



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA**  
Univerzita Karlova

## **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Bc. Zdeňka Javorská

# **Kinematická geometrie v rovině**

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Petra Surynková, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Učitelství matematiky a  
deskriptivní geometrie pro střední školy

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 28.7.2016

Zdeňka Javorská

Název práce: Kinematická geometrie v rovině

Autor: Bc. Zdeňka Javorská

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Petra Surynková, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Diplomová práce je rozdělena do tří kapitol. V první kapitole jsou vysvětleny základní pojmy kinematické geometrie, které jsou doplněny nejen obrázky, ale i dynamickými programy vytvořenými v softwaru GeoGebra. Druhá kapitola se zabývá konkrétními pohyby v rovině. Popisuje vznik křivek synteticky i analyticky. Ke každému pohybu je také na přiloženém CD dostupný program s animací pohybu. Poslední kapitola je věnována historii některých křivek a využití kinematické geometrie v praxi. Práce je vhodná pro vysokoškolské studenty oboru deskriptivní geometrie, ale může sloužit i jako motivace pro žáky na středních školách, hlavně odborných technických školách.

Klíčová slova: kinematická geometrie, eliptický pohyb, kardioidický pohyb, konchoidální pohyb, cyklický pohyb

Title: Kinematic geometry in the plane

Author: Bc. Zdeňka Javorská

Department: Department of mathematics education

Supervisor: RNDr. Petra Surynková, Ph.D., Department of mathematics education

Abstract: Diploma thesis is divided into three chapters. In first chapter are explained elementary ideas of kinematic geometry in the plane included not just images but also dynamic files made in software GeoGebra. Second chapter is about specific motions in the plane. It describes construction of the curves in synthetic and analytic way. Every motion has its own file with animation of that motion. Last chapter devoted to history of some curves and also to application of kinematic geometry in real life. This thesis is useful for university students of descriptive geometry, but it also may help as motivation for high school students, mainly students of technical schools.

Keywords: kinematic geometry, elliptic motion, cardioidic motion, conchoidal motion, cycloidal motion

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucí mé diplomové práce, RNDr. Petře Surynkové, Ph.D., za její rady a poznámky k textu a hlavně za obrovskou trpělivost, kterou se mnou měla. Díky patří i mé rodině, kamarádům a příteli, kteří byli oporou během celého mého studia na vysoké škole.

# Obsah

|   |           |
|---|-----------|
| Úvod  | 2         |
| <b>1 Elementární pojmy kinematické geometrie</b>      | <b>3</b>  |
| 1.1 Neproměnná rovinná soustava                       | 3         |
| 1.2 Zadání pohybu                                     | 6         |
| 1.3 Okamžitý střed otáčení                            | 9         |
| 1.4 Pevná a hybná polodie                             | 12        |
| 1.4.1 Konstrukce pevné a hybné polodie, obálky křivek | 13        |
| 1.5 Vratný pohyb                                      | 16        |
| <b>2 Speciální pohyby</b>                             | <b>18</b> |
| 2.1 Eliptický pohyb                                   | 18        |
| 2.2 Kardiodický pohyb                                 | 22        |
| 2.3 Konchoidální pohyb                                | 29        |
| 2.4 Cyklický pohyb                                    | 32        |
| 2.4.1 Cykloidální pohyb                               | 34        |
| 2.4.2 Epicykloidální pohyb                            | 35        |
| 2.4.3 Hypocykloidální pohyb                           | 38        |
| 2.4.4 Pericykloidální pohyb                           | 41        |
| 2.4.5 Evolventní pohyb                                | 42        |
| <b>3 Historie a využití</b>                           | <b>45</b> |
| 3.1 Cyklické křivky                                   | 45        |
| 3.2 Nikomédova konchoida                              | 47        |
| 3.3 Archimédova spirála                               | 50        |
| Závěr   | 52        |
| Seznam použité literatury                             | 53        |
| Seznam obrázků  | 54        |
| Seznam animací  | 56        |

# Úvod

Diplomová práce Kinematická geometrie v rovině by mohla sloužit jako doplňkový učební materiál hlavně studentům deskriptivní geometrie, ale i ti, které zajímá obecně geometrie, mohou v práci najít zajímavé pasáže. Cílem práce je přiblížit hlavní pojmy, seznámit čtenáře s typy různých křivek a také vzbudit zájem o geometrii. Geometrie, jako jeden z nejstarších vědních oborů, v dnešní době ztrácí na popularitě hlavně mezi mladšími studenty. Některé části práce jsou použitelné i na středních školách, kde by mezi vybranými studenty mohly podnítit touhu se geometrií zabývat více, protože práce využívá moderního softwaru k zobrazení pohybu a k upozornění na některé spojitosti mezi křivkami.

Psaný text je doplněn mnoha vlastními obrázky, díky kterým je pochopení látky snadnější a názornější. K důležitým příkladům křivek, k odvozování analytického vyjádření a dalším ilustracím jsou také v softwaru GeoGebra vytvořeny dynamické programy, pomocí nichž lze demonstrovat onu zvláštnost tohoto typu geometrie – pohyb křivek a bodů. Software GeoGebra jsem zvolila jednak kvůli možnosti si ho bezplatně pořídit, a tak je rozšířen nejen mezi studenty, ale také kvůli jeho velmi intuitivnímu ovládnutí, takže i uživatel, který předtím tento software neznal, nebude mít potíže s používáním vytvořených programů.

Struktura práce je následující. V první kapitole jsou popsány základní pojmy, které je potřeba znát k vybudování hlubší teorie o kinematické geometrii. Ilustrace přímo v textu urychlují pochopení daného termínu nebo problému. Text je psán co nejsrozumitelněji dnešnímu čtenáři. Odkazy na animace v přiložených programech jsou také psány rovnou u daných témat.

Druhá kapitola popisuje už konkrétní pohyby, zkoumá jejich křivky a spojitosti mezi jednotlivými pohyby. Odvozování křivek je prováděno buď pomocí syntetické nebo analytické geometrie. U vybraných případů jsou předvedeny oba přístupy. Protože trajektorie některých pohybů jsou křivky známé už studentům na střední škole (kružnice, elipsa, ...), je možné jejich odvození předvést na hodinách matematiky. Dynamické programy jsou uživatelsky jednoduché a čtenář může různě měnit parametry zadání, a tak vidí vzniklé trajektorie pohybů.

Třetí kapitola se zabývá historií některých křivek a využití kinematické geometrie v praxi. Zajímavé je využití například Archimédovy spirály k trisekci úhlu nebo kvadratuře kruhu, tedy ke klasickým problémům antické matematiky. Tato část je spíše stručným přehledem, kde všude se setkáváme s kinematickou geometrií. Případní zájemci o hlubší znalosti se mohou podívat do technických učebnic či jiných zdrojů.

Nedílnou součástí práce je přiložené CD, kde lze nalézt animace všech pohybů a jiné ilustrace vzniku křivek.

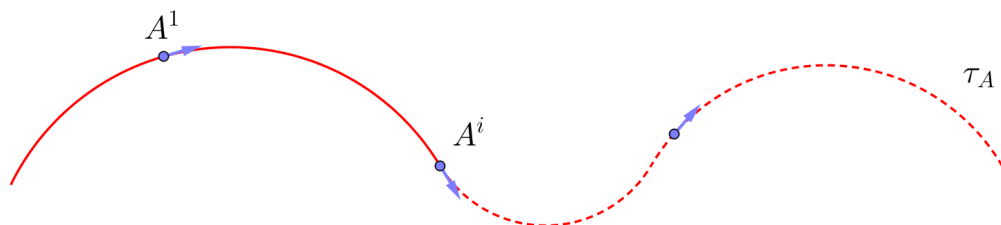
Cílem mé práce je tedy shrnout základní pojmy potřebné k pochopení kinematické geometrie, analyticky odvodit vyjádření vzniklých křivek, ale hlavně vytvořit dynamické programy, které budou moci používat studenti a učitelé matematiky a deskriptivní geometrie ve svých hodinách. Doufám, že za pomoci moderní technologie a programů lze čtenáře přesvědčit, že i na první pohled složité studium pohybu křivek můžu být zjednodušeno na přijatelnou úroveň nebo dokonce nadchnout pro hlubší studium geometrie.

# 1. Elementární pojmy kinematické geometrie

## 1.1 Neproměnná rovinná soustava

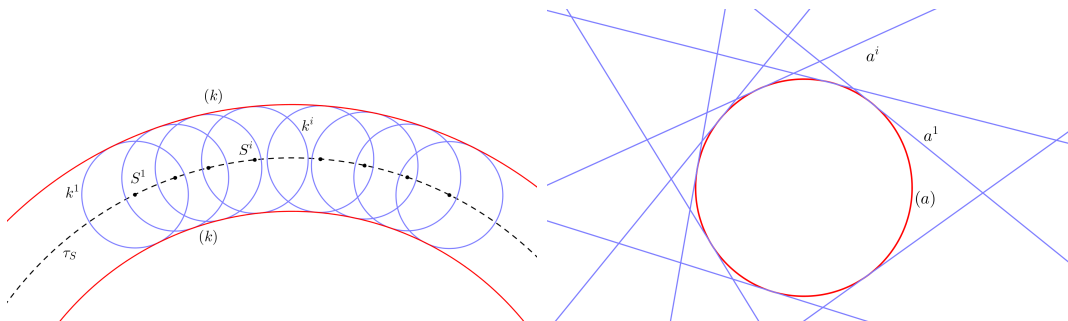
V této práci budeme *křivkou* rozumět, stejně jako v [1], spojitou dráhu pohybujícího se bodu, tedy nekonečnou množinu bodů, jejichž poloha závisí na jednom parametru. Tedy jako jednoparametrickou soustavu bodů. Také budeme převážně mluvit o rovinných křivkách, neboli o křivkách, jejichž všechny body leží v jedné rovině.

*Trajektorii* daného bodu budeme rozumět křivku, kterou vytvoří pohyb daného bodu. Označovat ji budeme písmenem  $\tau$  s indexem odpovídajícího bodu (obrázek 1.1).



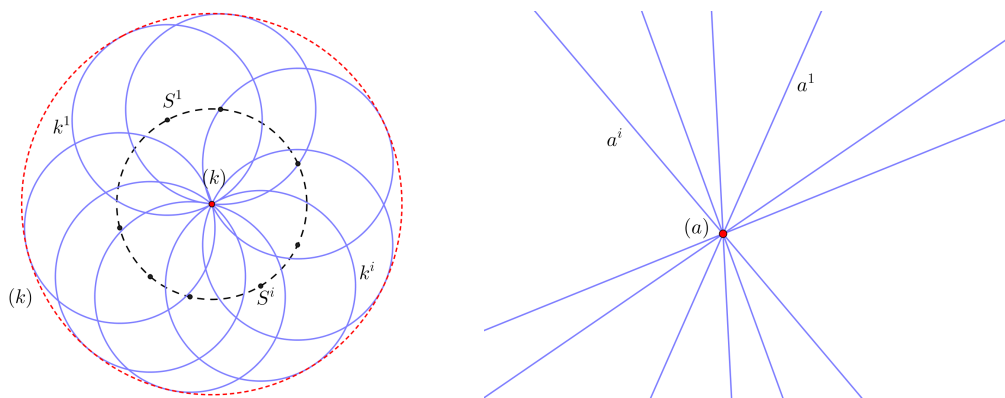
Obrázek 1.1: Trajektorie bodu

Máme-li dānu soustavu jednoparametrických křivek, kde se každā z křivek soustavy dotýkā jiné křivky v jednom bodě, pak tuto jednu křivku nazveme *obālkou dané soustavy křivek*. Stručně budeme říkat pouze *obālka* a značit ji budeme kulatými závorkami. Na levém obrázku 1.2 je příklad obālky, která má dvě větve. Střed kružnice  $k$  se pohybuje po trajektorii  $\tau_S$ . Obālka  $(k)$  se v každém svém bodě dotýkā kružnice  $k$  v nějaké její poloze  $k^i$ . Tedy  $(k)$  je složenā z bodů dotyku s  $k^i$ . Na druhém obrázku je obālkou přímek  $a^i$  kružnice  $(a)$ .



Obrázek 1.2: Křivková obālka kružnic a přímek

Obálkou ovšem nemusí být pouze křivka. Může nastat speciální případ, kdy budeme mít obálku bodovou, stejně jako na pravém obrázku 1.3. Nalevo je vidět případ, kdy jedna z větví zůstala křivkou a druhá větev je pouze jeden bod.



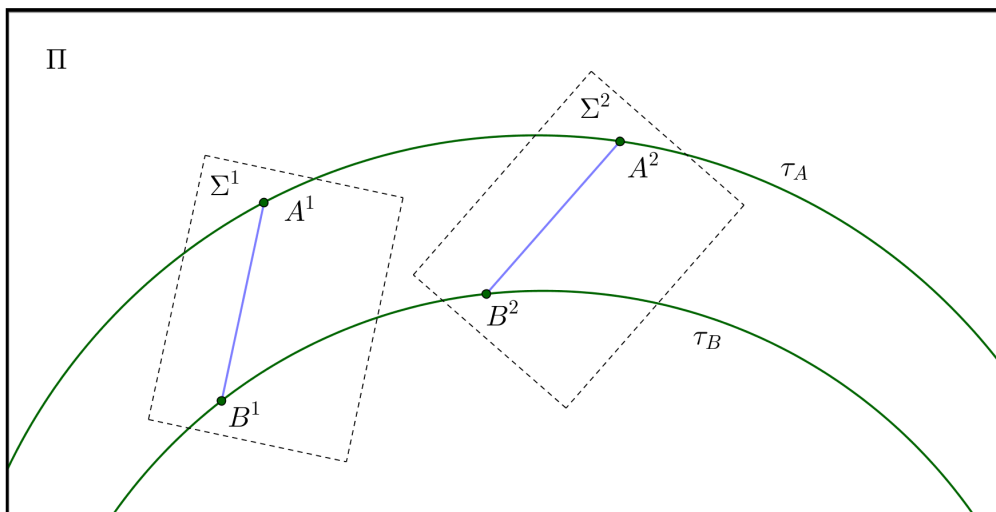
Obrázek 1.3: Bodová obálka kružnic a přímek

Pro vybudování kinematické geometrie v rovině potřebujeme zavést několik dalších pojmů. Prvním pojmem je *neproměnná rovinná soustava*, což je, podle [1], množina všech geometrických útvarů roviny, která je jako neproměnný celek podrobena pohybu. Jinými slovy, všechny křivky a body dané roviny nebudou měnit vzhledem k dané rovině svou polohu.

