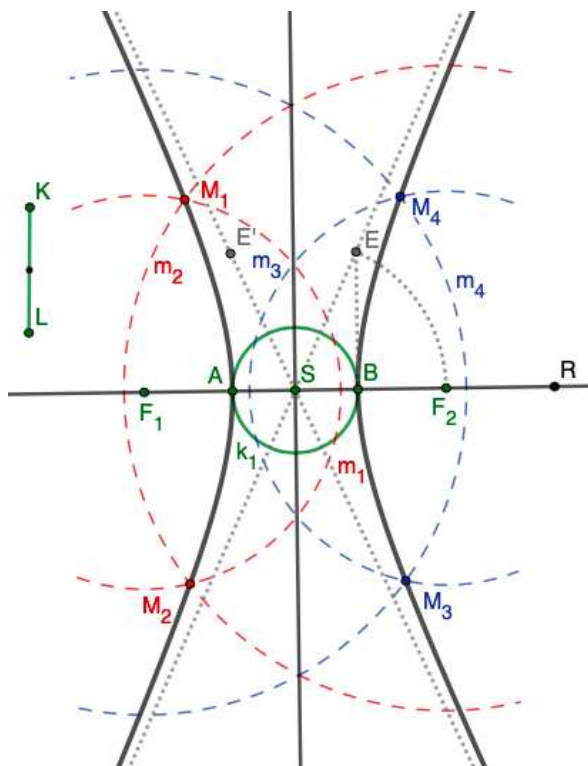
Body A, B tedy splňují definici hyperboly.

Zvolme si teď jeden konkrétní bod M_1 , který leží na průniku kružnic $m_1(F_1, |BR|)$

a $m_2(F_2, |AR|)$. Pro něj platí:

$$||F_1M_1| - |F_2M_1|| = ||BR| - |AR|| = |AB| = |KL| = 2a,$$

z čehož plyne, že bod M_1 také splňuje definici hyperboly. □



Obrázek 2.8: Bodová konstrukce hyperboly (GeoGebra)

Jak jsme již předeslali, konstrukci lze doplnit o asymptoty, které lze snadno zkonstruovat pomocí charakteristického trojúhelníku.

Ještě se ale pozastavme nad tím, proč je nutné, aby bod R , volený na přímce F_1F_2 , ležel mimo úsečku F_1F_2 . V trojúhelníku $F_1F_2M_1$ platí trojúhelníková nerovnost, a tedy platí

$$|r_1 - r_2| \leq |F_1F_2| \leq r_1 + r_2.$$

Pokud bychom tuto nerovnost porušili zvolením bodu R na úsečce F_1F_2 , dané kružnice se středy F_1, F_2 a poloměry $|AR|, |BR|$ by se nám neprotly v žádném bodě. Pokud nastane rovnost (v případě, že bod R zvolíme přímo v ohnisku hyperboly), hledané kružnice se protnou pouze v jednom bodě, a to právě ve vrcholu hyperboly [1, str. 40-41]. [4, str. 56]

2.2.5 Konstrukce hyperboly pomocí oskulačních kružnic

Co jsou oskulační kružnice a k čemu slouží jsme si již vyložili u elipsy. Proto u hyperboly již uvedeme pouze konstrukci a stručnější důkaz. Rozdíl oproti elipse je zejména v počtu hyperoskulačních kružnic, které konstruuujeme. Zatímco u elipsy jsme hledali čtyři tyto kružnice, u hyperboly hledáme pouze dvě. Tyto dvě jsou však ještě navíc osově souměrné, takže hledáme pouze jeden střed jedné z těchto kružnic, a to následujícím způsobem:

Postup konstrukce: Obr. 2.9

1. Předpokládejme, že známe polohu ohnisek F_1 a F_2 , rozdíl průvodičů $2a$, a tedy také vrcholy elipsy A, B .
2. Sestrojíme charakteristický trojúhelník ASE . Bod E najdeme jako průsečík kružnice $k_e(S, |SF_1|)$ a kolmice k , vztyčené ve vrcholu A na přímkou F_1F_2 .
3. Na přímce SE vztyčíme kolmici l v bodě E .
4. V místě, kde se kolmice l protne s hlavní osou (přímkou F_1F_2) leží střed S_1 hyperoskulační kružnice k_1 , která nahrazuje hyperbolu ve vrcholu A .
5. Analogickým postupem nebo s využitím symetrie podle osy y najdeme druhou kružnici k_2 se středem S_2 .

Důkaz. Položme hyperbolu do soustavy souřadnic tak, aby její střed ležel v počátku a osami hyperboly byly osy soustavy souřadnic x a y .

Obdobnou úvahou jako u elipsy dojdeme k soustavě dvou rovnic

$$(x - x_0)^2 + y^2 = (a + x_0)^2,$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

První rovnici vynásobíme číslem a^2 a po všech úpravách získáme

$$(x + a) \cdot [b^2(x - a) + a^2 \cdot (x - 2x_0 - a)] = 0.$$

Po úpravách dostáváme

$$b^2x + ab^2 + a^2x + a^3 = 0.$$

Vytkneme výraz $(x + a)$ a celou rovnici vydělíme číslem $(a^2 + b^2)$. Získali jsme

$$x + a = 0,$$

čímž je důkaz pro kružnici k_1 dokončen a k_1 skutečně je oskulační kružnicí.

Dokázali jsme tedy zároveň, že křivost hyperboly v jejích vrcholech je rovna $\frac{a}{b^2}$.

Pro kružnici k_2 bychom vedli důkaz zcela obdobně. □

2.3 Parabola

2.3.1 Definice

Parabola je množina všech bodů, které mají od pevného bodu a pevné přímky, která tímto bodem neprochází, stejné vzdálenosti.

Pokud bychom z definice vypustili podmínku, aby daná přímka neprocházela pevným bodem, připustili bychom, že parabolou může být také kolmice na danou přímku vedená pevným bodem. [1, str. 45]

2.3.2 Základní pojmy a vlastnosti

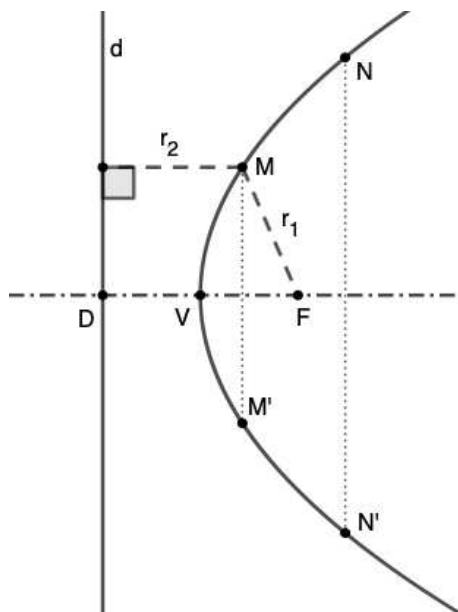
Pevnou přímku z definice nazýváme *řídící přímka* a značíme ji písmenem d . Pevný bod z definice nazýváme *ohnisko* a značíme F .

Vzdálenost ohniska F od řídící přímky d nazýváme *parametr* a značíme p .

Průvodiče r_1 a r_2 jsou vzdálenosti bodu od ohniska a od řídící přímky. Jeden průvodič je tedy spojnice bodu a ohniska a druhý průvodič je spojnice bodu a paty kolmice, vedené daným bodem k řídící přímce.

Parabola je osově souměrná podle kolmice vedené ohniskem k řídící přímce. Tato osa souměrnosti se nazývá také *osa* paraboly a značí se písmenem o .

Průsečík paraboly a její osy nazýváme *vrchol* paraboly V [1, str. 45].



Obrázek 2.10: Parabola

2.3.3 Rovnice paraboly

Opět odvodíme rovnici pouze pro speciální případ, kdy si parabolu vhodně položíme do soustavy souřadnic. Nechť osa paraboly splývá s osou x soustavy souřadnic, vrchol paraboly leží v počátku a kladná poloosa x prochází ohniskem. Z ostatních vlastností elipsy pak můžeme odvodit souřadnice dalších bodů (viz obr. 2.11).

Z definice víme, že bod $M [x, y]$ bude bodem paraboly právě tehdy, když

$$|MF| = |Md|.$$

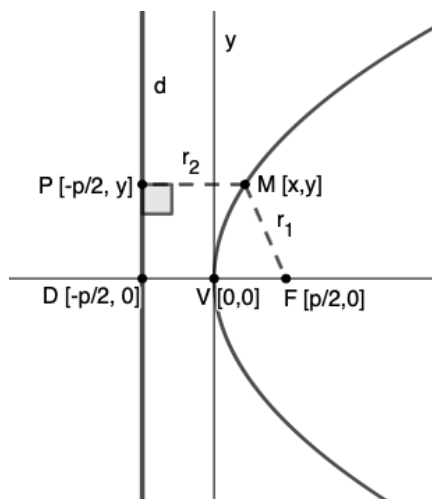
Tuto rovnost si můžeme přepsat na $|MF| = |MP|$ a použít vzorec pro vzdálenost dvou bodů.

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

Po umocnění a úpravě získáme

$$y^2 = 2px,$$

což je rovnice námi zvolené paraboly.



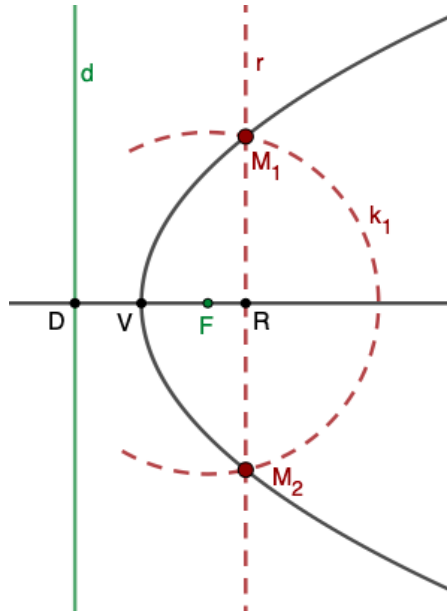
Obrázek 2.11: Odvození rovnice paraboly

2.3.4 Bodová konstrukce paraboly

Stejně jako u předcházejících kuželoseček si nejprve ukážeme, jak sestavit jednotlivé samostatné body paraboly, jestliže známe ohnisko a řídící přímku. Opět však platí, že při konstrukci paraboly je vhodnější zvolit kombinaci této konstrukce s konstrukcí hyperoskulační kružnice.

Postup konstrukce: Obr. 2.12

1. Ohnisko označíme F a řídící přímku d . Z bodu F vedeme kolmici na přímku d a průsečík této kolmice a řídící přímky označíme D .
2. Vrchol V sestojíme jako střed úsečky FD .
3. Na polopřímce VF libovolně zvolíme bod R a vedeme jím kolmici r na přímku FD .
4. Libovolný další bod elipsy nalezneme jako průsečík přímky r a kružnice $k_1(F, |DR|)$.



Obrázek 2.12: Bodová konstrukce paraboly (GeoGebra)

Důkaz. Dokažme, že takto zkonstruované body splňují definici paraboly.

Vrchol V je středem úsečky DF , a tedy platí $|VF| = |Vd|$ a V je bodem paraboly s ohniskem F a řídicí přímkou d .

Body M_1 a M_2 leží na rovnoběžce s přímkou d a kružnici se středem F . Z těchto konstrukcí plynou rovnosti

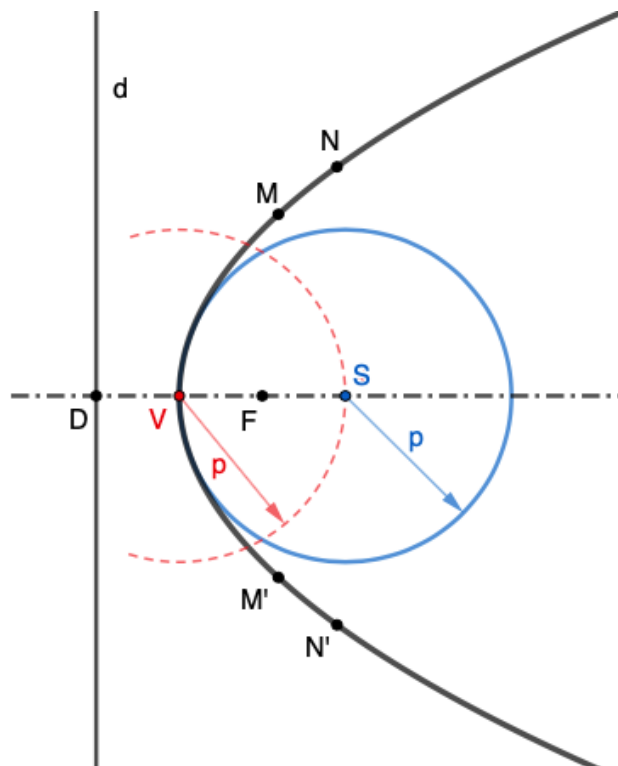
$$|rd| = |M_1d| = |M_2d| = |RD| = |FM_1| = |FM_2|$$

a body M_1, M_2 jsou tedy body hyperboly. □

2.3.5 Konstrukce paraboly pomocí oskulační kružnice

U paraboly lze sestavit celkem jednu hyperoskulační kružnici, a to ve vrcholu V . Její konstrukci nebudeme rozebírat nijak do podrobnosti, jelikož je velice prostá. Střed této oskulační kružnice leží na polopřímce VF a jejím poloměrem je parametr paraboly p , tedy vzdálenost ohniska od řídicí přímky. [1, str. 44]

Důkaz. Užijeme stejnou polohu paraboly, jako při odvozování její rovnice, tedy stejnou jako na obr. 2.11.



