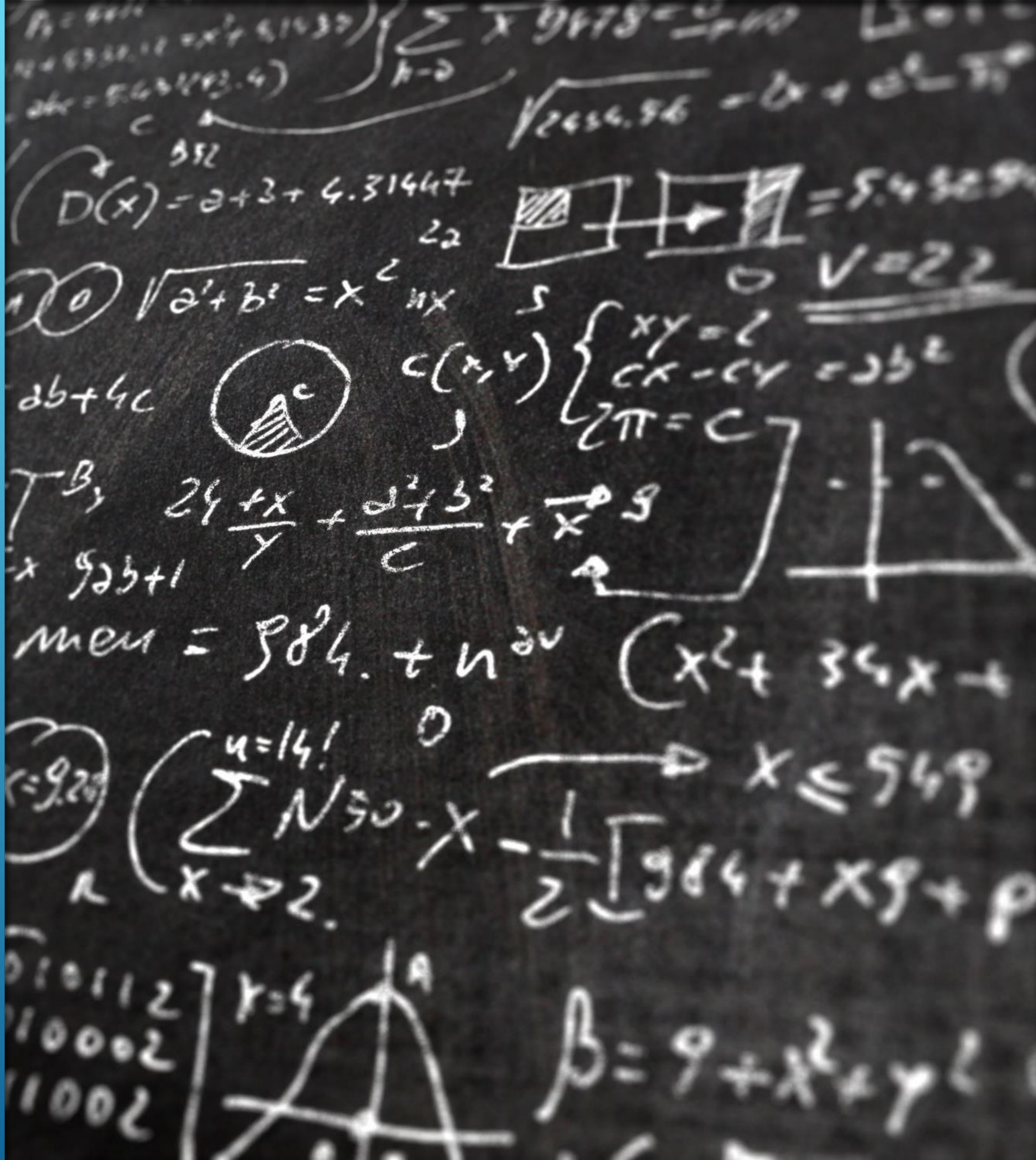
FUNKCE DVOU A TŘÍ PROMĚNNÝCH

Parciální derivace vyšších řádů.

Lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$. Nutné a postačující podmínky.

Vyšetření lokálních extrémů jednoduchých funkcí. Vyšetření globálních extrémů jednoduchých funkcí.

Vázané extrémy.