K tomu, abychom vytvořili křivky v kinematické geometrii, budeme pohybovat neproměnnou rovinnou soustavu  $\Sigma$  po pevné neproměnné rovinné soustavě  $\Pi$ . Tudíž body soustavy  $\Sigma$  budou v soustavě  $\Pi$  vytvářet trajektorie a křivky budou zase vytvářet obálky. Díky neproměnnosti soustavy  $\Sigma$  vyplývá, že pro každé dvě odpovídající si polohy  $\Sigma^1$  a  $\Sigma^2$  daného pohybu platí následující: Bodům  $A^1, B^1, \dots$  soustavy v poloze  $\Sigma^1$  jednoznačně odpovídají body  $A^2, B^2, \dots$  soustavy v poloze  $\Sigma^2$ , tedy i velikosti úseček  $A^1B^1$  a  $A^2B^2$  se musejí rovnat. A také křivkám  $a^1, b^1, \dots$  soustavy v poloze  $\Sigma^1$  odpovídající křivky  $a^2, b^2, \dots$  soustavy v poloze  $\Sigma^2$ , pro něž platí, že jsou to křivky shodné ve všech polohách soustavy  $\Sigma$ .

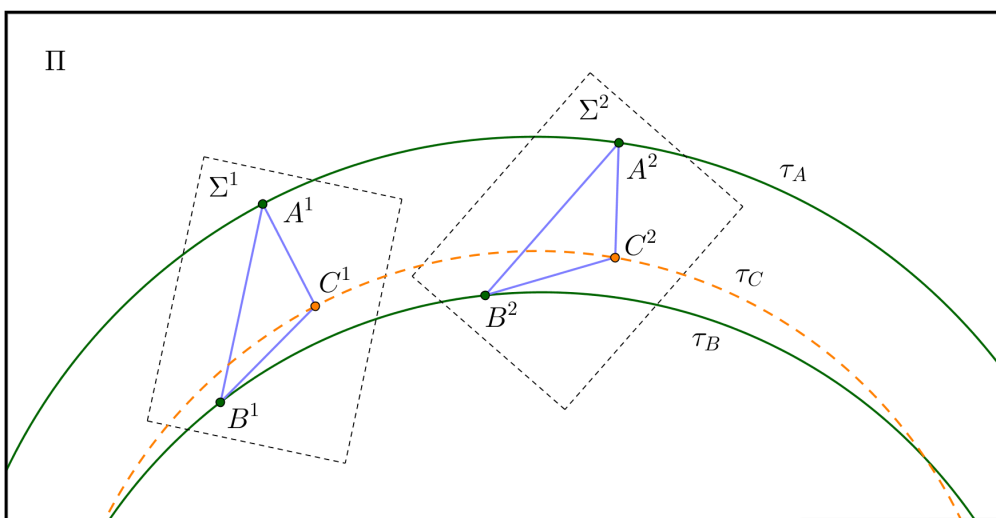
Známe-li polohu soustavy  $\Sigma^1$  v rovině  $\Pi$  a polohu úsečky  $A^2B^2$  odpovídající úsečce  $A^1B^1$  soustavy  $\Sigma^1$ , je poloha soustavy  $\Sigma^2$  určena jednoznačně. Toto můžeme říct o každé poloze soustavy  $\Sigma$ , z čehož nám vyplývá následující: Máme-li dány trajektorie  $\tau_A$  a  $\tau_B$  krajních bodů úsečky  $AB$  neproměnné rovinné soustavy  $\Sigma$ , je daný pohyb určen jednoznačně (obrázek 1.4).





Obrázek 1.4: Pohyb zadaný dvěma trajektoriemi

Pokud tedy máme už pohyb soustavy  $\Sigma$  jednoznačně zadaný, můžeme dourčit trajektorii libovolného bodu  $C$  dané soustavy  $\Sigma$ . Všechny délky příslušných úseček  $A^i C^i$  a  $B^i C^i$  musí být v každé poloze soustavy  $\Sigma$  stejné (obrázek 1.5).

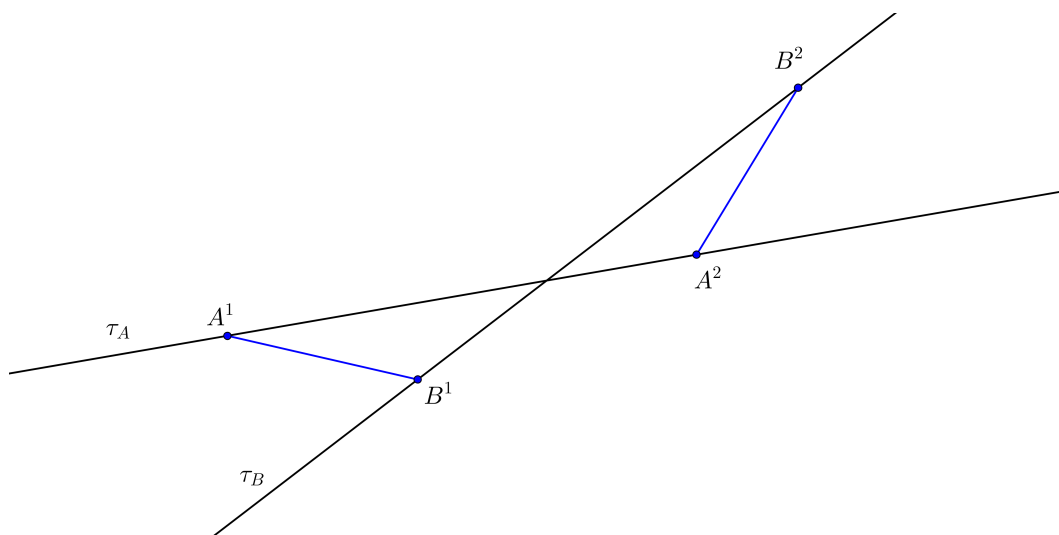


Obrázek 1.5: Dourčení trajektorie bodu  $C$

## 1.2 Zadání pohybu

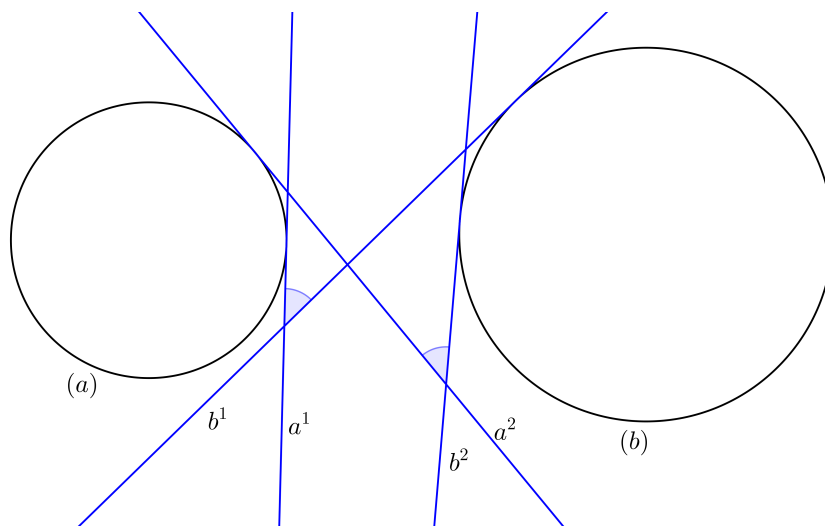
Určení pohybu můžeme kombinovat ze zadání trajektorie bodu a obálky dané křivky. Podívejme se na příklady jednotlivých možností. Pro přehlednost a jednoduchost jsme zvolili jako trajektorie bodu přímky, za křivky budeme brát přímky a jejich obálkou bude kružnice.

Máme dány dvě přímkové trajektorie bodů  $A$  a  $B$ . Potom tedy v každé poloze soustavy  $\Sigma$  je velikost úsečky  $A^i B^i$  stejná (obrázek 1.6).



Obrázek 1.6: Dvě trajektorie

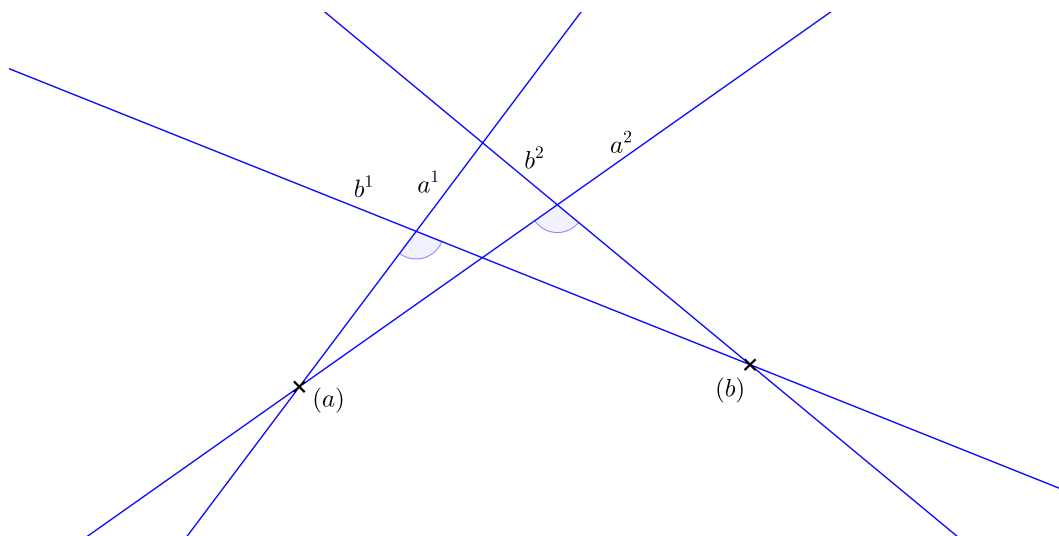
Místo trajektorií nyní vezmeme dvě obálky křivek  $a$  a  $b$ . Na příkladu můžete vidět obálky přímek  $a$  a  $b$  soustavy  $\Sigma$ , které jsou kružnicemi  $(a)$  a  $(b)$ . Úhel mezi přímkami je stále stejný, tedy ve všech polohách  $\Sigma^i$  svírají přímky  $a^i$  a  $b^i$  ten samý úhel (obrázek 1.7).



Obrázek 1.7: Dvě křivkové obálky

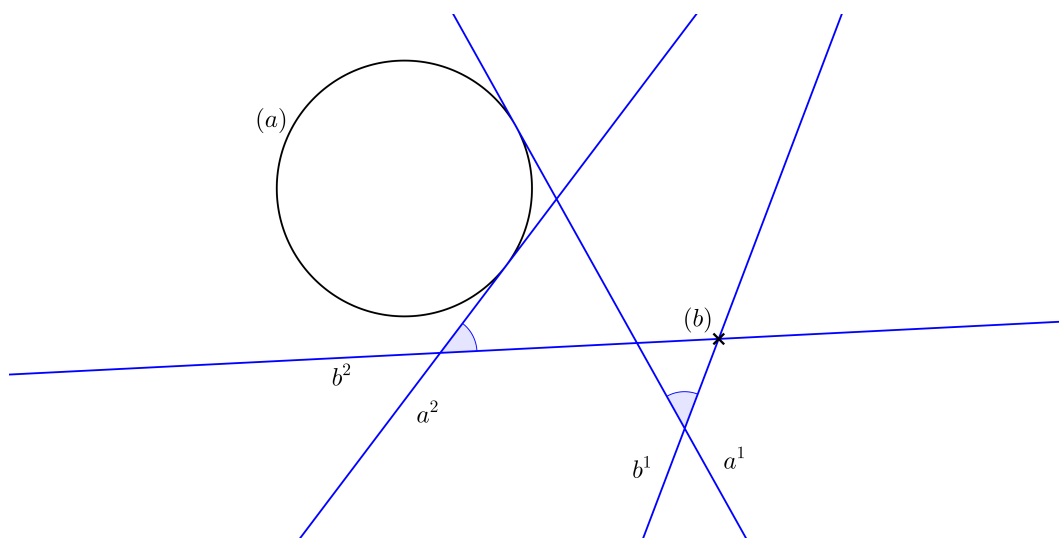
Obálkami nemusejí být pouze křivky a tak může nastat případ, kdy budou zadány dva body, což budou právě obálky  $(a)$  a  $(b)$  křivek  $a$  a  $b$ . Na příkladu

jsme zvolili za křivky přímky, takže opět úhel, který přímky  $a$  a  $b$  v jednotlivých polohách svírají, musí být stále stejně velký (obrázek 1.8).