Obrázek 2.13: Konstrukce paraboly pomocí oskulační kružnice (GeoGebra)

Stejnou úvahou jako u předcházejících kuželoseček dojdeme k soustavě dvou rovnic.

$$(x - x_0)^2 + y^2 = x_0^2,$$

$$y^2 = 2px.$$

Rovnice od sebe odečteme a upravíme na

$$x \cdot (x - 2x_0 + 2p) = 0.$$

Námi sestavená kružnice má poloměr p a jelikož předpokládáme, že vrchol V leží v počátku soustavy souřadnic, střed kružnice S má souřadnice $[p, 0]$. Pokud dosadíme $x_0 = p$ do rovnice

$$(x - 2x_0 + 2p) = 0,$$

získáme $x = 0$, čímž jsme dokázali, že kružnice $k(S, p)$ je oskulační kružnicí paraboly ve vrcholu V a křivost paraboly v jejím vrcholu je rovna $\frac{1}{p}$. \square

Kapitola 3

Cyklické křivky

Než se začneme věnovat konkrétně cyklickým křivkám, zavedeme si nejprve několik pojmů z kinematické geometrie, které budeme v následujícím textu používat.

Cyklické a další kinematické křivky se vždy definují pomocí pohybu, který budeme popisovat pomocí *pevné a hybné polodie*. Jak názvy již napovídají, pevná polodie bude vždy upevněný (nepohyblivý) objekt v rovině a hybná polodie pohybující se objekt v rovině. Pro samotný pohyb pak budeme často užívat pojem *valení*, respektive *kotálení*.

Dalším pojmem, který se pak může v následujícím textu objevit je *vratný pohyb*. Vratný pohyb vznikne z daného pohybu tak, že zaměníme role polodií, tedy pevná polodie se stane hybnou a naopak [2, str. 237, 240].

V učebnicích deskriptivní nebo kinematické geometrie bychom našli mnohem podrobnější rozbor těchto a mnoha dalších pojmů, nám však pro potřeby dalšího výkladu postačí tento spíše intuitivní přístup.

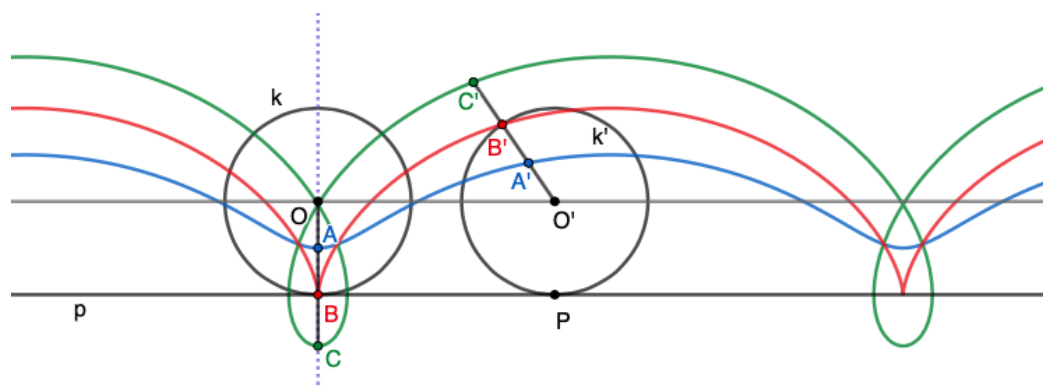
Nyní tedy již konkrétně k cyklickým křivkám. Jedná se o křivky, které vznikají tzv. cyklickými pohyby, což jsou pohyby, při kterých jsou jednotlivé polodie buď kružnice nebo přímka (ovšem ne současně obě přímky). Samotná křivka pak při tomto pohybu vzniká jako trajektorie zvoleného bodu.

Cyklické pohyby (křivky) lze rozdělit do pěti základních kategorií na cykloidální, epicykloidální, hypocykloidální, pericykloidální a evolventní. V následujících podkapitolách se těmito jednotlivým pohybům (křivkám) budeme věnovat každému zvlášť [2, str. 247-250].

3.1 Cykloida

Cykloidy vznikají při kotálení kružnice po přímce. Tento pohyb se nazývá cykloidální, pevnou polodii zde představuje přímka p , hybnou polodii je kružnice k . Body, které opisují cykloidy jsou pevně spojeny s hybnou polodii, v tomto případě s kružnicí k .

Na obr. 3.1 vidíme, že pomocí tohoto pohybu mohou vzniknout tři různé tvary cykloidy. Bod A , vnitřní bod kružnice k ($A \neq O$), opisuje křivku, kterou nazýváme *zkrácená cykloida*. Bod B , bod náležící kružnici k , opisuje *prostou cykloidu* a bod C , ležící vně kružnice k , opisuje *prodlouženou cykloidu*. Speciálním případem je pak ještě bod O , střed kotálející se kružnice, jelikož jeho trajektorii je přímka rovnoběžná s pevnou přímkou p .



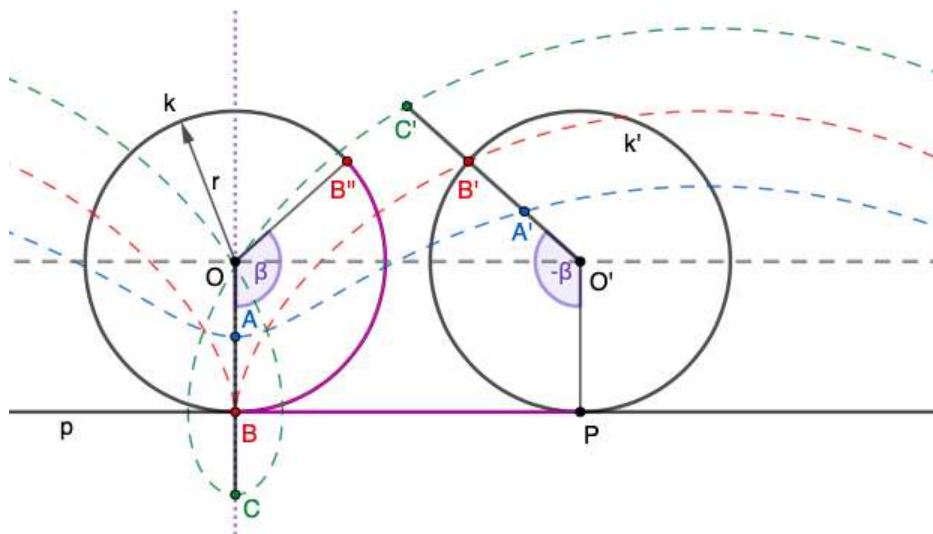
Obrázek 3.1: Typy cykloidy

Cykloidu můžeme také popsat parametrickými rovnicemi. Položme si přímku p a kružnici k do pravouhlé soustavy souřadnic tak, aby bod B ležel v počátku a přímka p splývala s osou x . Pak parametrické rovnice cykloidy jsou

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \beta - v \sin \beta, \\ y &= r - v \cos \beta, \end{aligned} \tag{3.1}$$

přičemž $r > 0$ je poloměr hybné polodie, β je úhel otočení hybné polodie a $v > 0$ je vzdálenost bodu cykloidy od středu hybné polodie [2, str. 247]. Lze snadno nahlédnout, že bude-li $v < r$, rovnice budou definovat zkrácenou cykloidu, pro $v = r$ získáme prostou cykloidu a pro $v > r$ prodlouženou cykloidu.

Ukažme si nyní jeden ze způsobů, jak tento pohyb zkonstruovat (v programu GeoGebra) a dokažme si, že tento pohyb skutečně odpovídá daným parametrickým rovnicím.



Obrázek 3.2: Konstrukce cykloidy (GeoGebra)

Postup konstrukce: Obr. 3.2

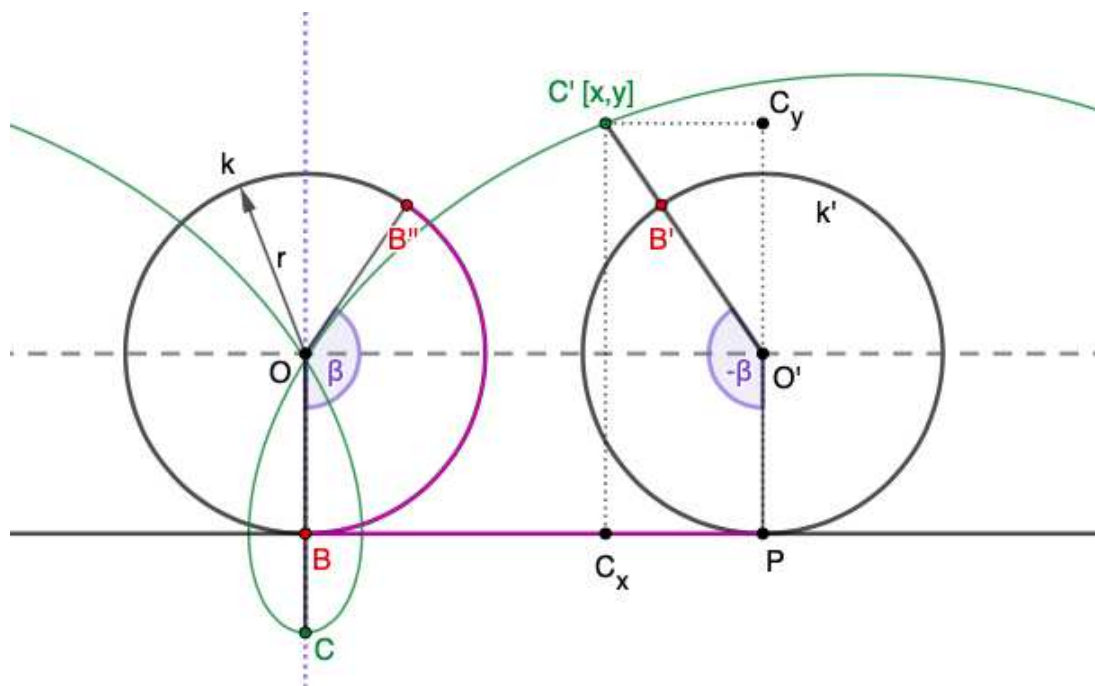
1. Nejprve si zadefinujeme dva parametry. Parametr r (poloměr hybné polodie) a d .
2. Za přímkou p si zvolíme osu x a na ose y zkonstruujeme kružnici k , pro kterou platí, že její střed leží na ose y , její poloměr je r a dotýká se přímky p v bodě B .
3. Sestrojíme bod P na přímce p , přičemž bude platit $|BP| = d$. Dále sestrojíme kružnici k' , pro jejíž střed O' bude platit $OO' \parallel BP$ a $OB \parallel O'P$. Díky této konstrukci se nám při animaci parametru d bude kružnice k pohybovat po přímce p .
4. Už zbývá dokončit jen pohyb bodu B . K tomu nám pomůže následující úvaha: Z definice cykloidního pohybu je zřejmé, že délka oblouku $\widehat{BB''}$ se rovná délce úsečky BP . Pomocí vzorce pro délku kruhového oblouku odvodíme následující rovnost:

$$\beta = \frac{d}{r}.$$

Bod B' zadefinujeme jako rotaci bodu P okolo bodu O' o úhel $-\frac{d}{r}$.

5. Pokud si necháme zobrazit stopu bodu B' a budeme měnit parametr d (respektive spustíme jeho animaci), bod B' nám opíše prostou cykloidu. Zkrácenou či prodlouženou cykloidu pak můžeme najít pomocí volby bodů A a C na polopřímce OB .

Důkaz. Dokažme nyní, že daný pohyb odpovídá parametrickým rovnicím cykloidy. Vzhledem k tomu, že při odvozování obecných souřadnic bodu B' (bodu prosté cykloidy) by se nám obtížně rozlišovaly hodnoty r (poloměr hybné polodie) a v (vzdálenost tvořícího bodu cykloidy od středu hybné polodie), odvodíme obecné souřadnice bodu C' . Poslouží nám k tomu obr. 3.3.



Obrázek 3.3: Souřadnice bodu C prodloužené cykloidy

Pro souřadnice bodu C' platí:

$$\begin{aligned} x &= |BP| - |C_xP| = d - |C_xP| = r\beta - |C'C_y|, \\ y &= |PO'| + |O'C_y| = r + |O'C_y|. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Nyní využijeme vlastnosti pravoúhlého trojúhelníku $O'C_yC'$. Z něj odvodíme následující vztahy:

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \beta) &= \frac{|C_yO'|}{|O'C'|}, \\ \sin(\pi - \beta) &= \frac{|C'C_y|}{|O'C'|}. \end{aligned}$$

Vzdálenost bodů O' a C' označíme jako v a využijeme základní vlastnosti goniometrických funkcí. Získáme tyto rovnosti:

$$|O'C_y| = -v \cdot \cos \beta,$$

$$|C'C_y| = v \cdot \sin \beta.$$

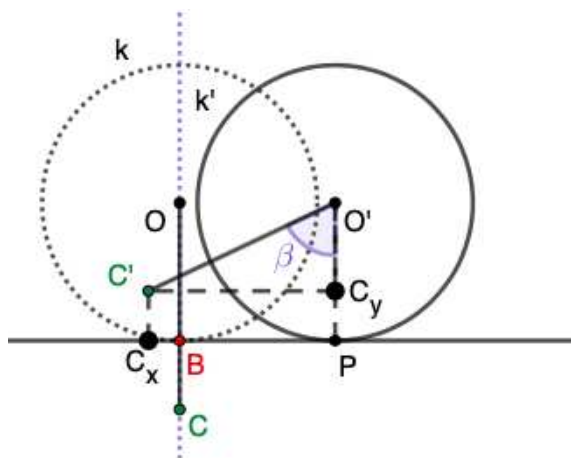
Dosazením do souřadnic bodu C' (3.2) získáme rovnice

$$x = r\beta - v \cdot \sin \beta,$$

$$y = r - v \cdot \cos \beta,$$

což jsou právě parametrické rovnice cykloidy (3.1) [6, str. 34-35]. □

Nyní je na místě, abychom se ještě jednou zamysleli nad korektností tohoto důkazu. Důkaz jsme totiž provedli pro úhel $\beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, ovšem rovnice (3.2) by v jiných polohách bodu B' vypadala jinak. A proto se ptáme, zda jsme neukončili důkaz příliš brzy. Odpověď je nikoli, důkaz je korektní. Zdůvodníme si proč. Rozebereme si všechny ostatní polohy bodu B' .



