FUNKCE DEFINOVANÁ IMPLICITNĚ

Funkce jedné proměnné $y = f(x)$ definovaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$.

Ověření předpokladů o existenci funkce $y = f(x)$ a spojitosti její derivace.

Výpočet první a druhé derivace.

Rovnice tečny ke grafu implicitně zadané funkce. Přibližný výpočet funkční hodnoty.

Funkce jedné proměnné $y = f(x)$ definovaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$

- **Věta (o implicitní funkci)**: Předpokládejme, že
  a) funkce $F(x, y)$ má spojité obě parciální derivace v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$,
  b) $F(x_0, y_0) = 0$,
  c) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

  Pak existují čísla $\delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ a jediná funkce $y = f(x)$, definovaná v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, pro kterou platí:
  1) $y_0 = f(x_0)$,
  2) $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta): y = f(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ a $F(x, f(x)) = 0$,
  3) funkce f je spojitá a má spojitou derivaci f' v intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,
  4) $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta): f'(x) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) / \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))$

Funkce jedné proměnné $y = f(x)$ definovaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$

- **Věta (Zobecnění věty o implicitní funkci)**: Předpokládejme, že
  a) funkce $F(x, y, z)$ má spojité parciální derivace v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$,
  b) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$,
  c) $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

  Pak existují čísla $\delta > 0$ a $\varepsilon > 0$ a jediná funkce $z = f(x, y)$, definovaná v okolí $U_\delta(x_0, y_0)$ bodu $[x_0, y_0]$, pro kterou platí:
  1) $z_0 = f(x_0, y_0)$,
  2) $\forall\, [x, y] \in U_\delta(x_0, y_0): z = f(x, y) \in (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$ a $F(x, y, f(x, y)) = 0$,
  3) funkce f je spojitá a má spojité parciální derivace podle x a podle y v okolí $U_\delta(x_0, y_0)$
  4) $\forall\, [x, y] \in U_\delta(x_0, y_0): \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial z}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y} / \frac{\partial F}{\partial z}$

  přičemž parciální derivace funkce f jsou uvažovány v bodě $[x, y]$ a parciální derivace funkce F jsou uvažovány v bodě $[x, y, F(x, y)]$