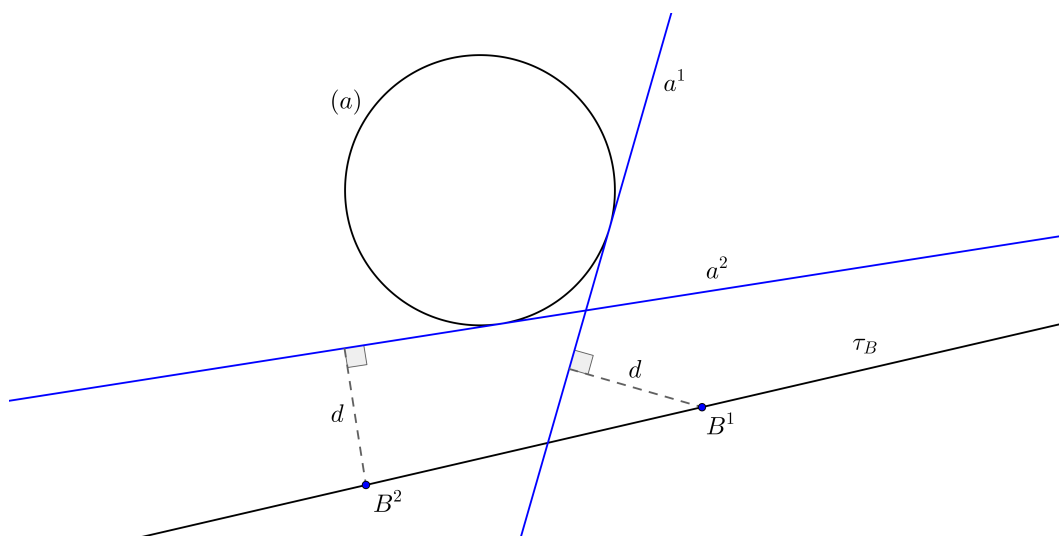
Obrázek 1.8: Dvě bodové obálky

Samozřejmě může nastat i případ, že jedna obálka je bodová a druhá křivková. I v této situaci platí, volíme-li za křivky přímky  $a$  a  $b$ , že přímky musí v každé poloze soustavy  $\Sigma^i$  svírat stejný úhel (obrázek 1.9).



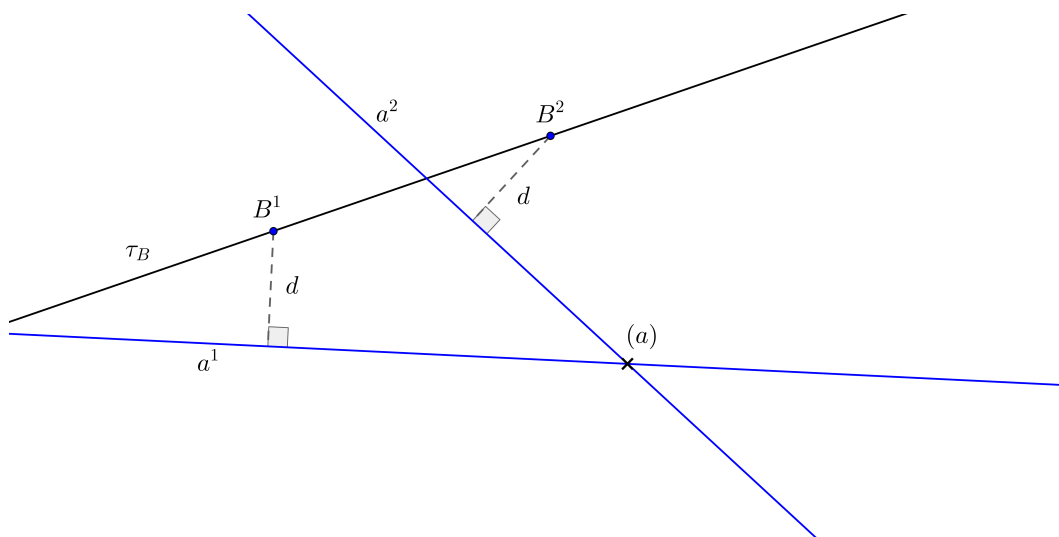
Obrázek 1.9: Bodová a křivková obálka

Nyní se podíváme na případy, kdy je pohyb zadán trajektorií bodu a obálkou křivky. Mějme přímkovou trajektorii bodu  $B$  a obálku přímky  $a$ . Kvůli neproměnnosti soustavy  $\Sigma$  musí platit, že vzdálenost  $d$  bodu  $B$  od přímky  $a$  je ve všech polohách soustavy  $\Sigma$  stejná (obrázek 1.10).



Obrázek 1.10: Trajektorie bodu a křivková obálka

Poslední kombinací v našem přehledu je možnost, kdy je pohyb zadán pomocí trajektorie bodu a bodové obálky. Opět bude platit, že vzdálenost  $d$  přímky  $a$  od bodu  $B$  bude v každé poloze  $\Sigma^i$  stejná (obrázek 1.11).



Obrázek 1.11: Trajektorie bodu a bodová obálka

V možnostech zadání pohybu jsme vyloučili případ, kdy za trajektorii bodu nebudeme mít křivku, ale bod. Tento singulární případ nebudeme uvažovat v celé naší práci.

Ukázali jsme si tedy několik způsobů, jak může být jednoznačně zadán pohyb pomocí trajektorií a obálek. Můžeme tedy brát dvě trajektorie bodů, dvě obálky křivek (jak obálky křivkové tak bodové) a kombinaci trajektorie bodu a obálky

křivky. Připomeňme si, že za trajektorie bodu můžeme brát jakoukoliv křivku, stejně tak obálkou není pouze kružnice.

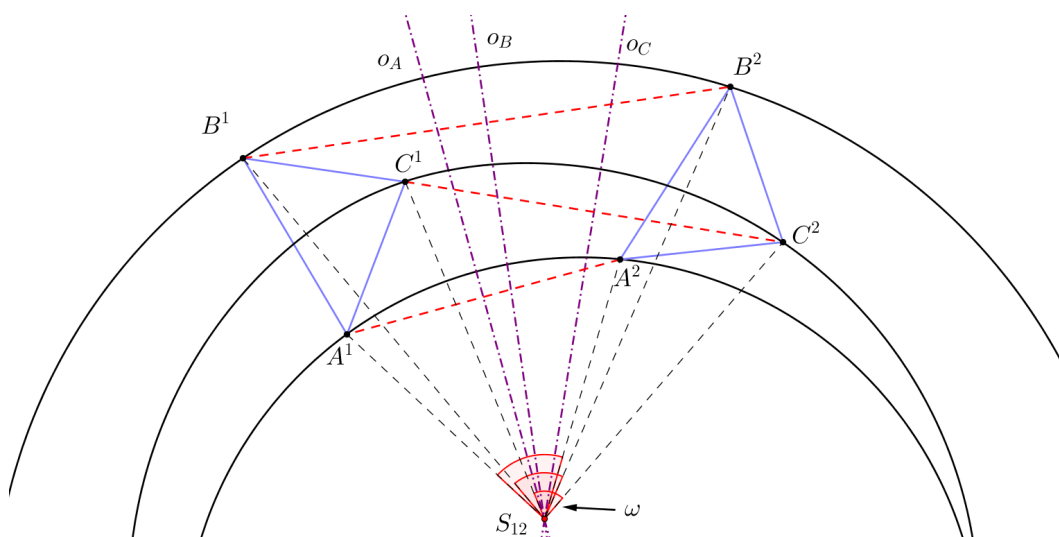
### 1.3 Okamžitý střed otáčení

Abychom zavedli další důležité pojmy kinematické geometrie, vyslovíme 1. základní větu kinematické geometrie:

*Jsou-li  $\Sigma^1, \Sigma^2$  dvě různé polohy pohybující se neproměnné rovinné soustavy  $\Sigma$ , existuje vždy otáčení nebo posunutí, které přemísťuje polohu  $\Sigma^1$  v polohu  $\Sigma^2$ . (Věta převzata z [1].)*

Předpokládejme, že  $\Sigma^1, \Sigma^2$  jsou různé polohy pohybující se soustavy  $\Sigma$  a tedy  $A^1 \neq A^2, B^1 \neq B^2$ . Můžeme tak sestavit osy úseček  $A^1A^2$  a  $B^1B^2$ . Tyto osy mohou být buď různoběžné, rovnoběžné různé nebo shodné.

Jsou-li osy různoběžné, mají společný bod  $S_{12}$ . Vzniklé trojúhelníky  $S_{12}A^1B^1$  a  $S_{12}A^2B^2$  jsou přímo shodné, a tak otočení se středem  $S_{12}$  a úhlem  $\omega = \angle A^1S_{12}A^2$  přemísťuje bod  $A^1$  na  $A^2$  a stejně tak i bod  $B^1$  na  $B^2$ . Každý další bod  $C^1$  soustavy  $\Sigma^1$  bychom stejným otočením přemístili na  $C^2$  (obrázek 1.12).



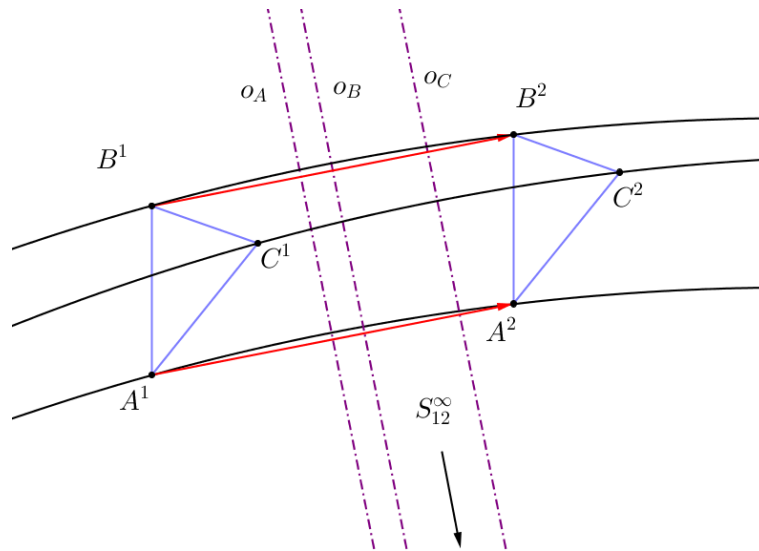
Obrázek 1.12: Otočení polohy  $\Sigma^1$  do polohy  $\Sigma^2$

Jsou-li osy rovnoběžné, mají společný nevlastní bod  $S_{12}^\infty$ . Z této rovnoběžnosti plyne, že vektory  $\overrightarrow{A^1A^2} = \overrightarrow{B^1B^2}$ , proto posunutí přemísťující bod  $A^1$  na  $A^2$  přemísťuje také bod  $B^1$  na  $B^2$ . Což platí i pro každý bod  $C^1$  soustavy  $\Sigma^1$ , který se přesune ve směru vektoru na  $C^2$  (obrázek 1.13).

Jsou-li osy shodné, jedná se opět buď o otočení nebo posunutí podle toho, jestli přímka  $A^1B^1$  protíná nebo neprotíná osy.

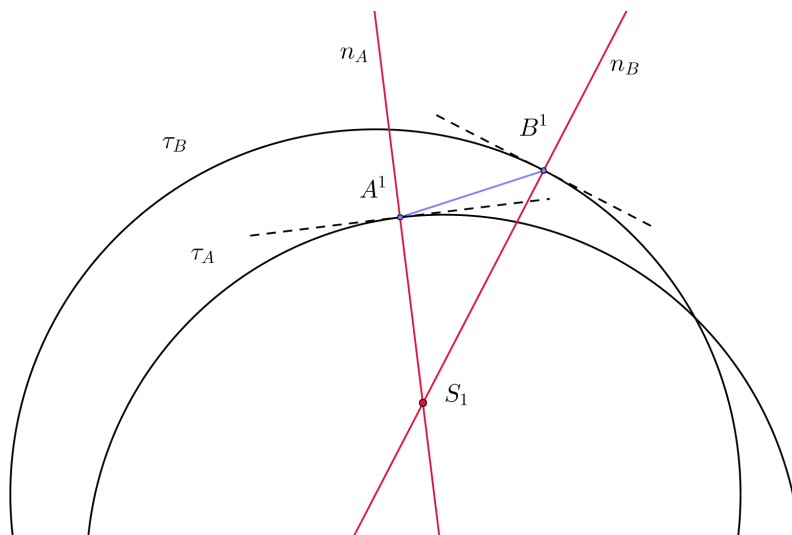
Důsledkem předchozí věty (po vyloučení bodu  $S_{12}$  je-li samodružný) je tvrzení: *Jsou-li  $\Sigma^1, \Sigma^2$  dvě různé polohy pohybující se neproměnné soustavy  $\Sigma$ , pak osy  $o_A, o_B, \dots$  úseček  $A^1A^2, B^1B^2, \dots$  procházejí pevným (vlastním nebo nevlastním) bodem  $S_{12}$ . (Viz [1], kde je naznačen důkaz.)*

Pokud s polohou  $\Sigma^2$  pohybujeme blíže k poloze  $\Sigma^1$ , pak sečny  $A^1A^2$  trajektorie  $\tau_A$  se stále více blíží k tečně k trajektorii  $\tau_A$  v bodě  $A^1$ . Tím pádem se také osy  $o_A$  limitně blíží k normále trajektorie  $\tau_A$  v bodě  $A^1$ . To samé platí také pro



Obrázek 1.13: Posunutí polohy  $\Sigma^1$  do polohy  $\Sigma^2$

sečny  $B^1B^2$  a osy  $o_B$ . Tak jsme intuitivně odvodili, že průsečík os  $S_{12}$  se blíží ke společnému bodu normal  $S_1$ . Tento bod nazveme *okamžitý střed otáčení* nebo *pól pohybu* příslušný poloze  $\Sigma^1$  (obrázek 1.14). Tímto bodem procházejí všechny normály v příslušných bodech trajektorií v dané poloze  $\Sigma^1$ . Na příkladu vidíme dvě křivkové trajektorie bodů  $A$  a  $B$  (konkrétně dvě kružnice) a body v poloze  $\Sigma^1$ . Těmito body jsme vedli normály k trajektoriím  $\tau_A$  a  $\tau_B$ , jejich průsečík je okamžitý střed otáčení  $S_1$ . Analogicky bychom vytvořili okamžitý střed otáčení  $S_i$  pro libovolnou polohu  $\Sigma^i$ .