Obrázek 3.4: $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Pro $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (obr. 3.4) budou mít rovnice (3.2) tvar

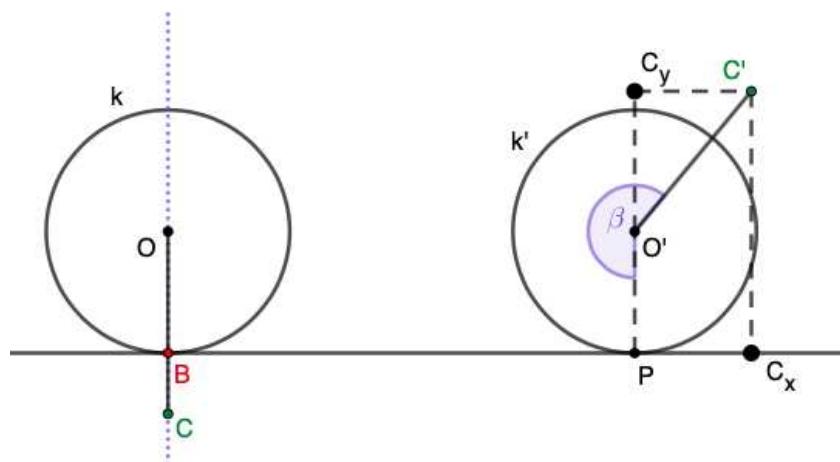
$$x = r\beta - |C'C_y|,$$

$$y = r - |O'C_y|.$$

První rovnice je stejná jako v důkazu, druhá má jiné znaménka. Ověříme, že druhá rovnice bude také odpovídat rovnici cykloidy. V trojúhelníku $C'O'y$ platí

$$|O'C_y| = v \cdot \sin \beta.$$

Po dosazení získáme $y = r - v \cdot \cos \beta$, tedy druhou rovnici cykloidy.



Obrázek 3.5: $\beta \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$

Pro $\beta \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ (obr. 3.5) budou mít rovnice (3.2) tvar

$$x = r\beta + |C'O_y|,$$

$$y = r + |O'C_y|.$$

Druhá rovnice je stejná jako v důkazu, první má jiné znaménka. Ověříme, že první rovnice bude také odpovídat rovnici cykloidy. V trojúhelníku $C'O'y$ platí

$$|C'O_y| = v \cdot \sin(\beta - \pi) = -v \cdot \sin \beta.$$

Po dosazení získáme $x = r\beta - v \cdot \sin \beta$, tedy první rovnici cykloidy.

Pro $\beta \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ (obr. 3.6) budou mít rovnice (3.2) tvar

$$x = r\beta + |C'O_y|,$$

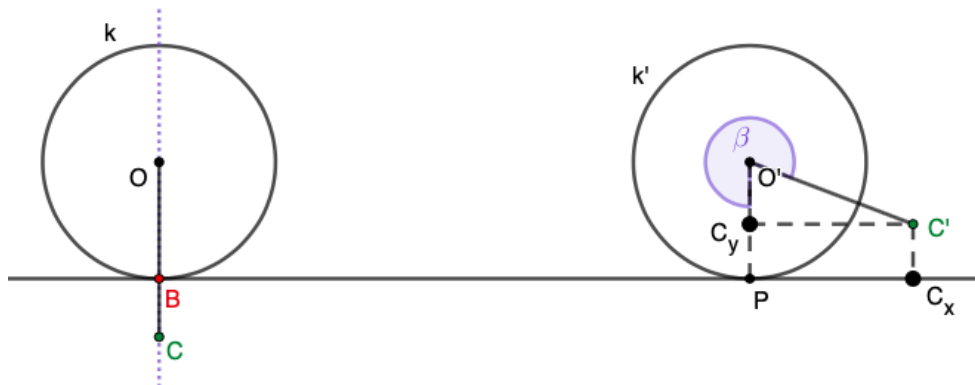
$$y = r - |O'C_y|.$$

Ani jedna z těchto rovnic není stejná jako v důkazu. Z trojúhelníku $C'O_yO'$ odvodíme vztahy

$$|C'O_y| = v \cdot \sin(2\pi - \beta) = -v \cdot \sin \beta,$$

$$|O'C_y| = v \cdot \cos(2\pi - \beta) = v \cdot \cos \beta.$$

Po dosazení získáme rovnice cykloidy.



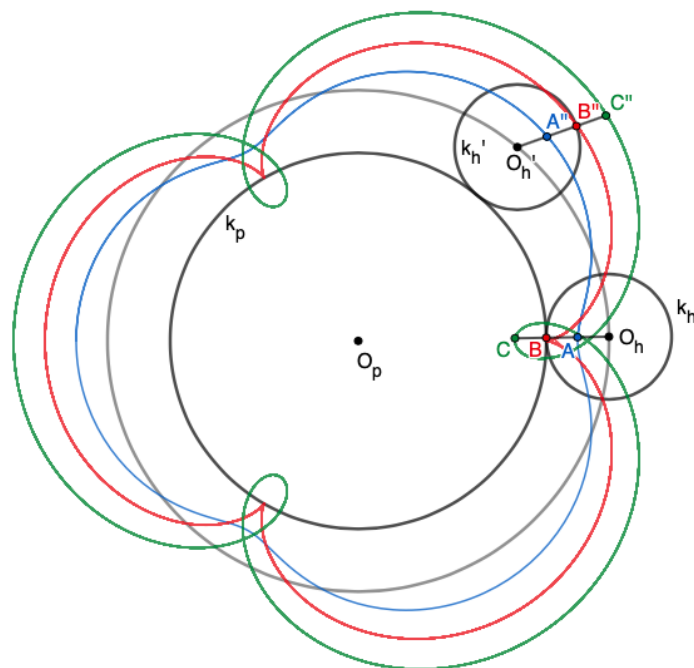
Obrázek 3.6: $\beta \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$

Jak jde tedy vidět, v důkazu nezáleží na umístění bodu B' , jak by se mohlo na první pohled zdát.

3.2 Epicykloida

Epicykloidy vznikají při kotálení vnějšího obvodu kružnice k_h po vnějším obvodu kružnice k_p . Tento pohyb se nazývá epicykloidální a pevnou i hybnou polodií tohoto pohybu jsou kružnice.

Na obr. 3.7 můžeme vidět tři různé tvary epicykloidy, rozlišené obdobně, jako u cykloidy. Tedy, *zkrácenou epicykloidu* opisuje bod A , který je vnitřním bodem hybné polodie k_h , *prostou epicykloidu* opisuje bod B , který je bodem hybné polodie a *prodlouženou epicykloidu* opisuje bod C , vnější bod hybné polodie. Speciálním případem je trajektorie bodu O_h , středu hybné polodie, jelikož ten opisuje soustřednou kružnici k pevné polodii k_p .



Obrázek 3.7: Typy epicykloidy

Jestliže položíme epicykloidu do pravoúhlé soustavy souřadnic tak, aby střed pevné polodie k_p ležel v počátku, pak parametrické rovnice epicykloidy jsou

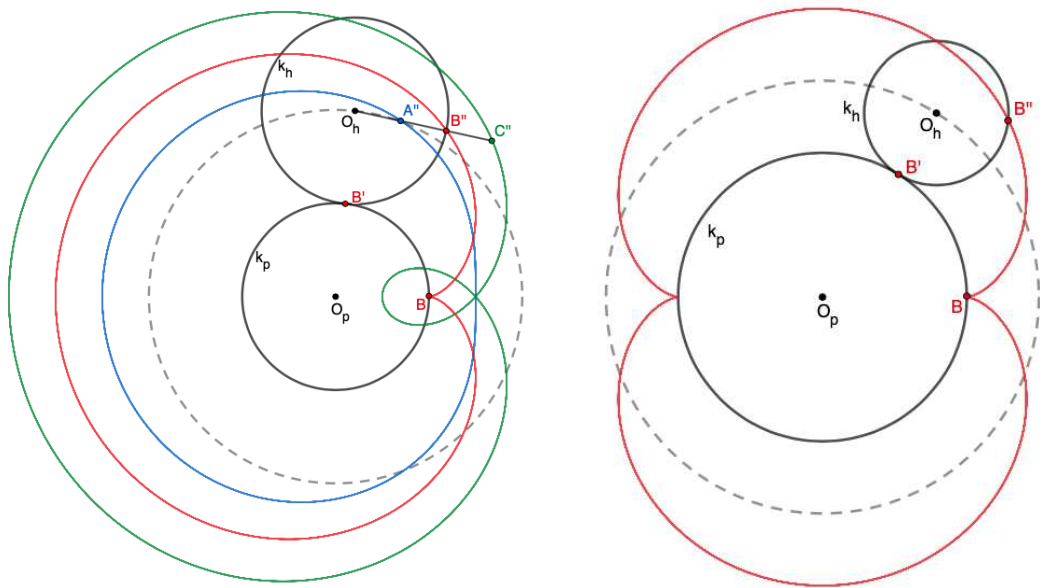
$$\begin{aligned} x &= (r_p + r_h) \cos \alpha - v \cdot \cos \frac{r_p + r_h}{r_h} \alpha, \\ y &= (r_p + r_h) \sin \alpha - v \cdot \sin \frac{r_p + r_h}{r_h} \alpha, \end{aligned} \quad (3.3)$$

kde $r_p > 0$ a $r_h > 0$ jsou poloměry pevné a hybné polodie k_p , k_h a $v > 0$ je vzdálenost tvořícího bodu epicykloidy od středu hybné polodie [2, str. 247-248]

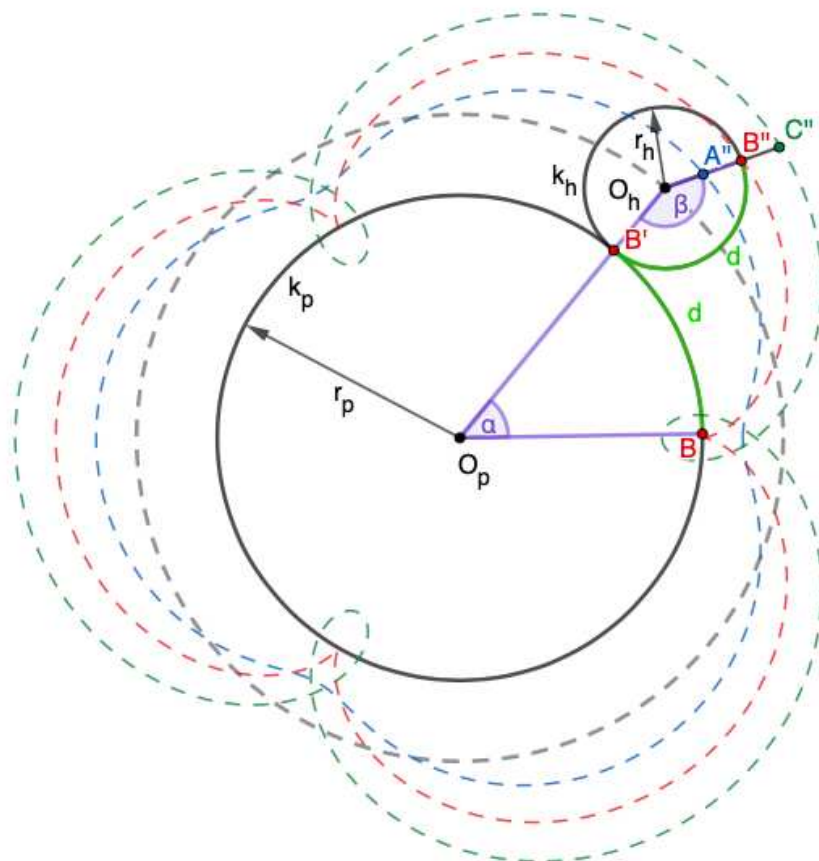
Dané parametrické rovnice budou definovat zkrácenou epicykloidu, jestliže bude platit $v < r_h$. Pokud $v = r_h$, bude se jednat o rovnice prosté epicykloidy a jestliže $v > r_h$, dané rovnice budou definovat prodlouženou epicykloidu. Pro speciální případ $v = 0$ získáme rovnici kružnice o poloměru $(r_p + r_h)$.