PARCIÁLNÍ DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

- **Definice**: Parciální derivací 2. řádu (nebo druhou parciální derivací) funkce f podle x_i a x_j a označujeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, případně $\frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}$. Pro definiční obory platí inkluze $D\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) \subset D\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \subset D(f)$.
- **Věta:** (o záměně pořadí parciálních derivací)

  Předpokládejme, že f je funkce n proměnných $x_1, \dots, x_n$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Jestliže obě druhé parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existují v bodě $X = [x_1, \dots, x_n]$ a alespoň jedna z nich je v bodě X spojitá, pak $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X)$.

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

- **Nutná podmínka existence lokálního extrému**:

  Nechť funkce f, n proměnných, je diferencovatelná v bodě A. Má-li f v bodě A lokální extrém, pak $\operatorname{grad} f(A) = 0$.

- Diferencovatelná funkce f může mít v bodě A lokální extrém pouze tehdy, platí-li $\operatorname{grad} f(A) = 0$.

- Funkce f (n proměnných) může mít v bodě $A \epsilon E_n$ lokální extrém pouze v případě, že:

  i) f je diferencovatelná v bodě A a $\operatorname{grad} f(A) = 0$

  ii) nebo f není diferencovatelná v bodě A.

Bod A, který vyhovuje podmínce i) nebo podmínce ii), se nazývá kritický bod funkce f (též stacionární bod).

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

- **Postačující podmínka existence lokálního extrému**:
Předpokládejme, že $y = f(x_1, x_2)$ je funkce dvou proměnných, která má první i druhé parciální derivace spojité v bodě A a $\mathrm{grad}\, f(A) = 0$. Pak platí:

1) jestliže $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(A) > 0$ a $\det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} \end{pmatrix} > 0$, má f v bodě A ostré lokální minimum

2) jestliže $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(A) < 0$ a $\det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} \end{pmatrix} > 0$, má f v bodě A ostré lokální maximum

3) jestliže $\det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} \end{pmatrix} < 0$, pak f nemá v bodě A lokální extrém

LOKÁLNÍ EXTRÉMY

- označme matici $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} \end{pmatrix}$
- pokud $\det M < 0$ a A je kritický bod, graf funkce f v okolí bodu A vytváří ***sedlo***
- pokud $\det M = 0$ nebo $\det M > 0$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(A) = 0$, nemůžeme rozhodnout o tom, zda funkce f má nebo nemá v bodě A lokální extrém a případně jakého typu extrém je

VYŠETŘENÍ LOKÁLNÍCH EXTRÉMŮ

- **Postup hledání lokálních extrémů funkce f dvou proměnných**:

1. Najdeme všechny body, ve kterých je funkce f diferencovatelná a má tam obě parciální derivace rovny nule.

2. Vypočítáme druhé parciální derivace funkce f a zjistíme, jaké hodnoty ve všech nalezených bodech mají výrazy $\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}$ a $\det M$. O existenci a typu lokálního extrému pak rozhodneme pomocí postačující podmínky.

VYŠETŘENÍ GLOBÁLNÍCH EXTRÉMŮ

- **Věta (o existenci absolutních extrémů funkce na dané množině).**
  Je-li $M \subset E_n$ neprázdná, omezená a uzavřená množina a je-li funkce f spojitá na M, pak v množině M existují body X_1 a X_2 takové, že $f(X_1) = \max_M f$ a $f(X_2) = \min_M f$.
- spojitá funkce na neprázdné množině M, která je omezená a uzavřená, nabývá maxima a minima.
- **Postup hledání globálních extrémů funkce f dvou proměnných**:

1. Zjistíme existenci extrémů z předchozí věty.

2. funkce může svých absolutních extrémů na množině M nabývat v bodech $X \in M°$, ve kterých je f diferencovatelná a má tam všechny parciální derivace rovny nule, NEBO kde není diferencovatelná NEBO v bodech $X \in \partial M$

3. vypočítáme hodnoty funkce f ve všech získaných bodec, největší hodnota je rovna $\max_M f$ a nejmenší hodnota je rovna $\min_M f$

VÁZANÉ EXTRÉMY

- Hledáme maximum nebo minimum funkce $y = f(x_1, \dots, x_n)$ za podmínky, že $g(x_1, \dots, x_n) = 0$. Podmínce se říká *vazba* a extrémy funkce f v množině bodů, vyhovujících podmínce, se nazývají *vázané extrémy*.