



JEDNODUCHÉ HLADKÉ KŘIVKY

Jejich parametrizace. Úsečka, kružnice, elipsa, šroubovice. Graf funkce jedné proměnné. Křivka se zadanou parametrizací.

JEDNODUCHÁ HLADKÁ KŘIVKA

Nechť $P(t) = [\varphi(t), \Psi(t)]$, resp. $P(t) = [\varphi(t), \Psi(t), \vartheta(t)]$ je spojitě zobrazení intervalu $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ do E_k (kde $k = 2$ nebo $k = 3$, φ, Ψ, ϑ jsou souřadnicové funkce, t je parametr). Předpokládejme, že:

- a) zobrazení P je v intervalu $\langle a, b \rangle$ prosté, s možnou výjimkou případu, kdy $P(a) = P(b)$ a
- b) P má omezenou, spojitou a nenulovou derivaci P' v otevřeném intervalu (a, b) .

Množinu všech bodů $P(t)$ pro $t \in \langle a, b \rangle$ (tj. obor hodnot zobrazení P) pak nazýváme jednoduchá hladká křivka v E_k . Zobrazení P nazýváme parametrizace.

Uvedenou jednoduchou hladkou křivku nazýváme uzavřenou, je-li $P(a) = P(b)$.

* Každá jednoduchá hladká křivka má nekonečně mnoho parametrizací. Neměla by obsahovat bod vratu ani uzlový bod.

TEČNÝ VEKTOR, ORIENTO VANÁ JEDNODUCHÁ HLADKÁ KŘIVKA

Předpokládejme, že P je parametrizace, definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$, jednoduché hladké křivky C v E_k . Pak vektor $P'(t)$ má pro každé $t \in (a, b)$ tečný směr ke křivce C . Vektory $\pm P'(t)/\|P'(t)\|$ mají oba rovněž tečný směr ke křivce C a navíc mají jednotkovou délku.

Jednoduchou hladkou křivku C nazveme orientovanou jednotkovým tečným vektorem τ , pokud zvolíme:

a) $\tau = P'(t)/\|P'(t)\|$ ve všech bodech $P(t)$, odpovídajících $t \in (a, b)$,

..... jednoduchá hladká křivka C je orientovaná souhlasně s parametrizací P ,
 $P(a)$ nazýváme počáteční bod křivky C , $P(b)$ je koncový bod křivky C

b) nebo $\tau = -P'(t)/\|P'(t)\|$ ve všech bodech $P(t)$, odpovídajících $t \in (a, b)$.

..... jednoduchá hladká křivka C je orientovaná nesouhlasně s parametrizací P ,
 $P(b)$ nazýváme počáteční bod křivky C , $P(a)$ je koncový bod křivky C

* U uzavřené křivky oba body $P(a)$ a $P(b)$ splývají.

JEDNODUCHÁ PO ČÁSTECH HLADKÁ KŘIVKA

Předpokládejme, že $C_1, \dots, C_n$ jsou jednoduché hladké křivky v E_k takové, že

- a) koncový bod je totožný s počátečním bodem $C_1 = C_2, C_2 = C_3, \dots, C_{n-1} = C_n$
- b) kromě bodů zmíněných v a) a kromě možného případu, kdy počáteční bod je koncový bod $C_1 = C_n$, nemají žádné dvě z křivek $C_1, \dots, C_n$ žádný další společný bod.

Pak sjednocení $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$ nazýváme jednoduchou po částech hladkou křivkou v E_k .

Orientace jednoduché po částech hladké křivky C je dána orientací jejích jednotlivých hladkých částí $C_1, \dots, C_n$.

Jednoduchá po částech hladká křivka C se nazývá uzavřená, jestliže počáteční bod je koncový bod.

Jednoduchá po částech hladká křivka v E_k je omezenou měřitelnou množinou v E_k , jejíž k -rozměrná míra je rovna nule.