V případě $r_p = r_h$ nazýváme epicykloidy *Pascalovy závitnice* (3.8). V případě, kdy $r_p = 2 \cdot r_h$, se prosté epicykloidy nazývají *nefroidy* (3.8) [2, str. 248].

Postup konstrukce prosté epicykloidy je velmi podobný konstrukci prosté cykloidy.



Obrázek 3.8: Pascalovy závitnice a nefroida



Obrázek 3.9: Konstrukce epicykloidy (GeoGebra)

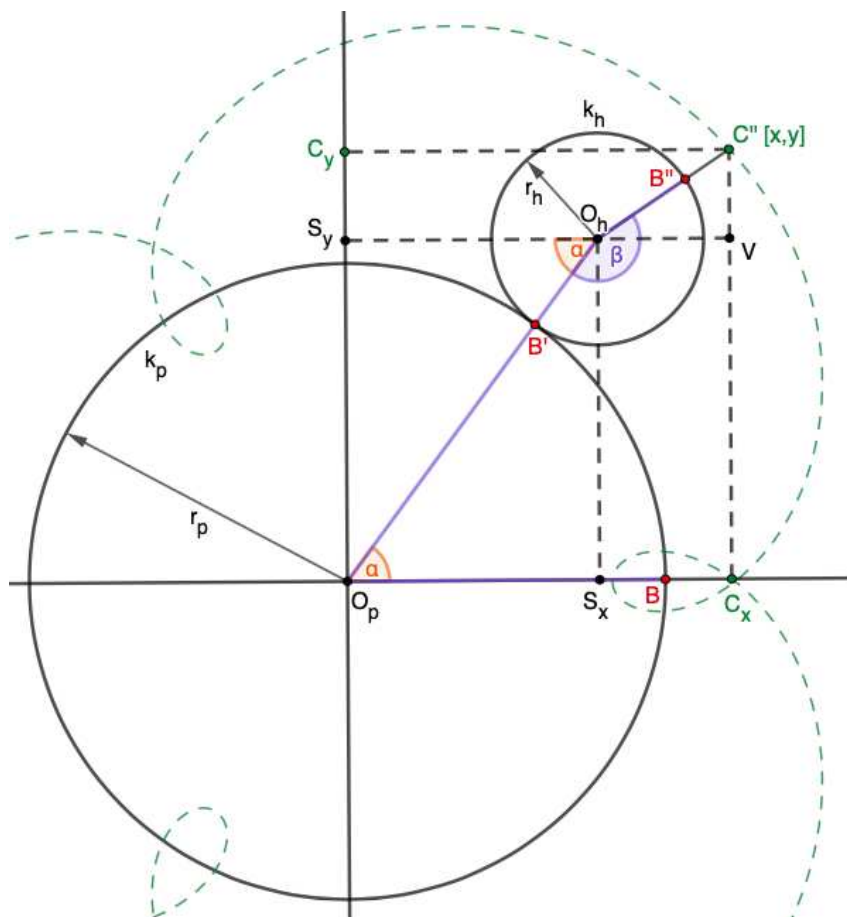
Postup konstrukce: Obr. 3.9

1. Zvolíme si parametry r_p , r_h a polohu středu O_p pevné polodie. Sestrojíme kružnici $k_p(O_p, r_p)$.
2. Na kružnici k_p si zvolíme libovolný bod B .
3. Zavedeme parametr d , pomocí kterého budeme pohybovat bodem B po kružnici k_p .
4. Bod B' zdefinujeme jako rotaci bodu B kolem bodu O_p o úhel $\frac{d}{r_p}$. Následně provedeme konstrukci kružnice k_h procházející bodem B' , a pro kterou platí, že $|O_p O_h| = r_p + r_h$.
5. Máme tedy sestroyen pohyb kružnice k_h po kružnici k_p . Zbývá dodefinovat pohyb bodu B'' po kružnici k_h . Bod B'' zdefinujeme jako rotaci bodu B' kolem bodu O_h o úhel $\frac{d}{r_h}$.
6. Zaznamenáváním stopy bodu B'' při animaci parametru d získáme prostou epicykloidu. Zkrácenou či prodlouženou epicykloidu můžeme získat vhodným zvolením bodů A a C na na polopřímce $O_h B''$.

Uvědomme si ještě několik vlastností epicykloidy, které můžeme využít při volbě parametrů konstrukce. Při konstrukci má velký význam poměr poloměrů polodií, tedy číslo

$$t = \frac{r_h}{r_p}.$$

Bude-li číslo t iracionální, křivka se nikdy neuzavře. Naopak, jestliže zvolíme poloměry kružnic tak, aby bylo číslo t racionální, křivka bude uzavřená [2, str. 248]. Zároveň bude platit, že jestliže převedeme daný zlomek do základního tvaru $\frac{r}{s}$, bude platit, že číslo r je počet, kolikrát hybná polodie k_h obkrouží pevnou polodii k_p , než se křivka uzavře a číslo s bude počet hrotů (bodů vratu) u prosté epicykloidy, respektive uzlů u prodloužené epicykloidy, které bude epicykloida mít [6, str. 35].



Obrázek 3.10: Souřadnice bodu C'' prodloužené epicykloidy

Důkaz. Dokažme si nyní, že body v tomto pohybu skutečně opisují křivky popsané parametrickými rovnicemi (3.3).

Užijeme k tomu prodlouženou epicykloidu, kterou opisuje bod C'' . Epicykloidu si opět vhodně položíme do pravoúhlé soustavy souřadnic tak, aby střed pevné polodie ležel v počátku soustavy. Ostatní důležité body označíme tak, jak je vidět na obr. 3.10.

Pro souřadnice bodu C'' platí:

$$\begin{aligned} x &= S_x + |O_h V|, \\ y &= S_y + |VC''|, \end{aligned} \quad (3.4)$$

kde S_x a S_y jsou souřadnice bodu O_h . Z pravoúhlého trojúhelníku $O_p S_x O_h$ s pravým úhlem u vrcholu S_x dokážeme vyjádřit hodnotu S_x :

$$S_x = \cos \alpha \cdot (r_p + r_h).$$

Z pravoúhlého trojúhelníku $O_h S_y O_p$ s pravým úhlem u vrcholu S_y dokážeme vyjádřit hodnotu S_y :

$$S_y = \sin \alpha \cdot (r_p + r_h).$$

Zbývá určit vzdálenosti $|O_h V|$ a $|VC''|$. Obě tyto vzdálenosti určíme pomocí pravoúhlého trojúhelníku $O_h VC''$ s pravým úhlem u vrcholu V . Budeme k tomu však potřebovat znát velikost úhlu u vrcholu O_h . To je však prosté, tento úhel můžeme vyjádřit jako $\beta - \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \alpha)$. Pak již můžeme odvodit tyto vztahy (vzdálenost $|O_h C''|$ označíme v):

$$|O_h V| = v \cdot \cos(\alpha + \beta - \pi) = -v \cdot \cos(\alpha + \beta),$$

$$|VC''| = v \cdot \sin(\alpha + \beta - \pi) = -v \cdot \sin(\alpha + \beta).$$

Z konstrukce je nám také zřejmé, že platí $\alpha \cdot r_p = \beta \cdot r_h$, a proto můžeme úhel $(\alpha + \beta)$ vyjádřit jako

$$\alpha + \beta = \alpha + \frac{\alpha \cdot r_p}{r_h} = \alpha \cdot \frac{r_p + r_h}{r_h}.$$

Nyní postupně zpětně dosadíme odvozené vztahy do souřadnic bodu C'' (3.4) a upravíme.

$$x = \cos \alpha \cdot (r_p + r_h) - v \cdot \cos \frac{r_p + r_h}{r_h} \alpha,$$

$$y = \sin \alpha \cdot (r_p + r_h) - v \cdot \sin \frac{r_p + r_h}{r_h} \alpha.$$

Získali jsme parametrické rovnice epicykloidy definované v (3.3) [6, str. 37-38]. □

Obdobně jako u cykloid se zde můžeme ptát, zda je důkaz nezávislý na poloze bodu C'' . Odpověď je opět ano. Důvod je obdobný jako u cykloidy, ale vzhledem k jeho větší náročnosti jej zde uvedeme. U dalších obdobných důkazů však budeme tento krok již nepřipomínat.

Pro přehlednost rozdělme polohu bodu C'' na čtyři kvadranty podle bodu O_h . Předcházející důkaz je tedy proveden pro případ, kdy je bod C'' v prvním kvadrantu.

Pro bod C'' ve druhém kvadrantu (obr. 3.11) budou mít rovnice (3.4) tvar

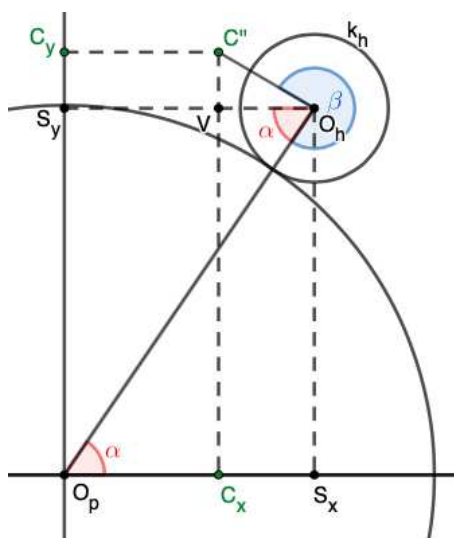
$$x = S_x - |O_h V|,$$

$$y = S_y + |VC''|.$$

Druhá rovnice je stejná jako v důkazu, první má jiné znaménka. Ověříme, že první rovnice bude také odpovídat rovnici epicykloidy. V trojúhelníku $C''VO_h$ platí

$$|O_hV| = v \cdot \cos(2\pi - \alpha - \beta) = v \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

Zbýlý postup je stejný jako v důkazu.



Obrázek 3.11: C''' ve druhém kvadrantu

Pro bod C''' ve třetím kvadrantu (obr. 3.12) budou mít rovnice (3.4) tvar

$$x = S_x - |O_hV|,$$

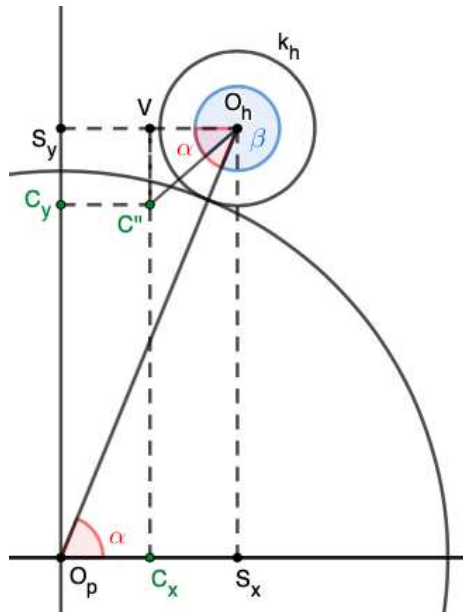
$$y = S_y - |VC'''|.$$

Ani jedna z těchto rovnic není stejná jako v důkazu. Z trojúhelníku $C'''VO_h$ platí

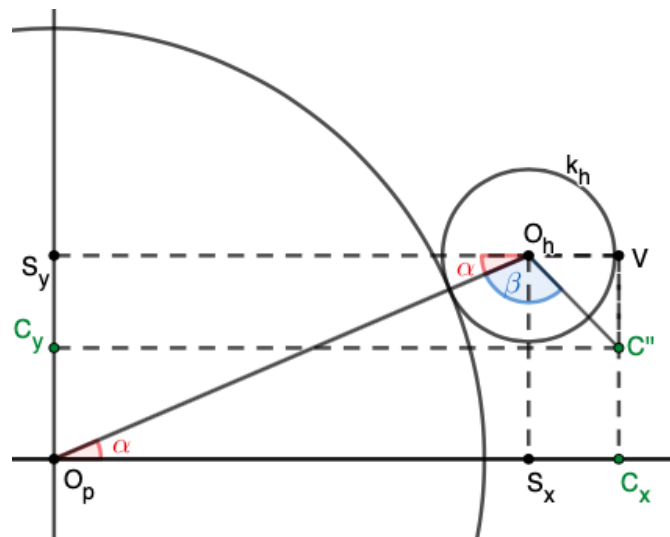
$$|O_hV| = v \cdot \cos(\alpha + \beta),$$

$$|VC'''| = v \cdot \sin(\alpha + \beta).$$

Zbýlý postup je stejný jako v důkazu.



Obrázek 3.12: C''' ve třetím kvadrantu



Obrázek 3.13: C''' ve čtvrtém kvadrantu

Pro bod C'' ve čtvrtém kvadrantu (obr. 3.13) budou mít rovnice (3.4) tvar

$$x = S_x + |O_h V|,$$

$$y = S_y - |VC''|.$$

První rovnice je stejná jako v důkazu, druhá má jiné znaménka. Ověříme, že druhá rovnice bude také odpovídat rovnici epicykloidy. V trojúhelníku $C''VO_h$ platí

$$|VC''| = v \cdot \sin(\pi - \alpha - \beta) = v \cdot \sin(\alpha + \beta).$$

Zbylý postup je stejný jako v důkazu.

