FUNKCE DVOU A TŘÍ PROMĚNNÝCH

Definiční obor, spojitost, graf.

Parciální derivace 1. řádu, gradient a jejich význam.

DEFINIČNÍ OBOR A SPOJITOST

- ***Definiční obor*** je množina všech hodnot nezávisle proměnných, pro které je funkce definovaná.
- Definiční obor funkce dvou proměnných je podmnožina $\mathbb{R}^2$, pro funkci tří proměnných je to podmnožina $\mathbb{R}^3$.
- ***Obor hodnot*** funkce f o n proměnných, definované na množině $M \subset E_n$, je množina $H(f) = \{y \in \mathbb{R}; \exists X \in M: y = f(X)\}$.
- ***Spojitost***: Funkce f je spojitá v bodě (x_0, y_0), pokud:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

GRAF FUNKCE

- ***Grafem funkce*** f *nazýváme množinu* $\mathrm{gr}(f) = \{[X;\ y] \in E_{n+1}; X \in M, y = f(X)\}$.
- Graf funkce dvou proměnných je plocha v $\mathbb{R}^3$.
- Graf funkce tří proměnných je objekt v $\mathbb{R}^4$ (představa: hyperplocha, barevná mapa teploty v místnosti).
- izokřivky (izočáry) = množina bodů $\{[x_1; x_2] \in E_2; f(x_1, x_2) = k\}$
  → vrstevnice, izotermy, izobary
  → rovnoběžkové kružnice $x^2 + y^2 = k, k > 0$
  na praboloidu s rovnicí $z = x^2 + y^2$
- izoplochy = množina bodů $\{[x_1; x_2; x_3] \in E_3; f(x_1, x_2, x_3) = k\}$

PARCIÁLNÍ DERIVACE

- **Definice**: Předpokládejme, že $y = f(x_1, \dots, x_n)$ je funkce n proměnných, $A = [a_1, \dots, a_n] \in D(f)$, i je jedno z čísel1 $1, \dots, n$ a e_i je jednotkový vektor v E_n, orientovaný souhlasně se souřadnicovou osou x_i. Existuje-li konečná limita $\lim_{h \to 0} \frac{f(A+he_i, y) - f(A)}{h}$, pak její hodnotu nazýváme parciální derivací funkce f podle proměnné x_i v bodě A a označujeme ji $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$, $\frac{\partial}{\partial x_i} f(A)$ nebo $\frac{\partial y}{\partial x_i}(A)$.

PARCIÁLNÍ DERIVACE

Funkce f má spojité parciální derivace podle všech proměnných v bodě A.

↓

f je diferencovatelná v bodě A

1. f je spojitá v bodě A.
2. Existuje tečná rovina ke grafu funkce f v bodě A.
3. Existuje diferenciál funkce f v bodě A.
4. Derivace f ve směru daném nenulovým vektorem u existuje.
5. Gradient funkce f v bodě A má geometrický a fyzikální význam.

PARCIÁLNÍ DERIVACE PRVNÍHO ŘÁDU - GEOMETRICKÝ VÝZNAM

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$
- udávají změnu funkce vzhledem k jedné proměnné při zafixování ostatních proměnných, rychlost růstu ve směrech rovnoběžných s osami → $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ směrnice tečny ke grafu křivky v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$, která vznikne jako řez plochy rovinou $y = y_0$
- speciální případ směrových derivací

GRADIENT FUNKCE

- **Definice**: Gradient funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ v bodě A je vektor $\operatorname{grad} f(A) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A))$.
- Gradient $f(x,y)$ je vektor: $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$
- Ukazuje směr největšího růstu funkce.
- Pro definiční obory platí: $D(\operatorname{grad} f) \subset D(f)$

GEOMETRICKÝ A FYZIKÁLNÍ VÝZNAM GRADIENTU

- **Geometrický**:

  vektor $\mathrm{grad}\, f(A)$ udává směr maximálního růstu funkce f v bodě A,

  tj. vektor $\mathrm{grad}\, f(A)$ je kolmý k izokřivce, resp. k izoploše, která prochází bodem A

  $-\mathrm{grad}\, f(A)$ udává směr maximálního poklesu např. teploty v bodě A

- **Fyzikální**:

  gradient vyjadřuje intenzitu změny (např. u teploty/tlaku směr, ve kterém je v bodě A růst teploty/tlaku maximální)