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL SKALÁRNÍ FUNKCE NA JEDNODUCHÉ HLADKÉ KŘIVCE

Nechť C je jednoduchá hladká křivka v E_2 nebo v E_3 a P je její parametrizace, definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$. Nechť f je funkce, která je definovaná a omezená na křivce C . Existuje-li Riemannův integrál $\int_a^b f(P(t)) \cdot \|P'(t)\| dt$, pak o funkci f říkáme, že je integrovatelná na křivce C . Křivkový integrál skalární funkce f na křivce C pak označujeme $\int_C f ds$ definujeme jej rovnicí:

$$\int_C f ds = \int_a^b f(P(t)) \cdot \|P'(t)\| dt$$

* existence i hodnota křivkového integrálu f na C nezávisí na volbě parametrizace křivky C

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL SKALÁRNÍ FUNKCE NA JEDNODUCHÉ PO ČÁSTECH HLADKÉ KŘIVCE

Nechť C je jednoduchá po částech hladká křivka v E_2 nebo v E_3 , která je složena z jednoduchých hladkých křivek $C_1, \dots, C_n$. Nechť f je skalární funkce, která je definovaná a omezená na křivce C . Je-li funkce f integrovatelná na každé z křivek $C_1, \dots, C_n$, pak říkáme, že je integrovatelná na křivce C . Křivkový integrál skalární funkce f na křivce C pak definujeme rovnicí:

$$\int_C f \, ds = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} f \, ds$$

* pro křivkový integrál skalární funkce se často používá název křivkový integrál 1. druhu

* integrálem $\int_C ds$ definujeme délku křivky C , značíme ji $l(C)$

Je-li C jednoduchá p.č. hladká křivka a f je spojitá funkce na každé z jejích hladkých částí, pak f je integrovatelná funkce na C .

Ani existence, ani hodnota křivkového integrálu skalární funkce nezávisí na orientaci křivky.

VÝPOČET KŘIVKOVÝ INTEGRÁL SKALÁRNÍ FUNKCE

Předpokládejme, že $P = [\varphi, \psi, \vartheta]$ je parametrizace jednoduché hladké křivky C , definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$. Křivkový integrál funkce f na jednoduché hladké křivce C pak můžeme vypočítat pomocí vzorce $\int_C f \, ds = \int_a^b f(P(t)) \cdot \|P'(t)\| \, dt$. $f(P(t))$ získáme tak, že do funkce f za proměnné x, y, z dosadíme $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$; $z = \vartheta(t)$, za ds dosadíme $ds = \|P'(t)\| dt = \|(\varphi'(t), \psi'(t), \vartheta'(t))\| dt = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \vartheta'(t)^2}$ a integrujeme podle parametru t na intervalu $\langle a, b \rangle$, na kterém je definovaná parametrizace křivky C .

FYZIKÁLNÍ APLIKACE KŘIVKOVÉHO INTEGRÁLU SKALÁRNÍ FUNKCE

- **hmotnost tělesa:** $m = \int_C \rho(x, y) ds$

- **statický moment:** $m_x = \int_C y \cdot \rho(x, y) ds$ $m_y = \int_C x \cdot \rho(x, y) ds$

- **těžiště:** $x_T = \frac{m_y}{m}, y_T = \frac{m_x}{m}$

- **moment setrvačnosti:**

$$J_x = \int_C y^2 \cdot \rho(x, y) ds \quad J_y = \int_C x^2 \cdot \rho(x, y) ds \quad J_o = \int_C (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y) ds$$

FYZIKÁLNÍ APLIKACE KŘIVKOVÉHO INTEGRÁLU SKALÁRNÍ FUNKCE

- **hmotnost tělesa:** $m = \iiint_M \rho(x, y, z) dx dy dz$, kde $M \subset E_3$ je měřitelná množina a $\rho(x, y, z)$ je hustota

- **statický moment:** vzhledem k rovině xy : $m_{xy} = \iiint_M z \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$

$$\text{vzhledem k rovině } xz: m_{xz} = \iiint_M y \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\text{vzhledem k rovině } yz: m_{yz} = \iiint_M x \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