3.3 Hypocykloida

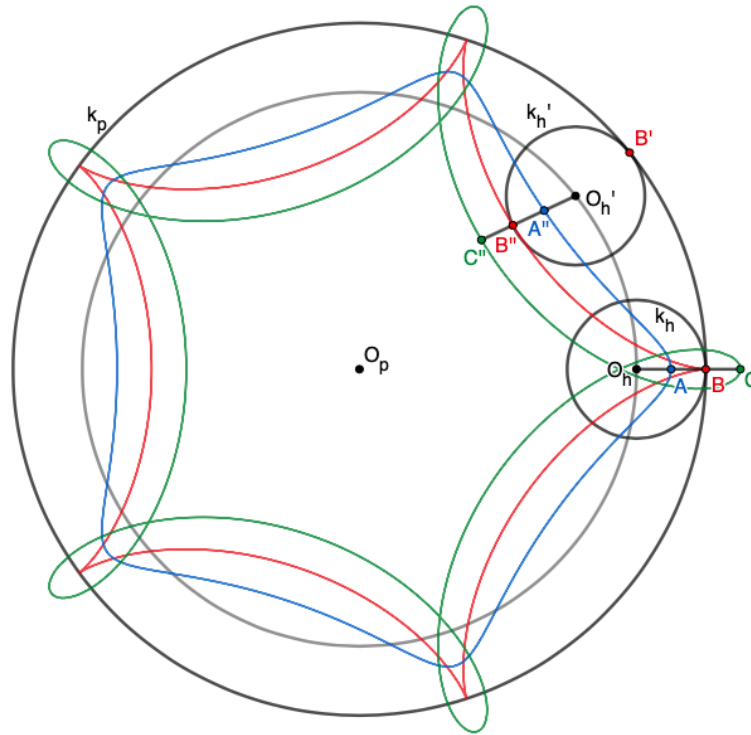
Hypocykloidy vznikají při kotálení vnějšího obvodu kružnice k_h po vnitřním obvodu kružnice k_p . Tento pohyb se nazývá hypocykloidální a pevnou i hybnou polodíí tohoto pohybu jsou kružnice [2, str. 248].

Analogicky k předchozím cyklickým křivkám, i zde rozlišujeme tři základní typy hypocykloidy, které můžeme vidět na obr. 3.14. Bod A , vnitřní bod hybné polodie k_h , opisuje *zkrácenou hypocykloidu*, bod B , ležící na kružnici k_h opisuje *prostou hypocykloidu* a bod C , vnější bod hybné polodie k_h opisuje *prodlouženou hypocykloidu*. Stejně jako u epicykloidy, i zde nastává speciální případ pro bod O_h , střed hybné polodie, který neopisuje žádný typ hypocykloidy, nýbrž soustřednou kružnici s kružnicí k_p (pevnou polodíí).

Položíme-li hypocykloidu do pravoúhlé souřadnicové soustavy tak, aby střed pevné polodie O_p ležel v počátku, budou mít parametrické rovnice hypocykloidy tento tvar:

$$\begin{aligned} x &= (r_p - r_h) \cos \alpha + v \cdot \cos \frac{r_p - r_h}{r_h} \alpha, \\ y &= (r_p - r_h) \sin \alpha - v \cdot \sin \frac{r_p - r_h}{r_h} \alpha, \end{aligned} \tag{3.5}$$

kde $r_p > 0$ a $r_h > 0$ jsou poloměry pevné a hybné polodie k_p , k_h a $v > 0$ je vzdálenost tvořícího bodu hypocykloidy od středu hybné polodie [2, str. 248,249]. Navíc ještě musí platit $r_p > r_h$. Z klasifikace typů hypocykloid plyne, že pro $v < r_h$ se jedná o rovnice



Obrázek 3.14: Typy hypocykloidy

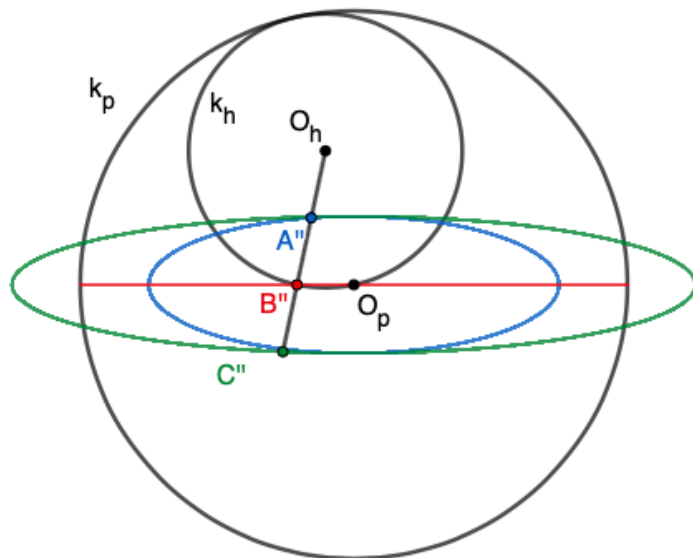
zkrácené hypocykloidy, pro $v = r_h$ se jedná o rovnice prosté hypocykloidy a pro $v > r_h$ jde o rovnice prodloužené hypocykloidy. Snadno lze také nahlédnout, že pro $v = 0$ získáme vyjádření kružnice o poloměru $(r_p - r_h)$.

I zde platí, že je-li poměr $r_p : r_h$ iracionální číslo, pak křivka není uzavřená (je tedy tzv. transcendentní). Naopak je-li daný podíl racionálním číslem, křivka bude uzavřená (algebraická) [2, str. 249]. Dále také platí, že jestliže převedeme zlomek $\frac{r_h}{r_p}$ na zlomek v základním tvaru $\frac{r}{s}$, pak číslo r bude počet otočení kružnice k_h kolem celého obvodu k_p , než se křivka uzavře a číslo s bude počet hrotů (vratných bodů) u prosté hypocykloidy, respektive uzlů u prodloužené hypocykloidy.

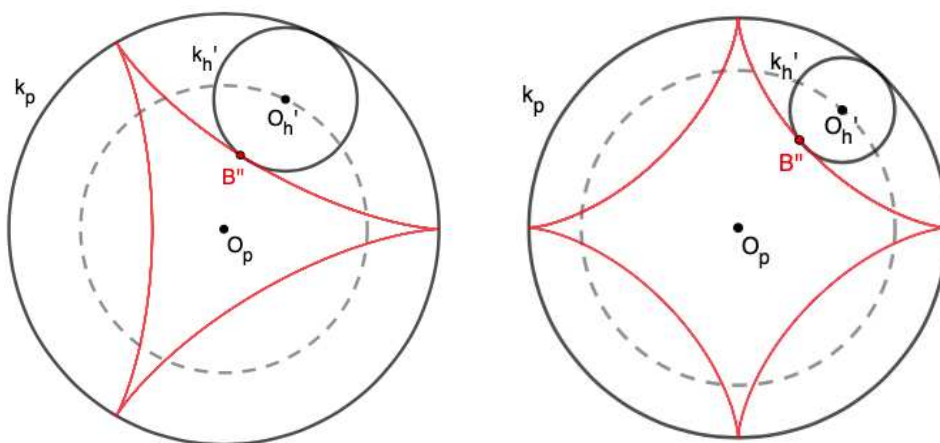
Nyní si ještě představme několik speciálních typů hypocykloidy. Je-li poměr poloměrů polodíí $r_h : r_p = 1 : 2$, jedná se o tzv. eliptický pohyb a výslednou zkrácenou i prodlouženou hypocykloidou tohoto pohybu je elipsa, jak můžeme vidět na obr. 3.15. Dále pak rozlišujeme ještě dva speciální typy prosté hypocykloidy. Je-li $r_h : r_p = 1 : 3$, pak prostou hypocykloidu nazýváme *Steinerova hypocykloida*. Je-li $r_h : r_p = 1 : 4$, nazýváme

prostou hypocykloidu *astroida*. Obě tyto prosté hypocykloidy jsou zobrazeny na obr. 3.16 [2, str. 249].

Konstrukce prosté hypocykloidy je velice obdobná konstrukci prosté epicykloidy.



Obrázek 3.15: Elipsa vytvořená hypocykloidním pohybem



Obrázek 3.16: Steinerova hypocykloida a astroida

Postup konstrukce: Obr. 3.17

1. Zvolíme si parametry r_p, r_h a polohu středu O_p pevné polodie. Sestrojíme pevnou polodii $k_p(O_p, r_p)$.
2. Na kružnici k_p si zvolíme libovolný bod B .
3. Zavedeme parametr d , pomocí jehož animace budeme pohybovat bodem B po kružnici k_p . Bod B' tedy zdefinujeme jako rotaci bodu B okolo bodu O_p o úhel $\alpha = \frac{d}{r_p}$.
4. Sestrojíme kružnici k_h , která bude mít poloměr r_h a bude mít vnitřní dotyk s kružnicí k_p v bodě B' . Pro středy kružnic k_p a k_h platí $|O_p O_h| = r_p - r_h$.
5. Zbývá dokončit pohyb bodu B'' po kružnici k_h . Zdefinujeme bod B'' jako rotaci bodu B' kolem bodu O'_h (středu hybné polodie k_h) o úhel $\beta = -\frac{d}{r_h}$.
6. Zaznamenáváním stopy bodu B'' při animaci parametru d získáme prostou hypocykloidu. Zkrácenou či prodlouženou hypocykloidu lze získat vhodným zvolením bodů A a C na polopřímce $O'_h B''$.

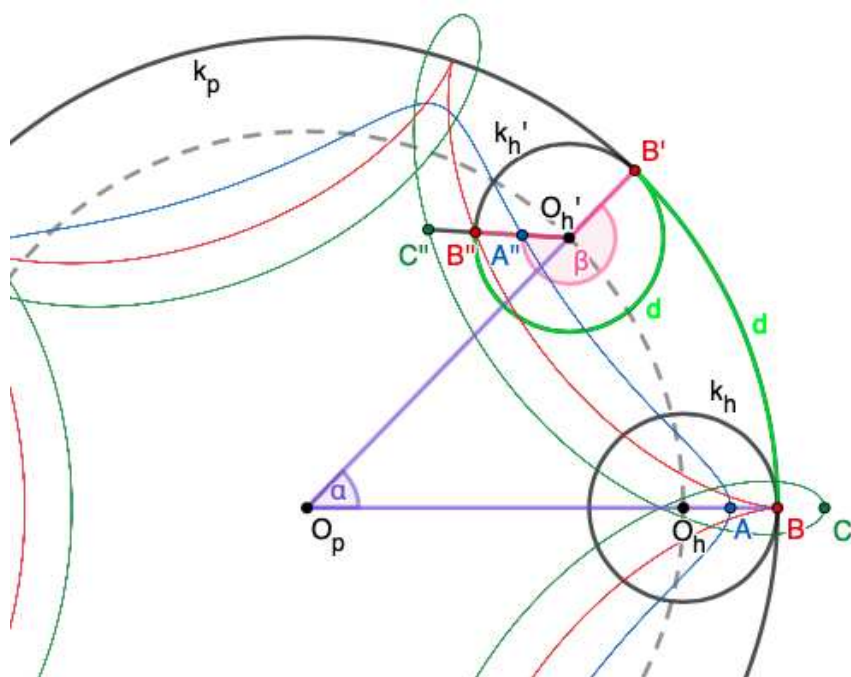
Důkaz. Stejně jako u předchozích konstrukcí dokážeme, že daný pohyb odpovídá parametrickým rovnicím hypocykloidy (3.5). Opět důkaz provedeme pro prodlouženou hypocykloidu, pro prostou či zkrácenou lze vést důkaz zcela obdobně.

Hypocykloidu si položíme do pravoúhlé soustavy souřadnic tak, aby střed pevné polodie O_p ležel v počátku. Určíme souřadnice bodu C'' prodloužené hypocykloidy. Ostatní důležité body označíme tak, jak je vidět na obr. 3.18.

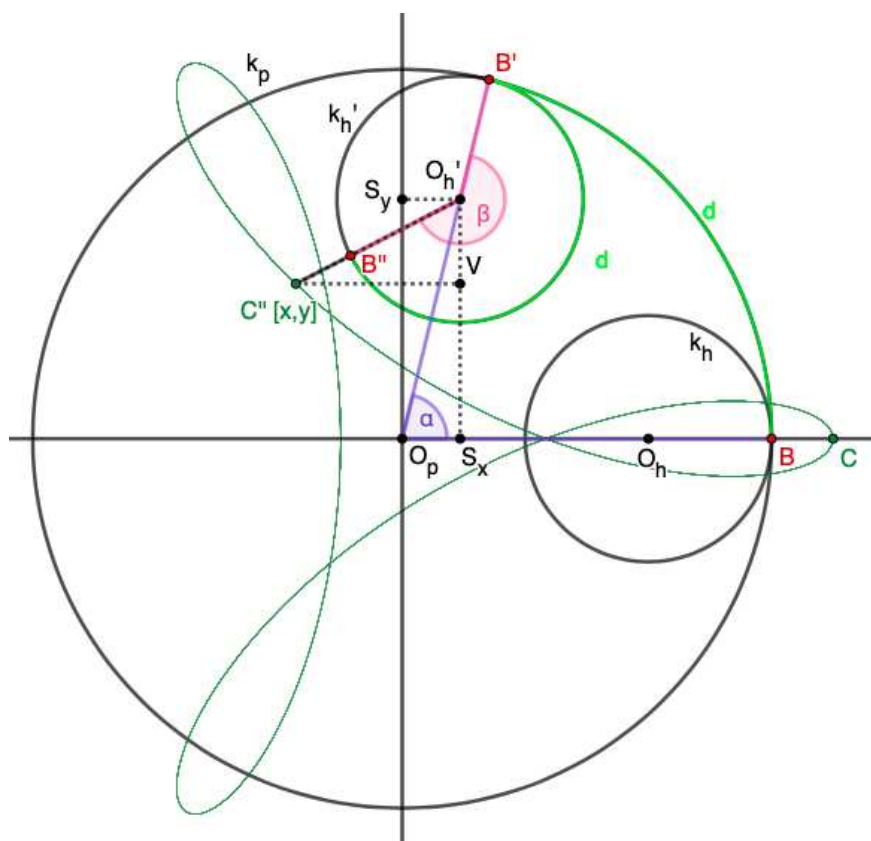
Pro souřadnice bodu C'' platí:

$$\begin{aligned} x &= S_x - |C''V|, \\ y &= S_y - |VO'_h|, \end{aligned} \tag{3.6}$$

kde S_x a S_y jsou souřadnice bodu O'_h .