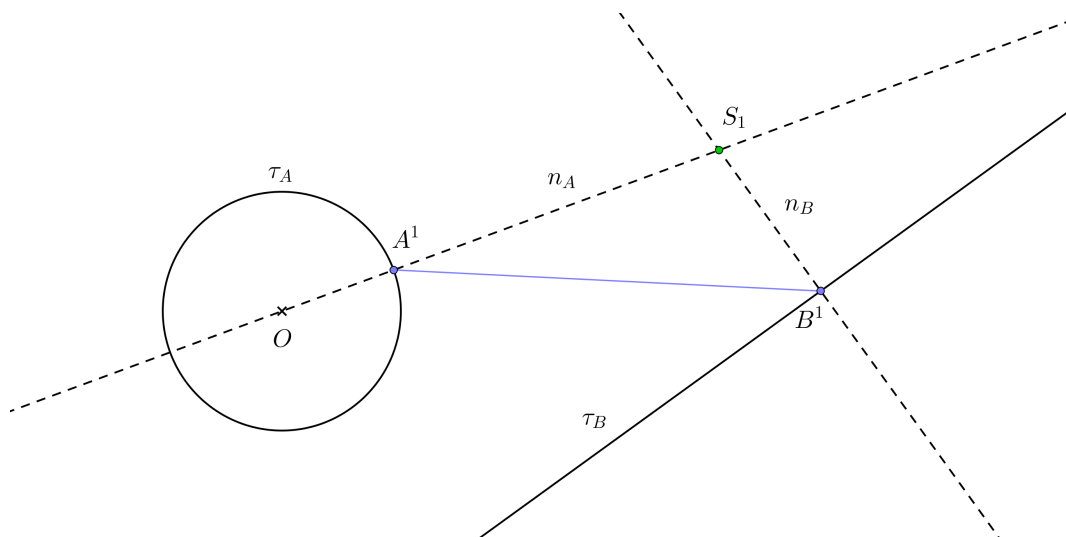
Obrázek 1.14: Okamžitý střed otáčení

Je-li pohyb zadán pomocí trajektorie, k nalezení okamžitého středu otáčení využijeme větu z [1].

**Věta 1.** *Nechť  $(k)$  je obálka křivky  $k$  pohybující se neproměnné rovinné soustavy  $\Sigma$ . V každé poloze  $\Sigma^1$  soustavy  $\Sigma$  příslušná poloha  $k^1$  křivky  $k$  se dotýká obálky  $(k)$  v patě  $P_1$  kolmice spuštěné z okamžitého středu otáčení  $S_1$  na  $k^1$ .*

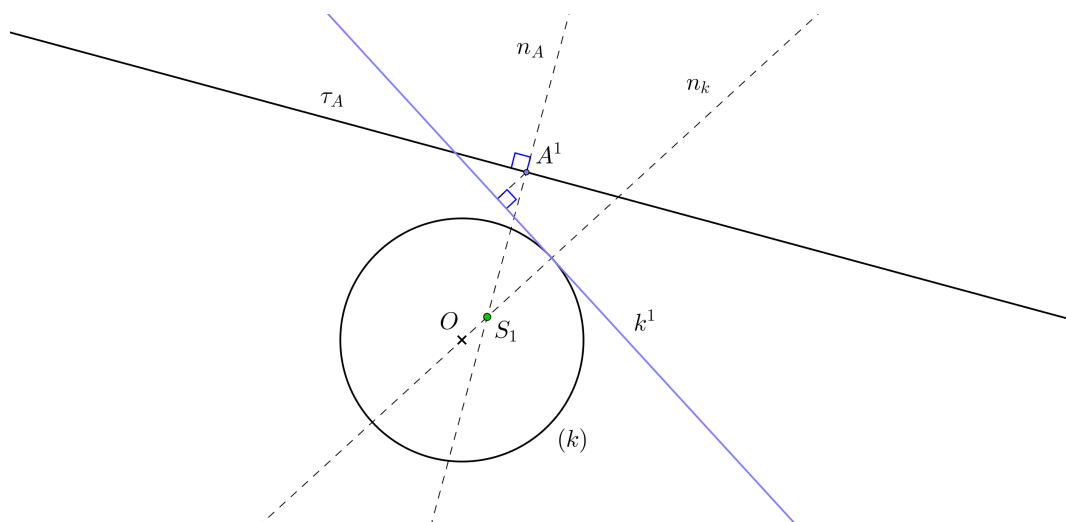
Důkaz je možné nalézt tamtéž.

My se zaměříme na konstrukci okamžitého středu otáčení a ukážeme si příklady. První příklad je zadán dvojicí trajektorií pro body  $A$  a  $B$  (obrázek 1.15). Trajektorie  $\tau_A$  je kružnice, tedy normála k trajektorii v bodě  $A^1$  příslušné polohy  $\Sigma^1$  bude přímka  $n_A$  procházející bodem  $A^1$  a středem  $O$  kružnice  $\tau_A$ . Trajektorie  $\tau_B$  bodu  $B$  je přímka a normála k trajektorii procházející bodem  $B^1$  bude kolmice  $n_B$  k přímce  $\tau_B$ . Okamžitý střed otáčení  $S_1$  pro danou polohu  $\Sigma^1$  bude tedy průsečík přímek  $n_A$  a  $n_B$ . Stejně bychom hledali střed  $S_i$  v libovolné poloze soustavy  $\Sigma^i$ .



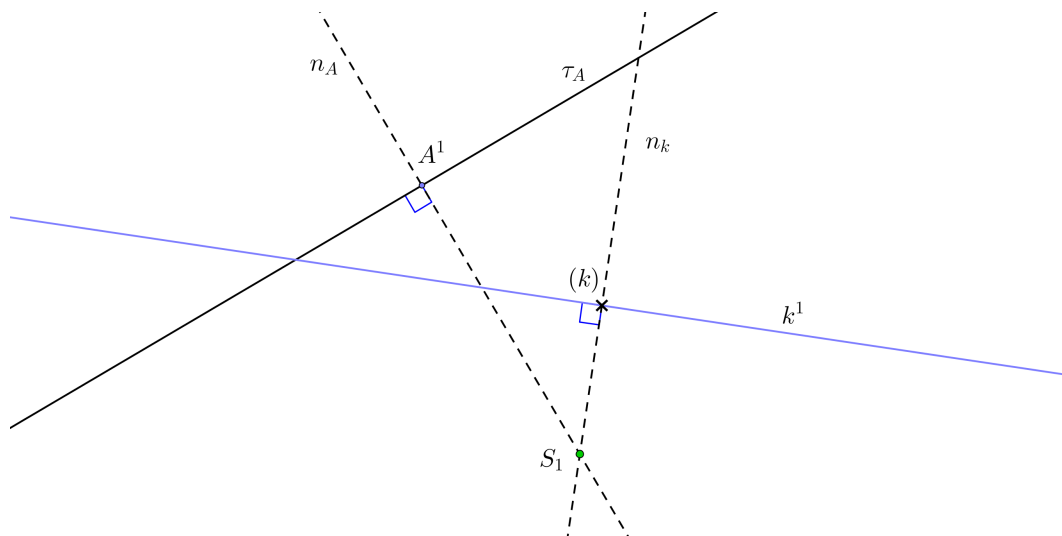
Obrázek 1.15: Nalezení okamžitého středu otáčení - dvě trajektorie

Nyní mějme zadán pohyb trajektorií bodu  $A$  a křivkovou obálkou přímek  $k$  (obrázek 1.16). Normála trajektorie  $\tau_A$  v příslušné poloze  $\Sigma^1$  se sestojí jako v předešlém příkladu. Normála  $n_k$  obálky ( $k$ ) prochází středem kružnice ( $k$ ) a bodem dotyku přímky  $k^1$  s obálkou ( $k$ ). Okamžitý střed otáčení  $S_1$  je opět průsečík normál  $n_A$  a  $n_k$ .



Obrázek 1.16: Nalezení okamžitého středu otáčení - obálka a trajektorie

Pokud bychom místo obálky křivkové měli obálku bodovou (obrázek 1.17), normála k obálce v poloze  $\Sigma^1$  by byla kolmice k přímce  $k^1$  v bodě  $(k)$



Obrázek 1.17: Nalezení okamžitého středu otáčení - bodová obálka a trajektorie

## 1.4 Pevná a hybná polodie

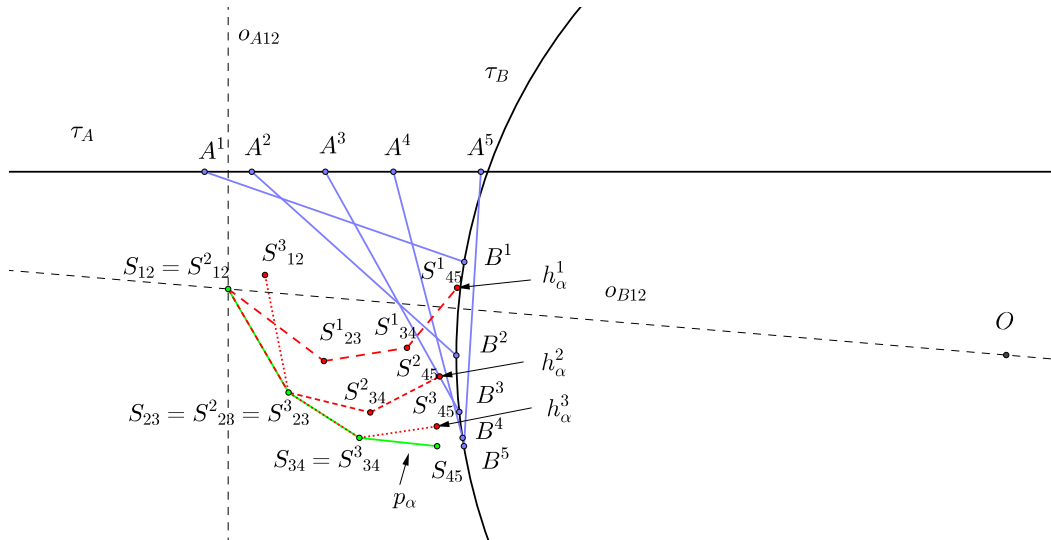
Nechť máme pohyb různý od rotace a translace, jinak by okamžité středy otáčení pro všechny polohy  $\Sigma^i$  splývaly v jeden bod, resp. byly body nevlastními. Pohyb je zadán trajektoriemi  $\tau_A$  a  $\tau_B$  bodů  $A, B$  neproměnné rovinné soustavy  $\Sigma$ . Ke každé dvojici po sobě jdoucích poloh  $\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3, \dots$  můžeme jednoznačně sestavit středy otáčení  $S_{12}, S_{23}, \dots$ , které přemísťují polohu  $\Sigma^1$  do  $\Sigma^2$ ,  $\Sigma^2$  do  $\Sigma^3$ , atd. Středy otáčení vytvoří lomenou čáru, kterou označíme  $p_\alpha$ . Nyní najdeme bod  $S_{23}^1$  v poloze  $\Sigma^1$  odpovídající bodu  $S_{23}$ . Stačí si uvědomit, že trojúhelník  $A^2B^2S_{23}$  bude shodný s trojúhelníkem  $A^1B^1S_{23}^1$ . Pokud bychom do polohy  $\Sigma^1$  přemístili i ostatní body  $S_{34}, S_{45}, \dots$ , body  $S_{23}^1, S_{23}^1, S_{34}^1, \dots$  vytvoří lomenou čáru  $h_\alpha^1$ . Otočíme-li polohu  $\Sigma^1$  do polohy  $\Sigma^2$  o úhel  $\angle B^1S_{12}B^2$ , pak se také lomená čára  $h_\alpha^1$  otočí do polohy  $h_\alpha^2$ .

Takto bychom mohli postupovat dále, tedy otočit polohu  $h_\alpha^2$  do polohy  $h_\alpha^3$  o úhel  $\angle B^2S_{23}B^3$  (viz obrázek 1.18). Tím pádem můžeme postupné otáčení rovinných soustav  $\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3, \dots$  nahradit pohybem lomené čáry  $h_\alpha$  po lomené čáře  $p_\alpha$ .

Budeme-li jednotlivé polohy  $\Sigma^i$  k sobě stále více přibližovat, budou se také vzdálenosti  $S_{12}, S_{23}, \dots$  zmenšovat, tedy strany lomených čar  $p_\alpha, h_\alpha$  budou kratší. V limitním případě, kdy body  $S_{12}, S_{23}, \dots$  přejdou v okamžité středy otáčení  $S_1, S_2, \dots$ , nahradí lomené čáry  $h_\alpha, p_\alpha$  křivky  $h, p$ .

Tímto jsme si vysvětlili vše potřebné k tomu, abychom si mohli definovat nové pojmy. Množina všech okamžitých středů otáčení pohybující se neproměnné soustavy  $\Sigma$  se nazývá *pevná polodie*  $p$ . Množina všech bodů soustavy  $\Sigma$ , které se při jejím pohybu stanou okamžitými středy otáčení, se nazývá *hybná polodie*  $h$ .