- **těžiště:** $x_T = \frac{m_{yz}}{m}$, $y_T = \frac{m_{xz}}{m}$, $z_T = \frac{m_{xy}}{m}$

- **moment setrvačnosti:**

$$\text{vzhledem k rovině } xy: J_{xy} = \iiint_M z^2 \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\text{vzhledem k ose } x: J_x = \iiint_M (y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\text{vzhledem k rovině } xz: J_{xz} = \iiint_M y^2 \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\text{vzhledem k ose } y: J_y = \iiint_M (x^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\text{vzhledem k rovině } yz: J_{yz} = \iiint_M x^2 \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\text{vzhledem k ose } z: J_z = \iiint_M (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\text{vzhledem k počátku } O: J_O = \iiint_M (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL VEKTOROVÉ FUNKCE/POLE (KŘIVKOVÝ INTEGRÁL 2. DRUHU)

Nechť C je jednoduchá p.č. hladká křivka v E_2 nebo v E_3 a $\mathbf{f}$ je vektorová funkce, která je definovaná a omezená na C . Říkáme, že vektorová funkce $\mathbf{f}$ je integrovatelná na křivce C , je-li skalární funkce $\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau}$ integrovatelná na C . Integrál $\int_C \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$ nazýváme křivkovým integrálem vektorové funkce $\mathbf{f}$ na křivce C a označujeme jej kratším způsobem $\int_C \mathbf{f} \cdot ds$.

* křivkový integrál $\int_C \mathbf{f} \cdot ds$ definuje práci, kterou vykoná síla $\mathbf{f}$ působením po dráze C

* Jednotkový tečný vektor $\boldsymbol{\tau}$ nemusí existovat v těch bodech jednoduché p.č. hladké křivky C , ve kterých se stýkají jednotlivé hladké křivky, ze kterých je p.č. hladká křivka C složena. Takových bodů je však konečně mnoho a křivkový integrál na chování integrované funkce v konečně mnoha bodech nezávisí.

* jiný zápis křivkového integrálu 2. druhu: $\int_C \mathbf{f} \cdot ds = \int_C (U dx + V dy + W dz) ds$,
kde $\mathbf{f} = (U, V, W)$

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL VEKTOROVÉ FUNKCE, VÝPOČET KŘIVKOVÉHO INTEGRÁLU VEKTOROVÉ FUNKCE

Je-li vektorová funkce $\mathbf{f}$ integrovatelná na křivce C , pak je integrovatelná i na křivce $-C$ a $\int_{-C} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = - \int_C \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$.

- Křivkový integrál vektorové funkce závisí na orientaci křivky.
- Změnou orientace se změní i znaménko tečného vektoru $\boldsymbol{\tau}$.

VÝPOČET KŘIVKOVÉHO INTEGRÁLU VEKTOROVÉ FUNKCE

Křivkový integrál vektorové funkce $\mathbf{f} = (u, v, w)$ na jednoduché hladké křivce C můžeme vypočítat pomocí parametrizace. Předpokládejme, že P je parametrizace křivky C definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$. Předpokládejme dále, že křivka C je orientovaná souhlasně s parametrizací P . Jednotkový tečný vektor v každém bodě $P(t)$ křivky C , odpovídajícím $t \in (a, b)$ (tedy

až na krajní body křivky C) lze vyjádřit: $\boldsymbol{\tau} = P'(t)/\|P'(t)\|$. Použijeme-li nyní formule $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(P(t)) \cdot \|P'(t)\| dt$ a $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_C (U dx + V dy + W dz) ds$ (případně $ds = \|P'(t)\| dt = \|(\varphi'(t), \psi'(t), \vartheta'(t))\| dt = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \vartheta'(t)^2}$), obdržíme:

$$\int_C \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \int_a^b \mathbf{f}(P(t)) \cdot \|P'(t)\| dt = \int_a^b [U \varphi'(t) + V \psi'(t) + W \vartheta'(t)] dt$$