Obrázek 3.17: Konstrukce hypocykloidy (GeoGebra)



Obrázek 3.18: Souřadnice bodu C'' prodloužené hypocykloidy

Tyto souřadnice určíme pomocí pravoúhlého trojúhelníku $O_p S_x O'_h$ s pravým úhlem u vrcholu S_x . Z něj plyne, že

$$S_x = (r_p - r_h) \cdot \cos \alpha,$$

$$S_y = (r_p - r_h) \cdot \sin \alpha.$$

Zbývá určit vzdálenosti $|C''V|$ a $|VO'_h|$. Ty určíme pomocí pravoúhlého trojúhelníku s pravým úhlem u vrcholu V . Úhel $|\angle VO'_h C''| = \beta - \alpha - \frac{\pi}{2}$, z čehož plyne, že úhel $|\angle VC'' O'_h| = \pi - \beta + \alpha$. Vzdálenost $|C'' O'_h|$ označíme jako v a využitím úhlu u vrcholu C'' získáme

$$|C''V| = v \cdot \cos(\pi - \beta + \alpha) = -v \cdot \cos(\beta - \alpha),$$

$$|VO'_h| = v \cdot \sin(\pi - \beta + \alpha) = v \cdot \sin(\beta - \alpha).$$

Stejně jako v předchozích důkazech ještě využijeme vztah $\alpha \cdot r_p = \beta \cdot r_h$ k tomu, abychom upravili výraz $\beta - \alpha$, a to následovně:

$$\beta - \alpha = \frac{\alpha \cdot r_p}{r_h} - \alpha = \alpha \cdot \frac{r_p - r_h}{r_h}.$$

Zpětně nyní vše dosadíme do (3.6) a upravíme na

$$x = (r_p - r_h) \cdot \cos \alpha + v \cdot \cos \frac{r_p - r_h}{r_h} \alpha,$$

$$y = (r_p - r_h) \cdot \sin \alpha - v \cdot \sin \frac{r_p - r_h}{r_h} \alpha,$$

což jsou parametrické rovnice hypocykloidy z (3.5) [6, str. 40]. □

3.4 Pericykloida

Pericykloida vznikne při kotálení vnitřního obvodu kružnice h po vnějším obvodu kružnice p . Obě polodie jsou tedy opět kružnice. Tento pohyb se nazývá pericykloidální a je vratným pohybem hypocykloidálního pohybu.

Touto křivkou se nebudeme zabývat tak podrobně jako ostatními cyklickými křivkami, a to zejména proto, že platí tato věta: *Každá pericykloida je epicykloida, a naopak* [2, str. 249]. Pro pochopení důkazu této věty je však potřeba znát hlubší základy kinematické geometrie, které tato práce neposkytuje, a proto danou větu uvedeme bez důkazu.

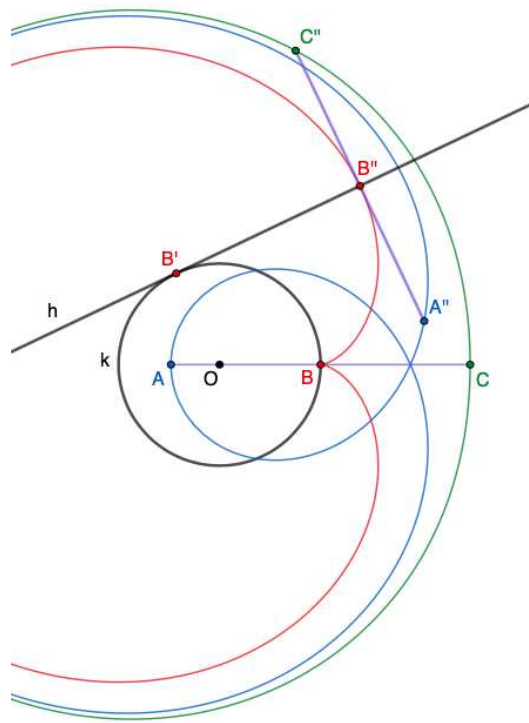
Samotná konstrukce pericykloidy je zcela totožná s konstrukcí hypocykloidy. Nabízí se tedy otázka, jak rozpoznat, kdy konstruujeme hypocykloidu a kdy pericykloidu. Odpověď je snadná. Nechť r_p je poloměr pevné polodie a r_h poloměr hybné polodie. Pak, jestliže $r_h < r_p$, výsledný pohyb bude hypocykloidní. Jestliže $r_h > r_p$, výsledný pohyb bude pericykloidní.

Speciálním případem pericykloidního pohybu je případ, kdy poměr poloměrů $r_h : r_p = 2 : 1$. Tento pohyb se nazývá kardioidický a jedná se o vratný pohyb k eliptickému pohybu (hypocykloidní pohyb s poměrem poloměrů $r_h : r_p = 1 : 2$). Křivky vznikající při kardioidickém pohybu se nazývají Pascalovy závitnice (již jsme se jim věnovali u eliptického pohybu, viz obr. 3.8) [2, str. 242-243, 249].

3.5 Evolventa kružnice

Evolventa kružnice vzniká při valení přímky po kružnici. Tento pohyb se nazývá evolventní, jeho pevnou polodií je kružnice k a hybnou polodií je přímka p . Jedná se tedy o vratný pohyb k cykloidnímu pohybu, se kterým jsme se již seznámili v podkapitole 3.1. Můžeme se však setkat i s evolventami jiných křivek. Obecný evolventní pohyb je jakýkoliv pohyb, kdy je hybnou polodií přímka a pevnou polodií libovolná křivka. Trajektoriím bodů tohoto pohybu pak říkáme evolventy křivky. My se však budeme zabývat pouze evolventou kružnice [2, str. 250].

Na obr. 3.19 můžeme vidět, že lze rozlišovat tři typy evolventy kružnice. Bod A'' opisuje *prodlouženou evolventu kružnice*, bod B'' opisuje *prostou evolventu kružnice* a trajektorii bodu C'' nazýváme *zkrácenou evolventu kružnice*. Tyto tři případy se rozlišují pomocí polohy tvořícího bodu vzhledem k hybné polodii h . Přímka h rozděluje rovinu na dvě poloroviny. Jestliže zvolíme tvořící bod na přímce h , získáme prostou evolventu, zvolíme-li jej v polorovině, do které náleží střed O pevné polodie k , získáme prodlouženou evolventu kružnice a nakonec, zvolíme-li tvořící bod v polorovině, do které nenáleží střed O kružnice k , jeho trajektorií bude zkrácená evolventa kružnice [2, str. 250].



Obrázek 3.19: Typy evolventy kružnice

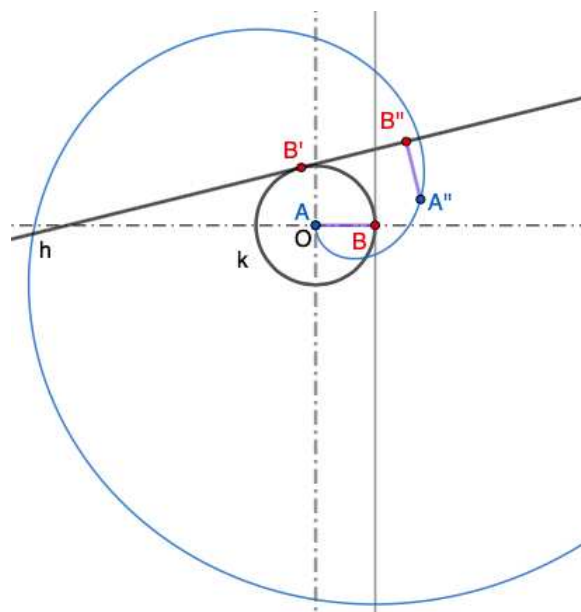
Speciálním případem evolventy kružnice je Archimedova spirála, kterou můžeme vidět na obr. 3.20. Tuto evolventu získáme položením tvořícího bodu přímo do středu O pevné polodie k [2, str. 250].

Položíme-li evolventu do pravoúhlé souřadnicové soustavy tak, aby střed pevné polodie k ležel v počátku, budou mít parametrické rovnice takovéto evolventy tvar

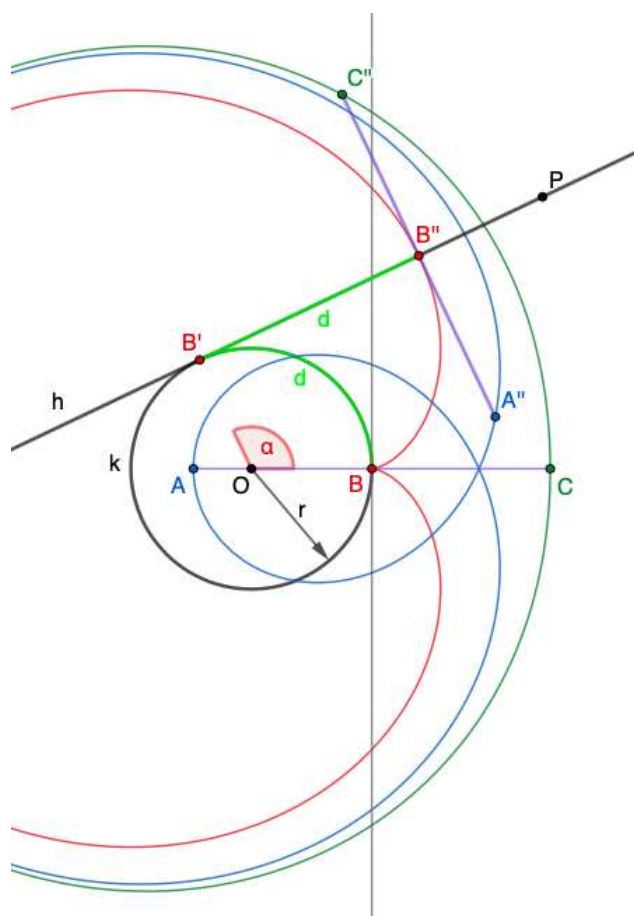
$$\begin{aligned} x &= v \cos \alpha + r \alpha \sin \alpha, \\ y &= v \sin \alpha - r \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \tag{3.7}$$

kde $r > 0$ je poloměr kružnice k a $v \geq 0$ je vzdálenost tvořícího bodu evolventy od středu pevné polodie (bodu O). Pro $v < r$ se bude jednat o rovnice prodloužené evolventy kružnice, pro $v = r$ o rovnice prosté evolventy a pro $v > r$ o rovnice zkrácené evolventy [2, str. 250].

Pojďme si nyní nastínit konstrukci prosté evolventy kružnice.



Obrázek 3.20: Archimedova spirála



Obrázek 3.21: Konstrukce evolventy kružnice (GeoGebra)

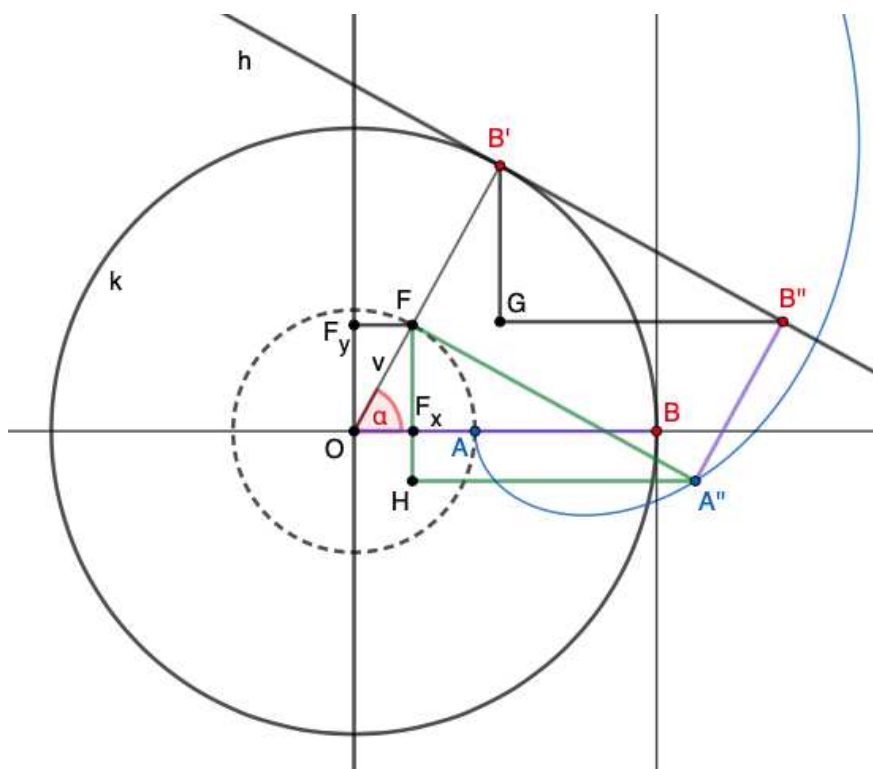
Postup konstrukce: Obr. 3.21

1. Zvolíme si v rovině bod O a sestrojíme kružnici k se středem v bodě O a poloměrem r .
2. Na kružnici k si umístíme bod B a zavedeme parametr d .
3. Bod B' zdefinujeme jako rotaci bodu B okolo středu O o úhel $\alpha = \frac{d}{r}$. Následně vedeme bodem B' tečnu kružnice k , kterou označíme h .
4. Než budeme pokračovat v konstrukci, uvědomme si, že evolventa kružnice je vždy složena ze dvou symetrických částí. Tyto dvě části jsou spirály, přičemž jedna je pravotočivá a druhá levotočivá. V tomto okamžiku konstrukce je vhodné konstrukci rozdělit na právě dvě konstrukce, které se budou samostatně věnovat jedné z těchto částí. Dále tedy uvedeme pouze konstrukci levotočivé části evolventy, pravotočivou bychom konstruovali zcela obdobným způsobem.
5. Sestrojíme bod B'' , který bude ležet na průniku polopřímky BP a kružnice se středem B' a poloměrem d .
6. Při animaci parametru d bude bod B'' opisovat prostou evolventu, respektive její levotočitou část.