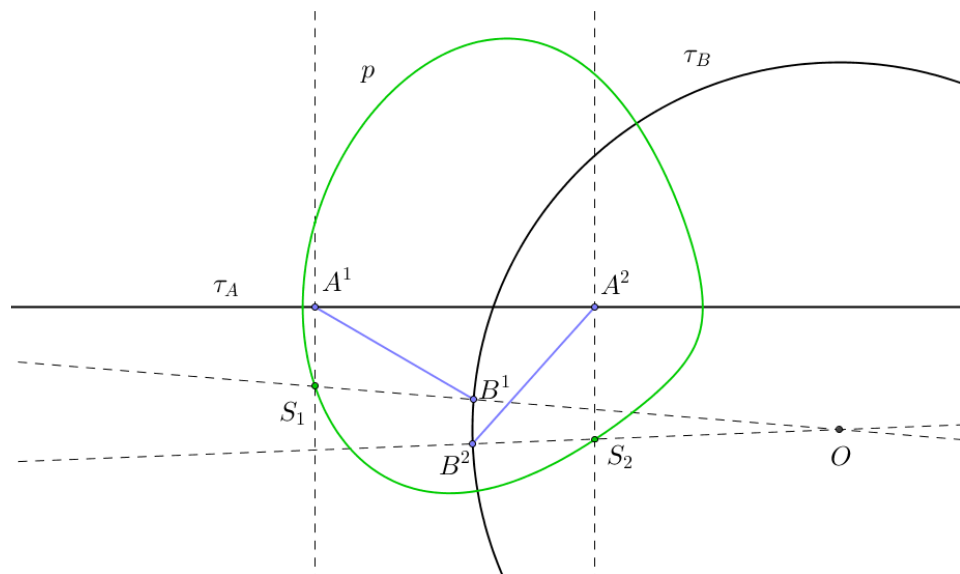


Obrázek 1.18: Pohyb  $h_\alpha$  po  $p_\alpha$

### 1.4.1 Konstrukce pevné a hybné polodie, obálky křivek

Pevná polodie je množina okamžitých středů otáčení, tedy k jejímu sestrojení musíme najít okamžité středy otáčení. Tuto konstrukci jsme si ukázali již dříve. Pokud rýsujeme pomocí tužky a pravítka na papír, můžeme sestrojit pouze konečný počet okamžitých středů otáčení a pevnou polodii vykreslit pouze přibližně. Pomocí grafických softwarů, např. GeoGebra, můžeme ale křivku vykreslit celou a přesně. Software počítá tyto body analyticky. Dále budeme k vykreslení křivek používat právě software GeoGebra.

Podíváme-li se na předchozí příklad, pevná polodie  $p$  je zeleně zvýrazněna křivka na obrázku 1.19. Je zde znázorněno nalezení dvou okamžitých středů otáčení pro dvě různé polohy soustavy  $\Sigma$ .

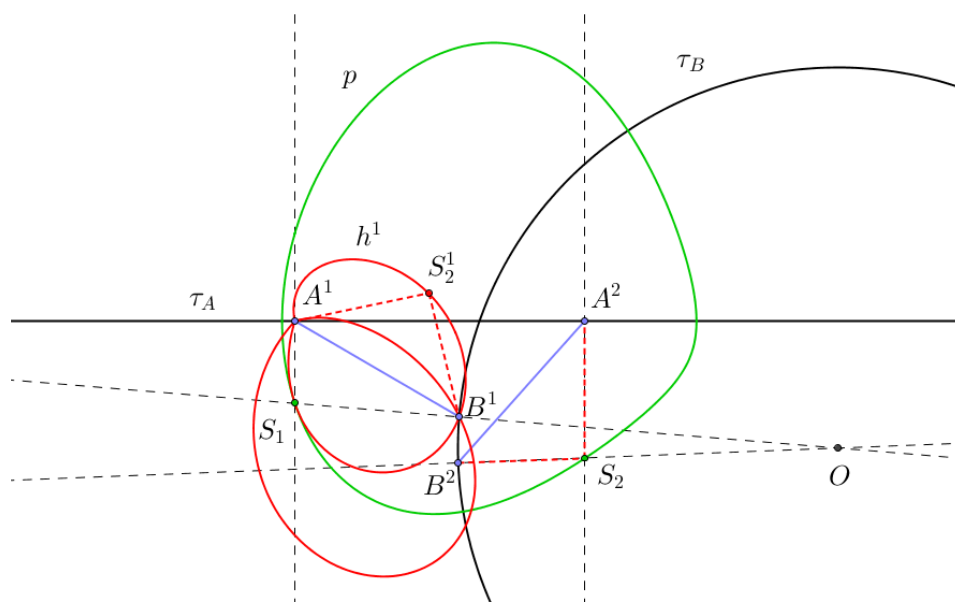


Obrázek 1.19: Pevná polodie  $p$

Hybná polodie je množina bodů, které se při pohybu stanou okamžitými středy otáčení. K vytvoření hybné polodie v poloze  $\Sigma^1$  najdeme polohu okamžitých

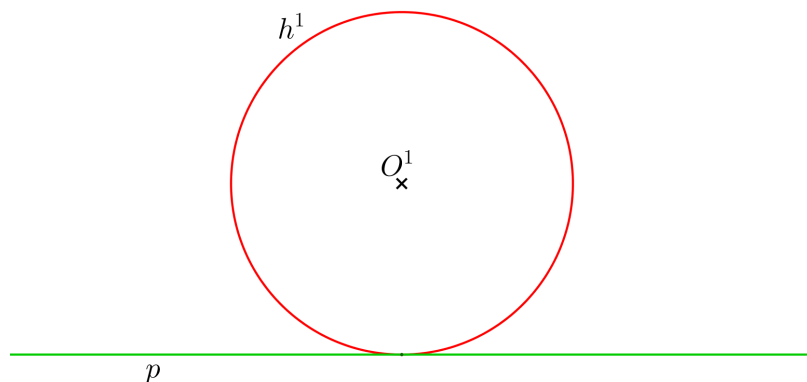
středů otáčení v poloze  $\Sigma^1$  (viz obrázek 1.20). Dále pro polohu  $\Sigma^2$  jsme našli okamžitý střed otáčení  $S_2$ . Spolu s body  $A^2, B^2$  tvoří trojúhelník  $A^2B^2S_2$ , který bude shodný s trojúhelníkem  $A^1B^1S_2^1$ , tedy jsme zjistili polohu bodu  $S_2$  v poloze  $\Sigma^1$ . Takto bychom našli dalších několik bodů  $S_3, S_4, \dots$  v poloze  $\Sigma^1$ , které by nám vykreslily hybnou polodii  $h$  v poloze  $\Sigma^1$ , tedy  $h^1$ .

Na přiloženém CD je možné se podívat na pohybující se hybnou polodii  $h$  a pevnou polodii  $p$ , soubor *pevna\_hybna\_polodie\_animace*. Uživatel pohybuje bodem  $A$  po trajektorii  $\tau_A$  a může také měnit vzdálenost bodů  $A, B$ .



Obrázek 1.20: Hybná polodie  $h$

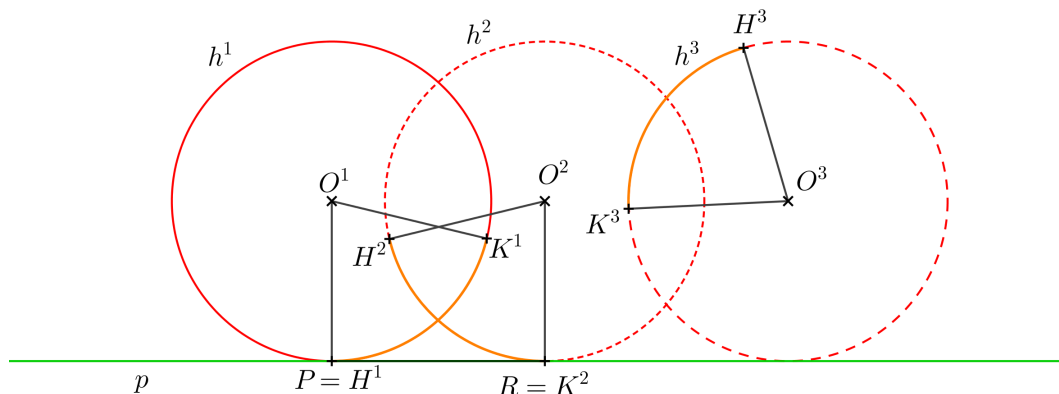
Výše jsme si ukázali, jak zadávat pohyb pomocí trajektorií bodů nebo obálek křivek. Stejně může být pohyb zadán i pevnou a hybnou polodií daného pohybu. Protože se hybná polodie *odvaluje* (nebo také *kotálí*) po pevné polodii, délky částí křivek na hybné polodii jsou stejně dlouhé jako části na pevné polodii. Mějme například pohyb zadán pevnou polodií  $p$ , přímkou, a hybnou polodií v daném okamžiku  $h^1$ , kružnicí (obrázek 1.21).



Obrázek 1.21: Pohyb zadán pevnou a hybnou polodií

Úsečka  $PR$  na přímce  $p$  je stejně dlouhá jako oblouk  $H^1K^1$  na kružnici v první

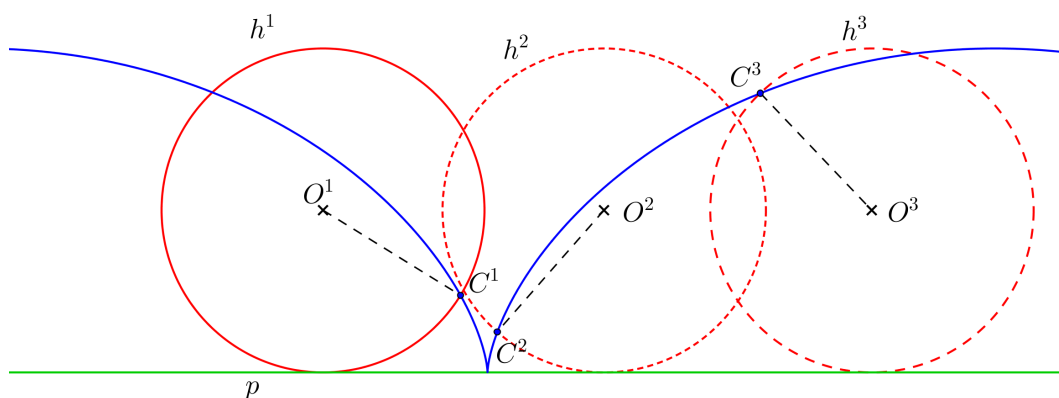
poloze  $h^1$ . Odvalením kružnice po přímce se hybná polodie dostane do polohy  $h^2$ , oblouk  $H^2K^2$  v druhé poloze je stále stejně dlouhý jako úsečka  $PR$ . V každé poloze hybné polodie  $h^i$  bude tento daný oblouk  $H^iK^i$  stejně dlouhý (obrázek 1.22).



Obrázek 1.22: Pohyb zadán pevnou a hybnou polodií - odvalování

To, že délka oblouku odvalující se kružnice je stejně dlouhá jako úsečka na přímce, je možné ověřit v souboru *příklad\_zadani\_polodiemi*, kde GeoGebra algebraicky počítá délku oblouku  $P'R'$  a úsečky  $PR$ .

Trajektorii libovolného bodu neproměnné rovinné soustavy  $\Sigma$  tak určíme pomocí několika poloh soustavy  $\Sigma$ , v našem příkladě pomocí různých poloh kružnice  $h$ , kdy vykreslujeme trajektorii bodu  $C$  ležícího na kružnici  $h$  (obrázek 1.23). V souboru *příklad\_zadani\_polodiemi* je možné měnit vzdálenost bodu  $C$  od středu  $O$  kružnice  $h$  a tím vidět měnící se trajektorii bodu  $C$ .

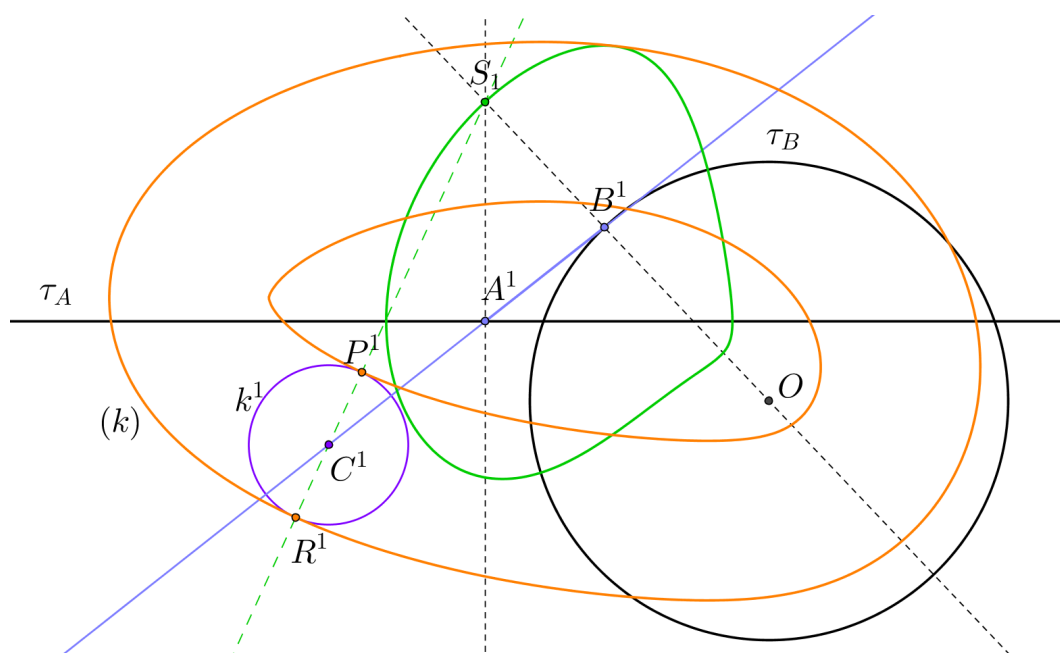


Obrázek 1.23: Trajektorie bodu  $C$

Pokud máme sestrojenou pevnou polodii pro daný pohyb, můžeme pomocí okamžitých středů otáčení sestrojít obálku pro libovolnou křivku dané soustavy  $\Sigma$ , a to na základě již výše zmiňované věty z [1], věta 1.

Například máme-li za úkol najít obálku kružnice  $k$ , budeme hledat paty kolmic (neboli normál) spuštěných z okamžitých středů otáčení na kružnici  $k$  (obrázek

1.24). Pro danou polohu kružnice  $k^1$  vedeme přímkou jdoucí okamžitým středem otáčení  $S_1$  a středem kružnice  $C^1$ . Tím získáme paty  $P^1$  a  $R^1$ , tedy body obálky  $(k)$ .



