FUNCKE DVOU
A
TŘÍ PROMĚNNÝCH

Tečná rovina, normálový vektor, rovnice normály ke grafu funkce $z = f(x, y)$.

Přibližný výpočet funkční hodnoty. Totální diferenciál.

Derivace ve směru a její výpočet, geometrický význam.

TEČNÁ ROVINA

- **Definice**: Je-li funkce $f(x, y)$ diferencovatelná v bodě $A = (x_0, y_0)$, pak tečná rovina ke grafu funkce f v bodě $P = [A, f(A)]$ má rovnici :
$$z = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$
- Pro funkci více proměnných $y = f(x_1, \dots, x_n)$ je tečná nadrovina v bodě $A = (a_1, \dots, a_n)$ dána rovnicí:
$y = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot (x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \cdot (x_n - a_n)$

NORMÁLOVÝ VEKTOR A ROVNICE NORMÁLY KE GRAFU FUNKCE

- **Definice**: Je-li funkce $f(x,y)$ diferencovatelná v bodě $A = [x_0, y_0]$, pak normálový vektor k tečné rovině v bodě $P = [A, f(A)]$ je $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), -1\right)$ a rovnice normály ke grafu funkce je dána parametricky:

$$x = x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot t$$
$$y = y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot t$$
$$z = f(x_0, y_0) - t, t \in \mathbb{R}$$

TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL

- **Definice**: Předpokládejme, že $y = f(x_1, \dots, x_n)$ je diferencovatelná v bodě $A = [a_1, \dots, a_n]$. Totálním diferenciálem funkce f v bodě A nazýváme výraz:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot (x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \cdot (x_n - a_n)$$

- Pro funkci dvou proměnných lze psát diferenciál ve tvaru:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot dy$$

TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL

- Předpokládejme, že f je funkce n proměnných.

  a) Má-li f spojité parciální derivace podle všech proměnných v bodě A, pak je diferencovatelná v bodě A.

  b) Je-li M otevřená množina v E_n a funkce f má spojité parciální derivace podle všech proměnných v množině M, pak je diferencovatelná v množině M.

DERIVACE VE SMĚRU

- Předpokládejme, že f je funkce n proměnných $A \in D(f)$ a $\mathbf{u}^0$ je jednotkový vektor v E_n. Existuje-li konečná limita $\lim_{h\to 0}\frac{f(A+h\mathbf{u}^0)-f(A)}{h}$, pak její hodnotu nazýváme derivací funkce f ve směru $\mathbf{u}^0$ v bodě A (nebo také směrovou derivací f v bodě A podle $\mathbf{u}^0$) a označujeme ji $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}^0}(A)$.
- Také platí pro nenulový vektor $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(A) = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A) \cdot u_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \cdot u_n\right)$$

DERIVACE VE SMĚRU

- **Věta**: Předpokládejme, že funkce f (n proměnných) je diferencovatelná v bodě $A \in E_n$. Předpokládejme dále, že $\mathbf{u}$ je nenulový vektor v E_n. Pak derivace funkce f v bodě A ve směru $\mathbf{u}$ existuje a je možné ji vypočítat pomocí formule:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(A) = \frac{\operatorname{grad} f(A) \cdot \mathbf{u}}{||\mathbf{u}||}$$

- Geometricky směrová derivace udává rychlost změny funkční hodnoty ve směru vektoru $\mathbf{u}$.