Důkaz. Dokažme, že daný evolventní pohyb odpovídá parametrickým rovnicím definovaným v (3.7). Odvodíme souřadnice bodu A'' prodloužené evolventy kružnice, jejíž střed položíme do počátku pravoúhlé soustavy souřadnic. Bod A volíme na ose x ve vzdálenosti v od středu O . Ostatní důležité body, které využijeme v důkazu jsou vyznačeny na obr. 3.22. Souřadnice bodu A'' můžeme vyjádřit takto:

$$\begin{aligned}x &= F_x + |HA''|, \\y &= F_y - |FH|,\end{aligned}\tag{3.8}$$

kde F_x a F_y jsou souřadnice bodu F .



Obrázek 3.22: Souřadnice bodu A'' prodloužené evolventy

Souřadnice F_x a F_y vyjádříme pomocí pravoúhlého trojúhelníku OF_xF_y s pravým úhlem u vrcholu F_x . Z něj plynou následující rovnosti:

$$F_x = v \cdot \cos \alpha,$$

$$F_y = v \cdot \sin \alpha.$$

Velikosti zbylých dvou úseček vyjádříme pomocí shodnosti pravoúhlých trojúhelníků FHA'' a $B'GB''$. Z konstrukce evolventy víme, že délka oblouku $|\widehat{BB'}| = |B'B''|$. A tedy také platí $|B'B''| = d = r \cdot \alpha = |FA''|$.

Jelikož je přímka h v každé své poloze tečnou kružnice k , můžeme snadno odvodit, že úhel $|\angle B''B'G| = \alpha$, a tedy také úhel $|\angle HFA''| = \alpha$. K vyjádření vzdáleností $|HA''|$ a $|FH|$ nyní již nic dalšího nepotřebujeme a z trojúhelníku FHA'' s pravým úhlem u vrcholu H odvodíme rovnosti

$$|HA''| = r\alpha \cdot \sin \alpha,$$

$$|FH| = r\alpha \cdot \cos \alpha.$$

Dosadíme zpětně do (3.8) a získáme

$$x = v \cdot \cos \alpha + r\alpha \cdot \sin \alpha,$$

$$y = v \cdot \sin \alpha - r\alpha \cdot \cos \alpha,$$

což jsou parametrické rovnice evolventy z (3.7) [6, str. 43-44].

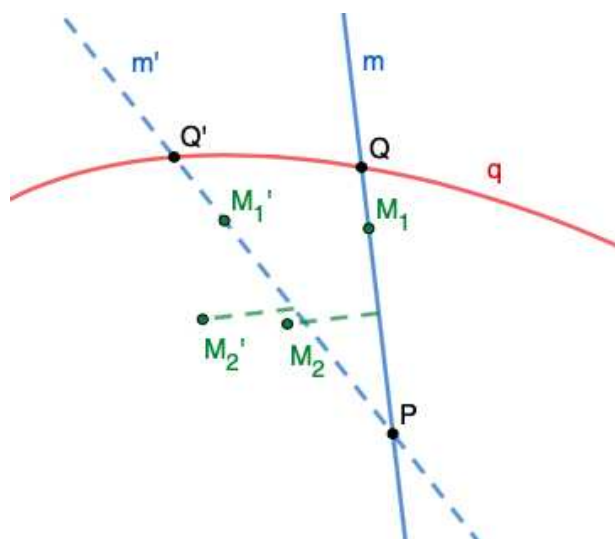
□

Kapitola 4

Konchoidy

Dalším příkladem kinematických křivek jsou konchoidy, vznikající při konchoidálním pohybu. Tento pohyb je definován v rovině následovně. Nechť P je pevný bod roviny a m přímka, procházející bodem P . Dále nechť je q rovinná křivka a bod Q leží na křivce q a zároveň na přímce m . Jestliže platí, že při otáčení přímky m kolem bodu P , bod Q opisuje trajektorii křivky q , nazýváme tento pohyb konchoidální a trajektorii zvoleného bodu v tomto pohybu nazýváme konchoida.

Bod P se nazývá *pól* konchoidálního pohybu a křivka q se nazývá *řídící křivka* konchoidálního pohybu [2, str. 243-244].



Obrázek 4.1: Konchoidální pohyb

Jestliže zvolíme bod, který bude ležet na přímce m (M_1 na obr. 4.1), budeme jeho trajektorii nazývat *přímá konchoida*. V opačném případě (M_2) se konchoida nazývá *šikmá*.

Dále také můžeme konchoidy dělit podle křivky q . Je-li například křivka q přímkou, mluvíme pak o *konchoidě přímky*. My se v této práci zaměříme na přímou konchoidu přímky a kružnice [2, str. 243-244].

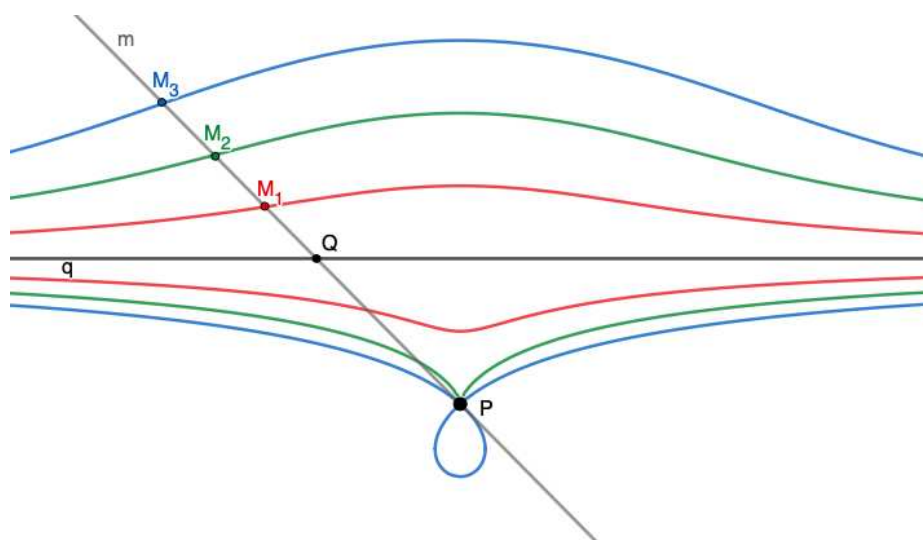
4.1 Přímá konchoida přímky

Konchoida přímky, též známá jako *Nicomedova konchoida*, má vždy dvě větve, jejichž asymptotou je přímka q . Vzdálenost bodu P od řídicí přímky q budeme značit $v > 0$ a konstantní vzdálenost tvořícího bodu M (M_1, M_2, M_3 na obr. 4.2) od pohybujícího se bodu Q budeme značit $d > 0$.

Jestliže $d < v$, bod P bude uzlovým bodem konchoidy, pro $d = v$ bude vratným bodem a pro $d > v$ izolovaným bodem [1, str. 244].

Jestliže položíme přímou konchoidu přímky do pravoúhlé soustavy souřadnic tak, aby řídicí přímkou byla osa x a pól P ležel na ose y , rovnice této konchoidy bude mít tvar

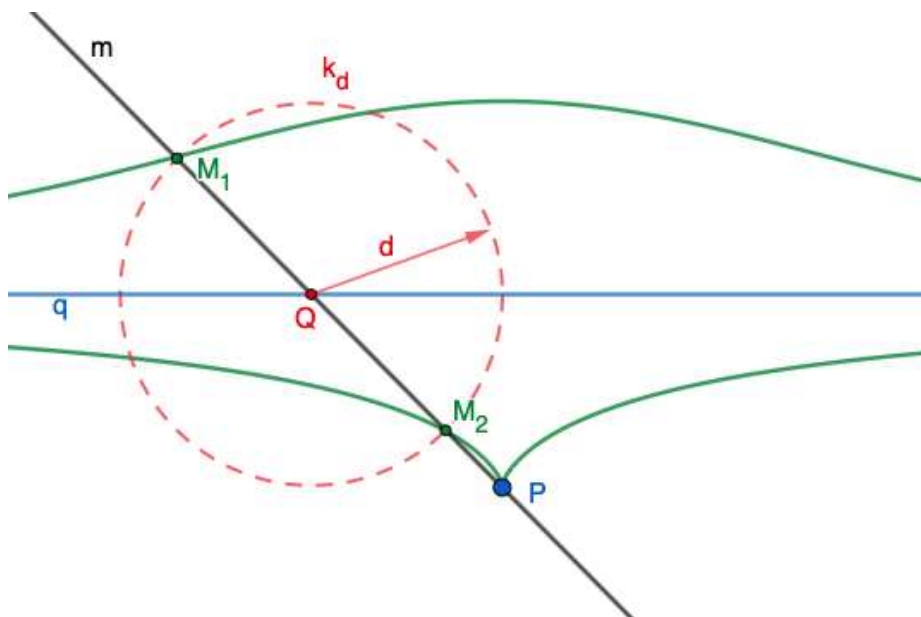
$$x^2y^2 + (y + v)^2(y^2 - d^2) = 0. \quad (4.1)$$



Obrázek 4.2: Přímá konchoida přímky

Postup konstrukce: Obr. 4.3

1. Zvolíme si polohu přímky q a bodu P . Na přímce q umístíme bod Q .
2. Sestrojíme přímku m procházející body P a Q .
3. Zavedeme si parametr d a sestrojíme kružnici $k_d(Q, d)$.
4. Nalezneme průsečíky kružnice k_d a přímky m . Tyto body (M_1, M_2) nám budou při animaci bodu Q po přímce q opisovat trajektorii námi hledané konchoidy.



Obrázek 4.3: Konstrukce přímé konchoidy přímky (GeoGebra)

Důkaz. Důkaz provedeme nikoli pro prostou, ale pro zkrácenou konchoidu, abychom dokázali rozlišit hodnoty v a d . O bodech konchoidy známe dvě zásadní informace. Víme, že leží na přímce m a jejich vzdálenost od bodu Q je rovna d . Konchoidu položíme do pravoúhlé souřadnicové soustavy tak, jak vidíme na obr. 4.4. Odvodíme nejprve rovnice kružnice $k_d(Q, d)$ a přímky m . Následným řešením soustavy těchto dvou rovnic nalezneme rovnici konchoidy [6, str. 30-31].