Obrázek 1.24: Konstrukce obálky  $(k)$  pro kružnici  $k$

## 1.5 Vratný pohyb

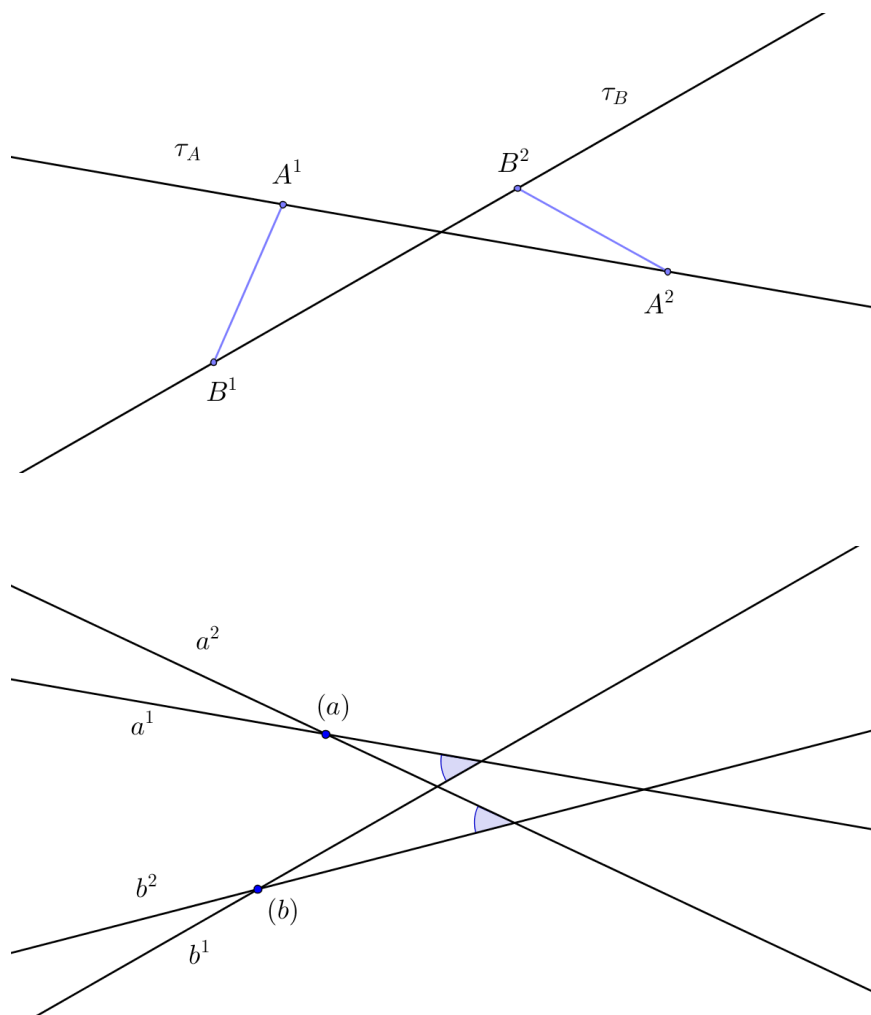
Dosud se vždy neproměnná rovinná soustava  $\Sigma$  pohybovala po soustavě  $\Pi$ , ve které vytvářela trajektorie a obálky. Můžeme ale za hybnou soustavu brát soustavu  $\Pi$  a jako pevnou neproměnnou rovinnou soustavu nějakou z poloh  $\Sigma$ . Tím získáme nové zadání pohybu, kde můžeme zavést  $\Pi_v \equiv \Sigma^1$  a  $\Sigma_v^1 \equiv \Pi$ . Tento pohyb se nazývá *vratný pohyb* daného pohybu. Takové pohyby jsou navzájem vratné.

Následující vlastnosti vratného pohybu nám více objasní, proč tento pohyb zavádět (převzato z [2] a [1]):

- Jestliže při daném pohybu bod  $A$  vytváří trajektorii  $\tau_A$ , pak se při vratném pohybu pohybuje trajektorie  $\tau_A$  a to tak, že stále prochází bodem  $A$ , obaluje jej.
- Jestliže při daném pohybu křivka  $k$  vytváří obálku  $(k)$ , pak při vratném pohybu křivka  $(k)$  obaluje křivku  $k$ .
- Pevná (hybná) polodie daného pohybu je hybnou (pevnou) polodií vratného pohybu.

Pomocí poslední vlastnosti se též dá vratný pohyb definovat: *Pohyb, který vznikne z daného pohybu záměnou polodií, je vratný pohyb.*

Je-li například pohyb zadán dvěma trajektoriemi  $\tau_A, \tau_B$  bodů  $A, B$ , pak se tyto trajektorie při vratném pohybu stanou přímkami, které procházejí bodovou obálkou (obrázek 1.25). V příkladu jsme si body  $A^1$  a  $B^1$  zvolili za bodové obálky  $(a)$  a  $(b)$ , úhel mezi trajektoriemi  $\tau_A$  a  $\tau_B$  zůstává pro přímky  $a^i$  a  $b^i$  konstantní.



Obrázek 1.25: Vratný pohyb

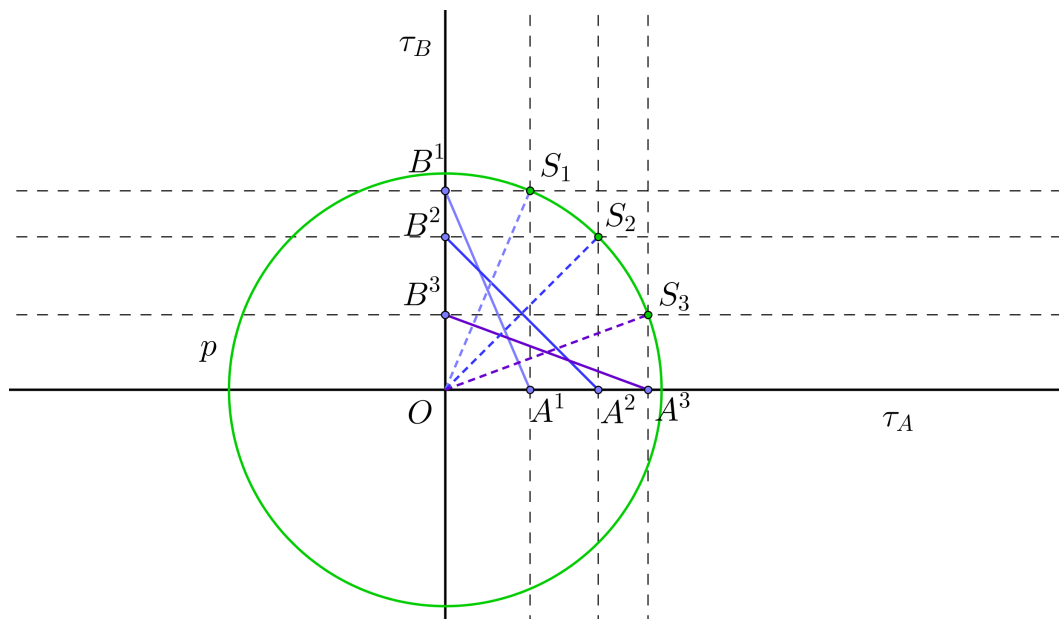
## 2. Speciální pohyby

V minulé kapitole jsme si vysvětlili jakými způsoby mohou být pohyby zadávány, jak se setrají pevné a hybné polodie a obálky křivek. Nyní se podíváme na speciální druhy pohybů.

### 2.1 Eliptický pohyb

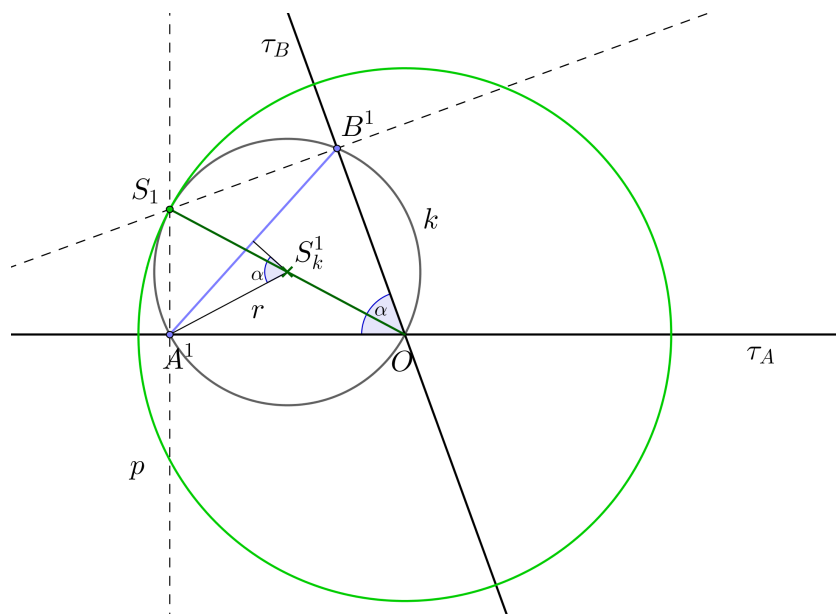
Tento speciální pohyb je zadáván pomocí dvojicí přímkových různoběžných trajektorií  $\tau_A$  a  $\tau_B$  bodů  $A$  a  $B$ . Vzdálenost bodů  $|A^i B^i|$  je tedy stále stejná.

Pevná polodie eliptického pohybu je kružnice se středem v průsečíku trajektorií  $\tau_A$  a  $\tau_B$ . Toto odvodíme, stejně jako v [2], tak, že si zvolíme trajektorie jako přímky na sebe kolmé. Body  $A^1, B^1$ , průsečík trajektorií  $O$  a okamžitý střed otáčení  $S_1$  vytvoří obdélník s úhlopříčkami  $A^1 B^1$  a  $OS_1$ , kde tyto úhlopříčky jsou stejně dlouhé. Stejně vytvoříme obdélníky  $A^2 B^2 OS_2$ ,  $A^3 B^3 OS_3$ ,  $A^i B^i OS_i$ , kde je vidět, že úhlopříčky  $A^i B^i$  musí být stejně dlouhé, tím pádem jsou stejně dlouhé i úhlopříčky  $OS_i$ . Tedy body  $S_i$  mají konstantní vzdálenost od bodu  $O$ , což je také poloměr pro pevnou polodii  $p$  (obrázek 2.1).



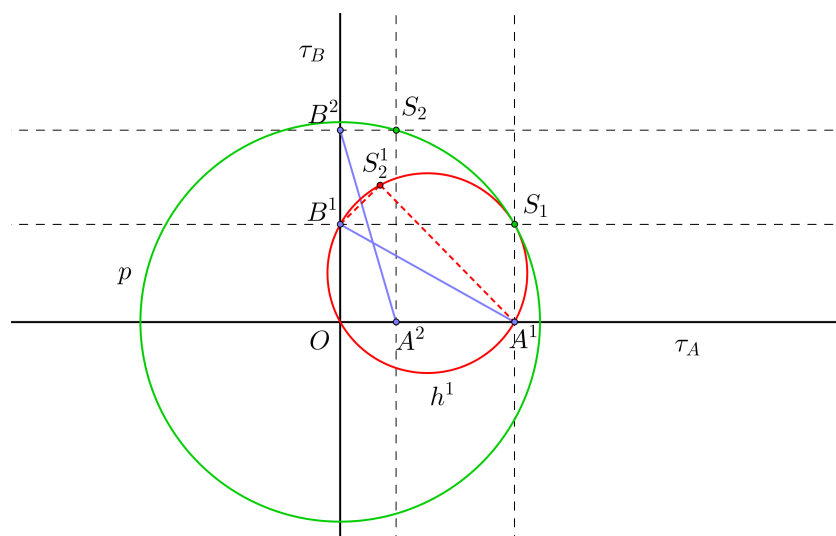
Obrázek 2.1: Pevná polodie eliptického pohybu

Podobnou úvahou se odvodí pevná polodie i pro eliptický pohyb, jehož trajektorie nejsou kolmé. Nechť trajektorie  $\tau_A$  a  $\tau_B$  svírají úhel  $\alpha$ . Trojúhelníky  $OA^1 S^1$  a  $OB^1 S^1$  jsou pravoúhlé a mají společnou přeponu. Body  $O, A^1, B^1, S^1$  tedy leží na společné kružnici  $k$ . Obvodový úhel pro oblouk  $A^1 B^1$  je stejně velký jako polovina středového úhlu, můžeme odtud odvodit poloměr kružnice  $k$ :  $r = \frac{A^1 B^1}{2 \sin \alpha}$ . Vidíme, že poloměr  $r$  bude stále konstantní, protože ze zadání pohybu je i délka  $AB$  konstantní, stejně jako úhel, který svírají trajektorie bodů  $A, B$ . Tím pádem je vzdálenost  $OS^i$  rovna  $2r$  a bod  $S^i$  leží na kružnici  $p$  se středem v průsečíku trajektorií  $O$  a poloměrem  $\frac{AB}{\sin \alpha}$  (obrázek 2.2).



Obrázek 2.2: Pevná polodie eliptického pohybu - obecný úhel

Hybná polodie eliptického pohybu je také kružnice, s polovičním poloměrem než má pevná polodie (obrázek 2.3), která v daném okamžiku prochází průsečíkem trajektorií a body  $A$  a  $B$ , leží tedy uvnitř pevné polodie. Toto odvodíme později.