Rovnice kružnice k_d se středem v bodě $Q [q, 0]$ a poloměrem d má tvar

$$(x - q)^2 + y^2 = d^2.$$

Rovnice přímky m procházející body $P [0, -v]$ a $Q [q, 0]$ má tvar

$$vx - qy - vq = 0.$$

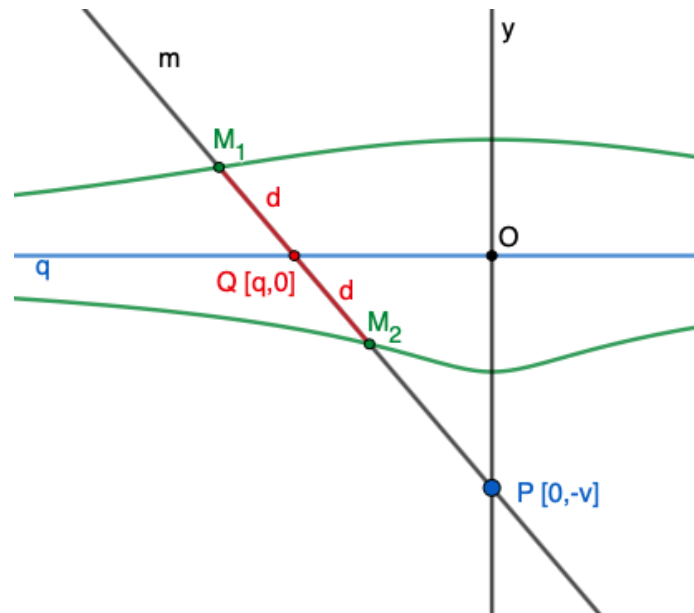
Z rovnice přímky m vytkneme q a dosadíme do rovnice kružnice k_d . Získáme

$$\left(x - \frac{vx}{y+v}\right)^2 + y^2 = d^2.$$

Po úpravách pak již získáme námi hledanou rovnici z (4.1):

$$x^2 y^2 + (y+v)^2 (y^2 - d^2) = 0.$$

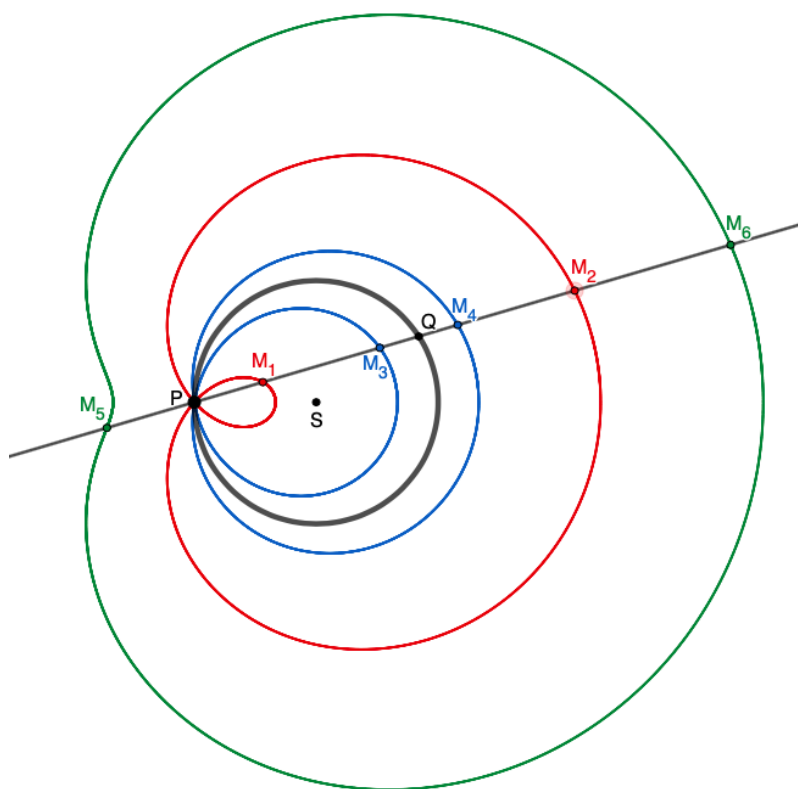
□



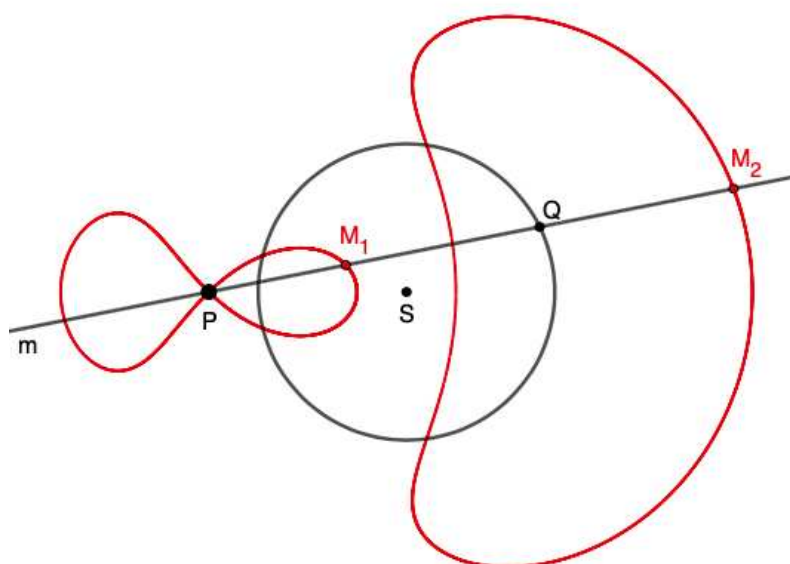
Obrázek 4.4: Zkrácená konchoida umístěné v počátku soustavy souřadnic

4.2 Přímá konchoida kružnice

Konchoidy kružnice lze rozdělit do dvou základních skupin, podle polohy bodu P . Leží-li bod P na kružnici k , výslednou trajektorií bude jedna z Pascalových závitnic (obr. 4.5). Neleží-li bod P na kružnici k , výsledná konchoida se rozdělí na dvě části (větve), jak můžeme vidět na obr. 4.6 [2, str. 244].



Obrázek 4.5: Přímá konchoida kružnice, $P \in k$ (GeoGebra)



Obrázek 4.6: Přímá konchoida kružnice, $P \notin k$

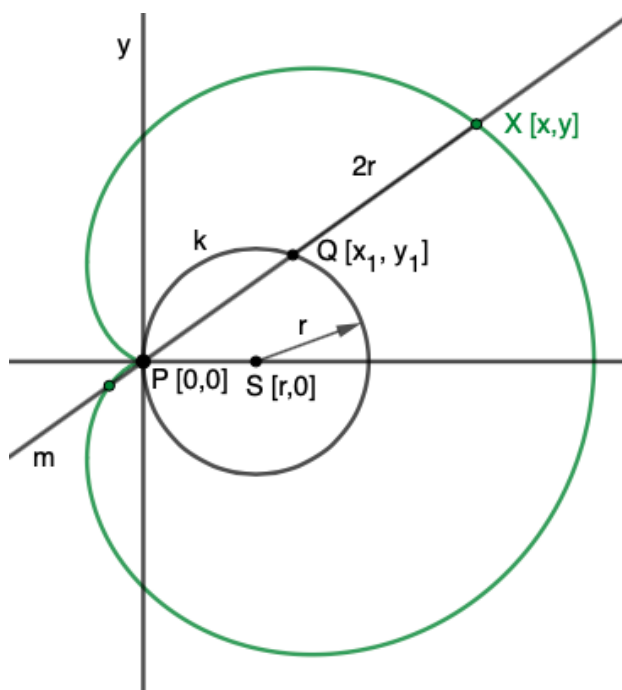
Jelikož je postup konstrukce přímé konchoidy kružnice zcela obdobný předchozí konstrukci přímé konchoidy přímky, nebudeme zde tento postup znovu opakovat. Podíváme se ovšem na důkaz konstrukce Pascalových závitnic pomocí právě tohoto pohybu.

Nejprve si ještě ale řekněme, jak vypadá rovnice Pascalovy závitnice. Pokud bychom Pascalovu závitnici položili do pravoúhlé soustavy souřadnic tak, aby bod P ležel v počátku soustavy a střed kružnice k ležel na kladné poloose x , pak by tato křivka měla rovnici

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = d^2(x^2 + y^2). \quad (4.2)$$

kde $r > 0$ je poloměrem kružnice k a $d > 0$ je vzdálenost tvořícího bodu Pascalovy závitnice od bodu Q [2, str. 243].

Důkaz. Položíme si kružnici k a bod P do soustavy souřadnic tak, jako u definice rovnice Pascalovy závitnice (4.2) a vyznačíme si nejdůležitější body a vzdálenosti (obr. 4.7).



Obrázek 4.7: Přímá konchoida kružnice v počátku soustavy souřadnic

Množinu všech bodů X nalezneme pomocí vzorce pro vzdálenost bodů $|QX|$:

$$d = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}. \quad (4.3)$$

K určení této rovnice ale potřebujeme znát souřadnice bodu Q . Ty můžeme získat soustavou dvou rovnic o dvou neznámých. První z nich bude rovnice kružnice se středem S a poloměrem r , druhá bude rovnice přímky m , procházející body P a Q [6, str. 28].

$$(x_1 - r)^2 + y_1^2 = r^2,$$

$$y \cdot x_1 = x \cdot y_1.$$

Ze druhé rovnice vytkneme y_1 a dosadíme do první. Dostaneme se k rovnici

$$x_1^2 x^2 - 2x_1 x^2 r + x_1^2 y^2 = 0,$$

ze které můžeme dalšími úpravami vyjádřit x_1 . Zpětně dosadíme a získáme souřadnice bodu Q :

$$x_1 = \frac{2x^2 r}{x^2 + y^2}, \quad y_1 = \frac{2xyr}{x^2 + y^2}.$$

Nyní můžeme již dosadit do (4.3). Vzhledem k náročnosti algebraických úprav budeme následující úpravu rovnice provádět podrobněji než obvykle. Nejprve tedy dosadíme a rovnici umocníme, abych odstranili odmocninu. Získáme:

$$d^2 = \left(x - \frac{2x^2 r}{x^2 + y^2} \right)^2 + \left(y - \frac{2xyr}{x^2 + y^2} \right)^2.$$

Výrazy umocníme a sečteme zlomky se stejným jmenovatelem.

$$d^2 = x^2 + y^2 - \frac{4xr \cdot (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 r^2 \cdot (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Zlomky zkrátíme a vynásobíme výrazem $(x^2 + y^2)$.

$$d^2 \cdot (x^2 + y^2)^2 = (x^2 + y^2)^2 - 4xr \cdot (x^2 + y^2) + 4x^2 r^2.$$

Nyní už stačí si jen povšimnout, že na pravé straně rovnice máme algebraický vzorec $(a^2 - 2ab + b^2)$. Poslední úpravou získáme

$$d^2 \cdot (x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 - 2xr)^2,$$

tedy rovnici Pascalovy závitnice z (4.2). □

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo přehledně sepsat důkazy vybraných konstrukcí z deskriptivní a kinematické geometrie. V první kapitole jsme tedy nejprve rozebrali kuželo-sečky. Představili jsme jejich definice a základní vlastnosti, odvodili jejich rovnice a popsali a dokázali jednak jejich bodové konstrukce, jednak jejich konstrukce pomocí hyperoskulačních kružnic. V souvislosti s tím jsme se také zabývali hlubším pochopením křivosti a její rolí mezi křivkami a oskulačními kružnicemi daných křivek.

Třetí kapitola byla věnována cyklickým křivkám. Nejprve jsme zavedli pro nás nejnütnější pojmy z kinematické geometrie a následně se věnovali konstrukcím definovaných pohybů a jejich důkazům. V důkazech těchto konstrukcí jsme kladli důraz na to, abychom používali pouze elementární prostředky, které budou srozumitelné například i pro žáky středních škol. Ve čtvrté kapitole jsme pak pokračovali dalšími kinematickými křivkami, a to konchoidami.

První kapitola byla věnována pojmu křivka a křivost. V tomto ohledu se jako cenný zdroj ukázala učebnice od B. O. Гордона s názvem Курс начертательной геометрии, ve které autor vysvětluje tyto pojmy na jednoduchých příkladech.

Co se týče zdrojů k ostatním kapitolám, cenným zdrojem ke konstrukcím kuželeseček byla, v úvodu již zmíněná, učebnice *Deskriptivní geometrie I.* od prof. RNDr. Aloise Urbana. Dále jsme ale také využili několik dalších učebnic deskriptivní geometrie, z nichž největší význam měla učebnice *Deskriptivní geometrie pro střední školy* od RNDr. Evy Pomykalové.

Pro definice kinematických křivek jsme využili zejména učebnici *Deskriptivní geometrie II.* od prof. RNDr. Aloise Urbana. Pro důkazy kinematických křivek jsme pak využili diplomovou práci *Kinematická geometrie v rovině* od Bc. Zdeňky Javorské. I když je

tato práce psaná jazykem kinematické geometrie a nevěnuje se přímo jednotlivým konstrukcím, můžeme v ní nalézt odvození rovnic našich vybraných kinematických křivek, což jsme využili pro důkazy některých konstrukcí v této práci.

U programu GeoGebra se ukázalo, že není pouze pomocníkem při konstrukcích kinematických křivek, nýbrž je taky skvělým nástrojem pro tvorbu obrázkového materiálu do této práce. Všechny obrázky obsažené v této práci byly vytvořeny v programu GeoGebra přímo pro účely této práce.

Tato práce nemusí sloužit pouze jako doplňkový učební text žákům středních škol, ale může také motivovat učitele matematiky pro práci s Geogebrou nebo posloužit například jako podklad pro náplň speciálních hodin či seminářů.

Literatura

- [1] A. Urban. *Deskriptivní geometrie I*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965.
- [2] A. Urban. *Deskriptivní geometrie II*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1967.
- [3] В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огиевский. Курс начертательной геометрии. 23. vydání. Přeložila Ю. Б. Иванова. Moskva: Наука, 1988. ISBN 5-02-013740-5. Dostupné online na: <http://alexandr4784.narod.ru/kngg.html>
- [4] E. Pomykalová. *Deskriptivní geometrie pro střední školy*. Praha: Prometheus, 2010. ISBN 978-80-7196-400-1.
- [5] K. Drápek, L. Drs. *Deskriptivní geometrie pro III. a IV. ročník tříd gymnázií se zaměřením na matematiku*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. ISBN 80-04-23393-7.
- [6] Z. Javorská. *Kinematická geometrie v rovině*. Praha, 2016. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky. Vedoucí práce RNDr. Petra Surynková, Ph.D.
- [7] L. Drs. *Deskriptivní geometrie pro střední školy II*. Praha: Prometheus, 1996. ISBN 80-7196-025-X.

Příloha

GeoGebra – Kniha

Práce je doplněna konstrukcemi v programu GeoGebra, které jsou dostupné v online knize <https://www.geogebra.org/m/hewpwnq>. V textu práce se pod některými obrázky vyskytují odkazy právě na tyto jednotlivé konstrukce.

V konstrukcích je možné zobrazovat a skrývat objekty, měnit parametry zadání a co je pro účely této práce hlavní, spouštět animace a zaznamenávat dráhu pohybujícího se bodu.