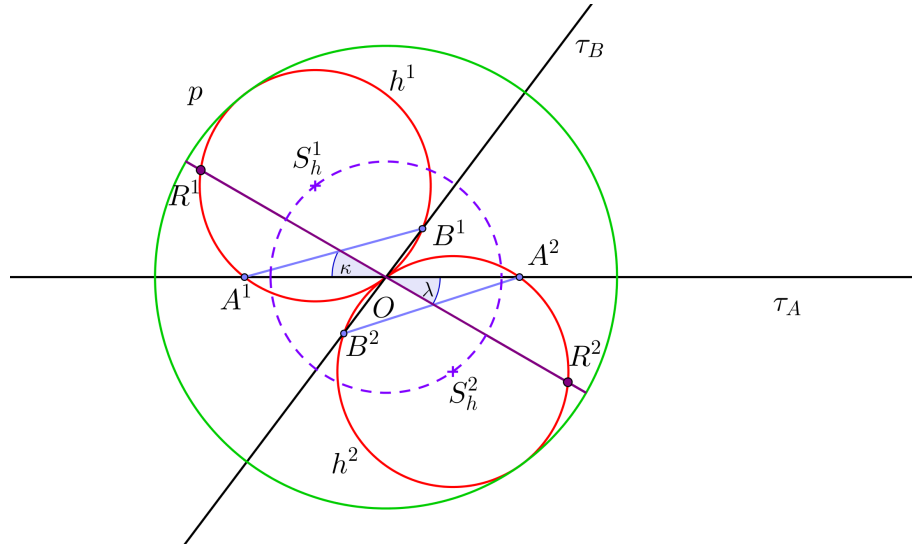


Obrázek 2.3: Pevná a hybná polodie eliptického pohybu

Mějme bod  $R$  ležící na hybné polodii. Délka oblouku  $R^1A^1$  na kružnici  $h^1$  je ve všech polohách hybné polodie stejná, tedy i úhel  $\angle A^1OR^1$  bude stejně velký jako  $\angle A^2OR^2$ . Bod  $A$  se pohybuje po přímkové trajektorii, máme tím pádem jedno rameno úhlu pevné, stejně jako vrchol úhlu  $O$ . Bod  $R$  tedy bude vykreslovat druhé rameno úhlu, což bude přímková trajektorie bodu  $R$ , přesněji to bude průměr pevné polodie  $p$  (obrázek 2.4).

Protože hybná polodie má poloviční poloměr než pevná polodie, její střed  $S_h$  opisuje kružnici se středem v průsečíku trajektorií  $O$  (obrázek 2.4).

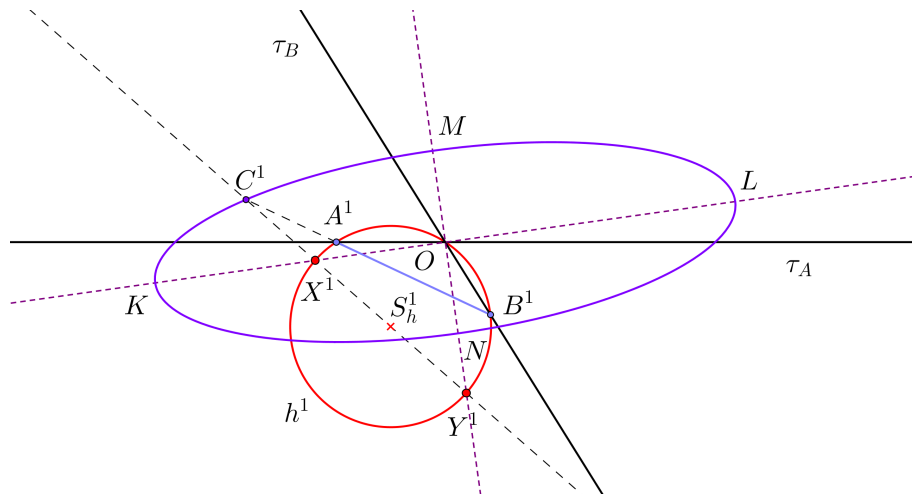
V příloženém souboru *elipticky\_pohyb\_animace* je možné se podívat na pohyb



Obrázek 2.4: Trajektorie bodu na hybné polodii

hybné polodie eliptického pohybu uvnitř pevné polodie. Uživatel může měnit odchylku trajektorií  $\tau_A$  a  $\tau_B$  a také vzdálenost bodů  $A, B$ . Pohyb je zajištěn bodem  $A$  po trajektorii  $\tau_A$ .

V tomto souboru je také možné zobrazit trajektorie bodů  $C$  a  $D$ . Neleží-li tyto body na hybné polodii a pokud jsou různé od středu hybné polodie, jejich trajektorie mají tvar elipsy (obrázek 2.5). Odtud plyne i název pro tento pohyb.



Obrázek 2.5: Trajektorie zvoleného bodu eliptického pohybu

Pokud bychom chtěli dourčit další prvky elipsy, jako jsou například její vrcholy, vedeme bodem  $C$  přímkou středem hybné polodie  $S_h$ , tím získáme průsečíky této přímky s hybnou polodií  $X, Y$ . Trajektorie těchto bodů jsou přímky jdoucí bodem  $O$  a zároveň jsou tyto trajektorie na sebe kolmé. Tím jsme získali hlavní a vedlejší osu, body  $K, L, M, N$  jsou pak vrcholy elipsy. Je zde také vidět jedna z geometrických konstrukcí elipsy, a to *proužková konstrukce*. Délka úsečky  $CX$  je délka vedlejší poloosy a délka úsečky  $CY$  je rovna délce hlavní poloosy.

Shrneme-li trajektorie pro různé body neproměnné rovinné soustavy, získáme tyto tři možnosti:



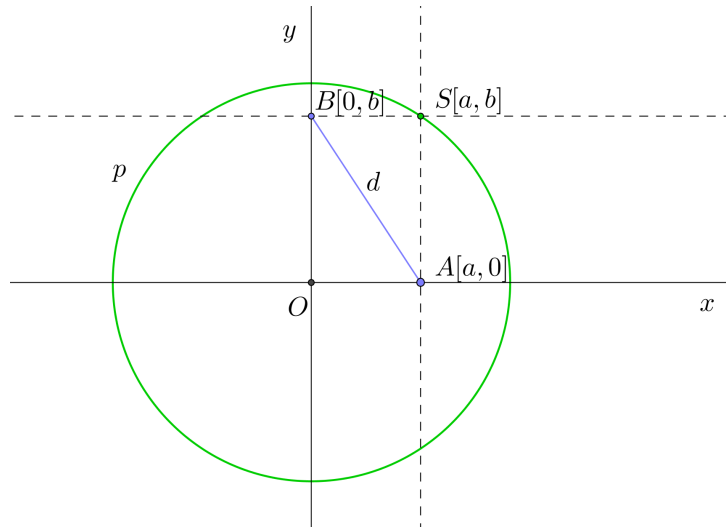
- *úsečka* pro body ležící na hybné polodii,
- *kružnice* pro střed hybné polodie,
- *elipsa* pro všechny ostatní body.

Podívejme se, jak by se odvodila pevná polodie pro kolmé trajektorie analyticky. Mějme danu kartézskou soustavu souřadnic. Trajektorie bodů  $A$  a  $B$  splynou s osami  $x$  a  $y$ . Vzdálenost bodů  $A[a,0]$  a  $B[0,b]$  je pevně daná, označme ji  $d$ . Toto pro nás bude konstanta. Můžeme tedy říci, že poloha bodu  $B$  je závislá na poloze bodu  $A$  a vyjádřit souřadnici  $b$  pomocí vzdáleností bodů  $A, B$ , čímž získáme:  $b = \sqrt{d^2 - a^2}$ . Odtud odvodíme souřadnice okamžitého středu otáčení  $S$  s pouze jednou neznámou, tedy  $S[a, \sqrt{d^2 - a^2}]$ . Vidíme, že body  $B$  a  $S$  jsou závislé na poloze bodu  $A$ . Podíváme-li se na vzdálenost bodu  $S$  od počátku souřadnicového systému, získáme rovnici

$$|OS| = \sqrt{a^2 + d^2 - a^2} = d.$$

To ovšem znamená, že vzdálenost bodu  $S$  od  $O$  nezávisí na jeho poloze a je stále konstantní. Tudíž množina všech středů otáčení  $S$  je kružnice se středem v počátku  $O$  a poloměrem  $d$  (obrázek 2.6). Pevná polodie má tedy pro tento konkrétní příklad rovnici

$$x^2 + y^2 = d^2.$$



Obrázek 2.6: Analytické vyjádření pevné polodie - eliptický pohyb

Nyní mějme libovolný bod  $C[x,y]$ , který bude ležet na přímce  $AB$ , trajektorie bodů  $A, B$  budou opět kolmé. Vzdálenost bodů  $A, C$  označme  $l$ . Parametrické vyjádření přímky  $AB$  je  $x = a + at$ ,  $y = -bt$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Můžeme tedy psát, že

$$|AC| = l = \sqrt{(a + at - a)^2 + (-bt)^2} = \sqrt{t^2(a^2 + b^2)}. \quad (2.1)$$

Z předchozího odstavce víme, že  $b = \sqrt{d^2 - a^2}$ , po dosazení do (2.1) a úpravách získáme vyjádření pro parametr  $t$ , a to  $t = \frac{l}{d}$ . Tím jsme i přesně dourčili souřadnice bodu  $C$ :

$$x = a + a \frac{l}{d},$$

$$y = -b\frac{l}{d}.$$

Vidíme, že trojúhelník  $ABO$  je pravoúhlý, proto platí

$$a^2 + b^2 = d^2. \quad (2.2)$$

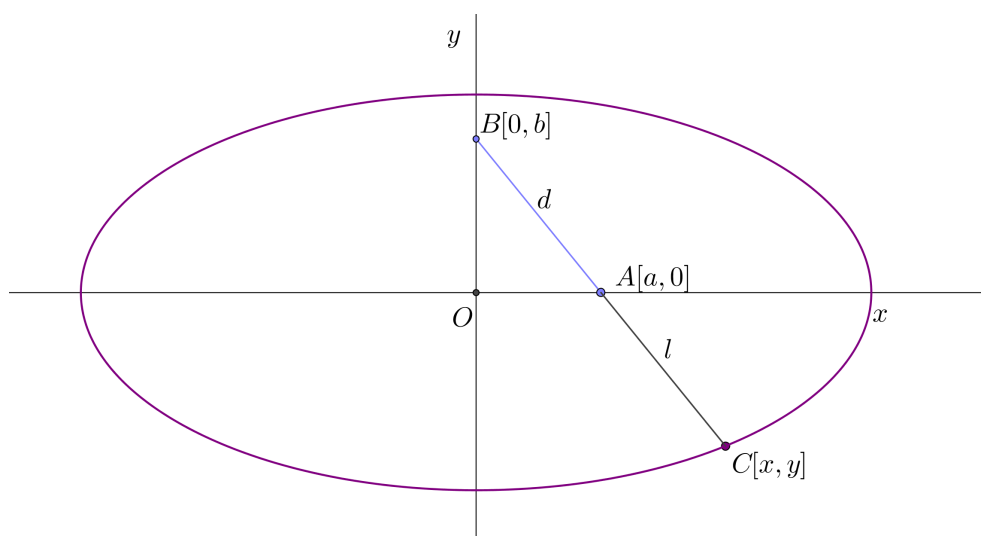
Souřadnice bodu  $C$  upravíme tak, abychom získali vyjádření pro  $a, b$ . Toto dosadíme do (2.2), čímž získáme

$$\frac{x^2}{(1 + \frac{l}{d})^2} + \frac{y^2}{(\frac{l}{d})^2} = d^2.$$

Po vydělení celé rovnice nenulovou konstantou  $d^2$  a úpravách získáme vztah

$$\frac{x^2}{(d+l)^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1, \quad (2.3)$$

což je kanonický tvar rovnice elipsy se středem v počátku a délkou hlavní poloosy  $d+l$  a vedlejší poloosy  $l$  (obrázek 2.7).



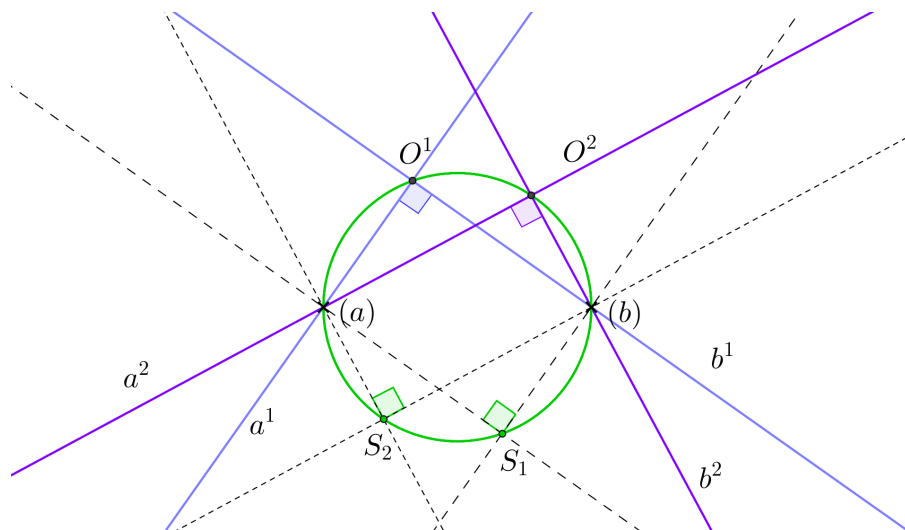
Obrázek 2.7: Analytické vyjádření trajektorie bodu

Analytické odvození trajektorie bodu neležícího na hybné polodii jsme počítali pro speciální polohu zadaných trajektorií  $\tau_A$  a  $\tau_B$ , aby vyjádření, které odtud získáme, bylo na první pohled analytické vyjádření elipsy a tento příklad mohl sloužit i jako motivační příklad na středních školách v hodinách matematiky. Odvození pro obecné zadání by se počítalo obdobně, ovšem osy elipsy by nebyly rovnoběžné s osami  $x$  a  $y$  a tedy rovnice elipsy by měla obecné vyjádření pro kuželosečku tvaru  $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ ,  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ .

## 2.2 Kardioidický pohyb

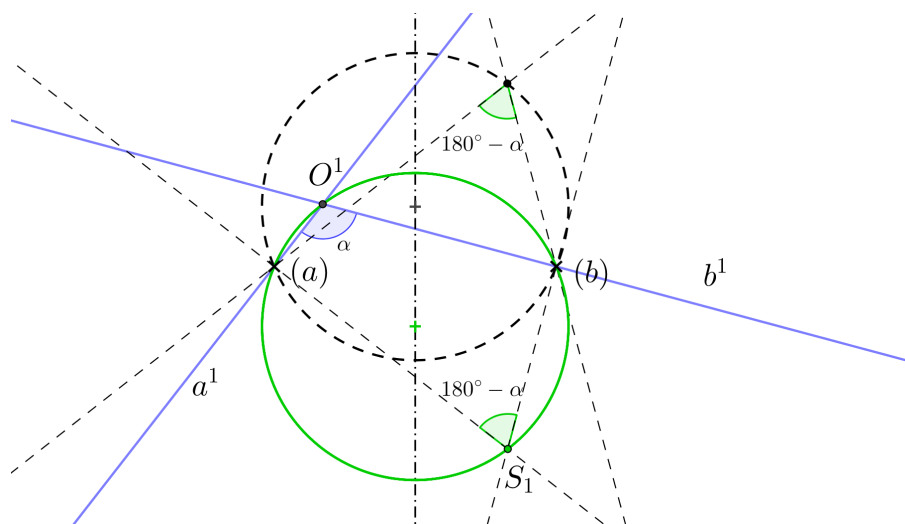
Vratným pohybem k eliptickému je pohyb kardioidický. Je určen dvojicí bodových obálek různoběžných přímek, kde odchylka těchto přímek je konstantní.

Při vratném pohybu je pevná polodie kardioidického pohybu hybnou polodií pohybu eliptického. V předchozí části jsme si odvodili pevnou polodii eliptického pohybu. Nyní to samé provedeme pro kardioidický pohyb. Předpokládejme, že odchylka přímek  $a, b$  je  $90^\circ$ , takže normály k těmto přímkám budou na sebe také kolmé. Průsečík normál  $S$ , tedy okamžitý střed otáčení, proto vykreslí Thaletovu kružnici nad průměrem  $(a)(b)$  (obrázek 2.8).



Obrázek 2.8: Pevná polodie kardioidického pohybu

Pro obecný úhel  $\alpha$  bude kružnice složená z oblouků kružnic pro obvodový úhel  $\alpha$  a doplňkový úhel k  $\alpha$  nad úsečkou  $(a)(b)$  (obrázek 2.9).



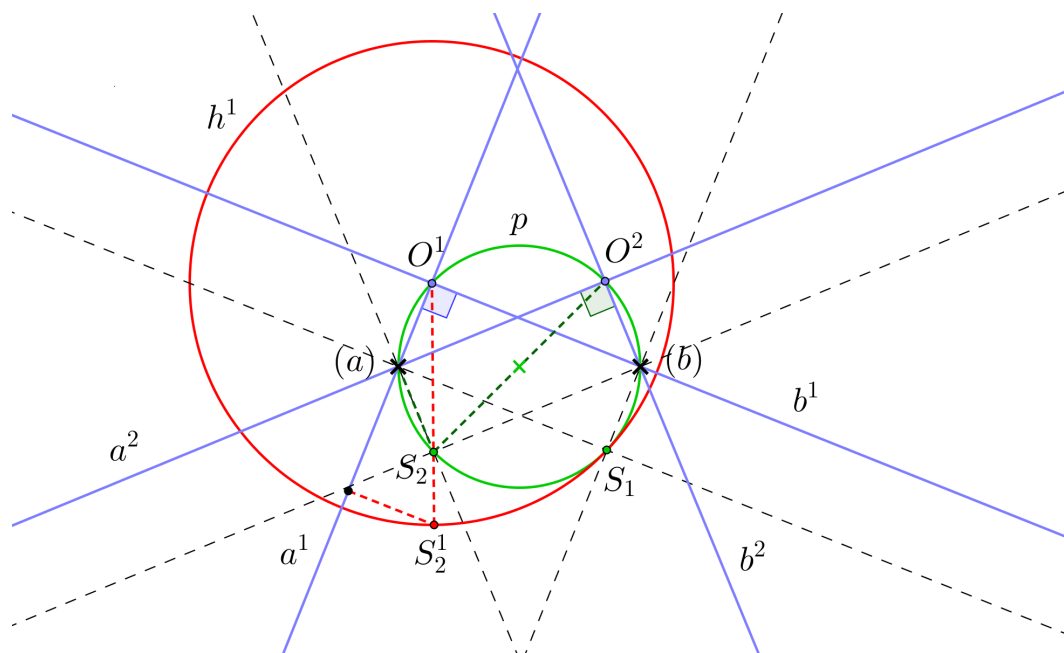
Obrázek 2.9: Pevná polodie kardioidického pohybu - obecný úhel

Ukázali jsme, že pevné polodie pro eliptický a kardioidický pohyb jsou kružnice. Jelikož je eliptický pohyb vratný ke kardioidickému a naopak, pak pevná polodie eliptického, resp. kardioidického, pohybu je hybnou polodií kardioidického (eliptického) pohybu (obrázek 2.10). Tím máme odvozený tvar hybných polodií. Pro poloměry polodií platí následující:

- Označíme-li si poloměr hybné polodie *eliptického pohybu*  $r$ , pak poloměr pevné polodie je  $2r$ . Pevná polodie má střed v průsečíku trajektorií, hybná

polodie prochází průsečíkem trajektorií a má vnější dotyk s vnitřní stranou pevné polodie.

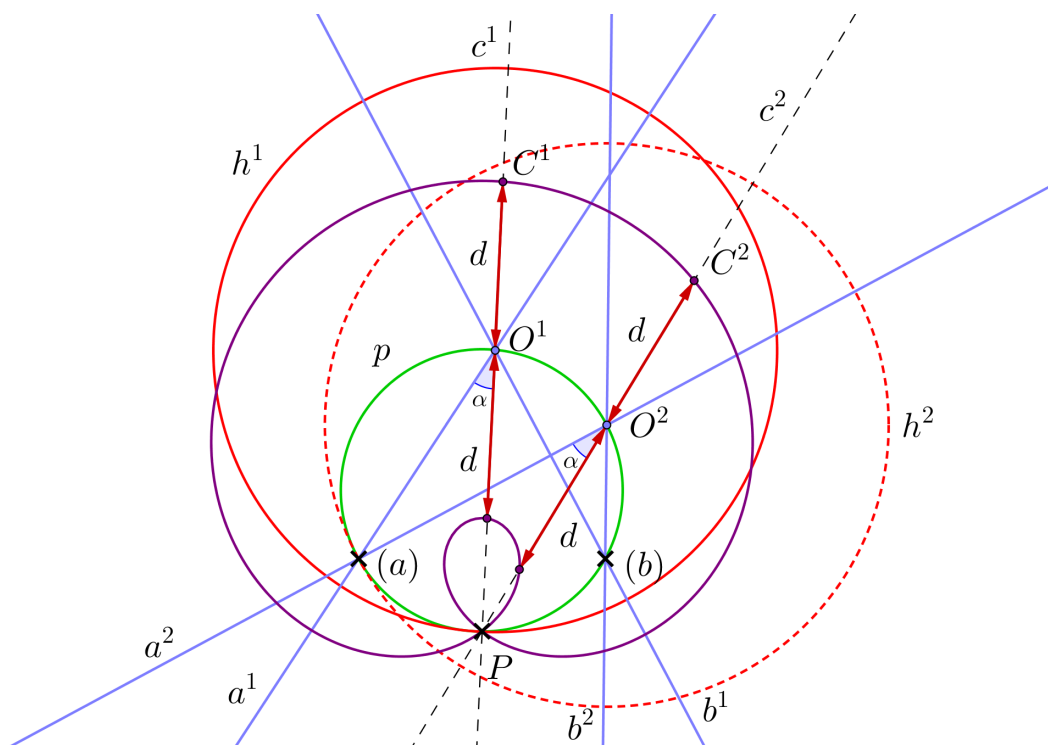
- Je-li poloměr pevné polodie *kardioidického pohybu*  $r$ , pak poloměr hybné polodie je  $2r$ . Pevná polodie prochází bodovými obálkami přímek a průsečíkem těchto přímek, hybná polodie pro danou polohu má střed v průsečíku přímek odpovídající polohy a má vnitřní dotyk s vnější stranou pevné polodie.



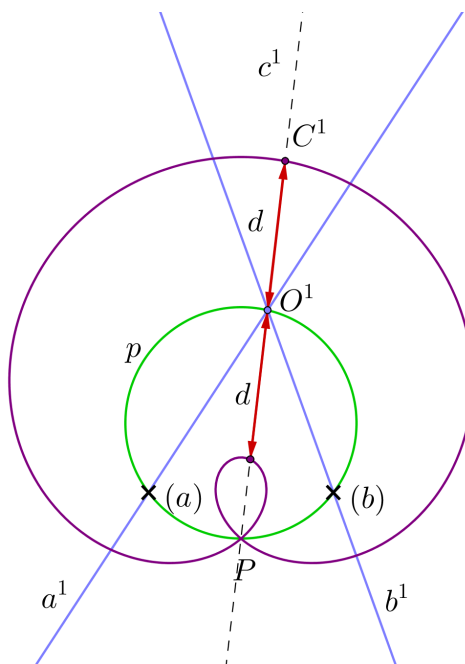
Obrázek 2.10: Pevná a hybná polodie kardioidického pohybu

Podívejme se na trajektorie bodů při kardioidickém pohybu. Průsečík přímek  $O$  opisuje pevnou polodii. Mějme  $C$ , který je různý od bodu  $O$ . Tento bod hybné soustavy bude mít ve všech polohách  $\Sigma^i$  stejnou vzdálenost od bodu  $O$ . Přímka  $c$  vedená body  $O$  a  $C$  má s přímkou  $a$  konstantní odchylku, která je ve všech polohách stejná. Tudiž druhý průsečík pevné polodie a přímky  $c$ , bod  $P$ , při různých polohách přímky  $c$  zůstává na svém místě. Budeme-li chtít narýsovat trajektorii bodu  $C$  bodově, vedeme bodem  $P$  přímky na které nanášíme od druhého průsečíku s pevnou polodii  $p$  úsečky stejně dlouhé jako byla vzdálenost  $d = |O^1C^1|$  v první poloze (obrázek 2.11).

Takto vzniklé trajektorie se nazývají *Pascalovy závitnice*. Pokud vzdálenost  $d$  bodu  $C$  od průsečíku  $O$  je menší než průměr pevné polodie, závitnice bude mít v bodě  $P$  uzlový bod (obrázek 2.12).

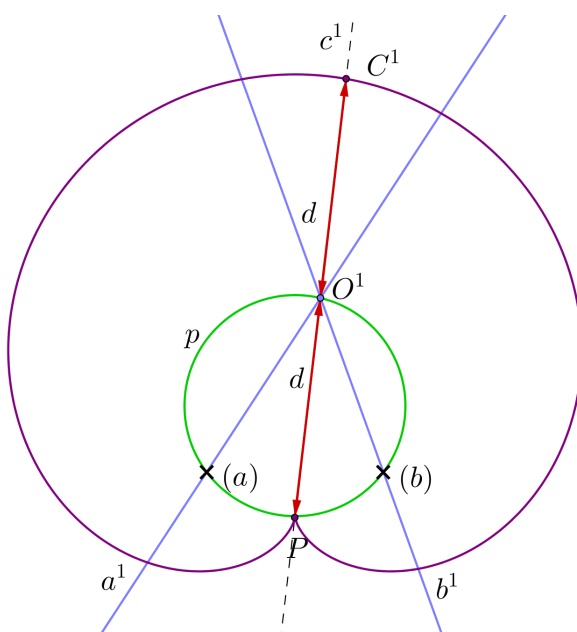


Obrázek 2.11: Trajektorie bodu  $C$  při kardioidickém pohybu



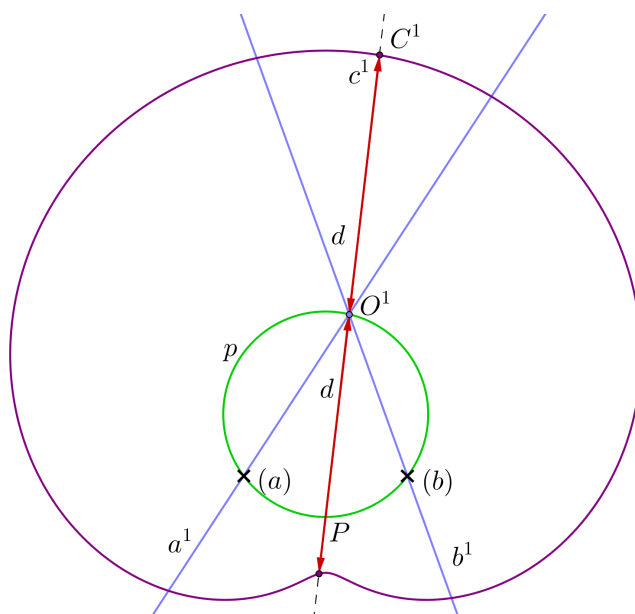
Obrázek 2.12: Pascalovy závitnice - uzlový bod

Je-li  $d$  roven průměru pevné polodie, závitnice má v bodě  $P$  bod vratu. Tato speciální křivka se nazývá *kardioida*, odtud plyne název pro tento pohyb (obrázek 2.13).



Obrázek 2.13: Pascalovy závitnice - bod vratu

A třetí případ, kdy je  $d$  větší než průměr pevné polodie, dá křivku, která se už pevné polodie nedotýká v žádném bodě (obrázek 2.14).



Obrázek 2.14: Pascalovy závitnice

Stejně jako jsme analyticky odvodili rovnici pevné polodie eliptického pohybu, učiníme tak i pro kardioidický pohyb. Mějme dánu kartézskou soustavu souřadnic. Nechť obálka přímek  $a^i$  je bod  $A[-a,0]$ , obálka přímek  $b^i$  je bod  $B[a,0]$  a přímky  $a^i, b^i$  jsou na sebe kolmé. Body  $A, B$  jsou pevné. Normály k přímkám jsou

na sebe tím pádem také kolmé. Průsečík normál  $S$  je okamžitý střed otáčení, jeho souřadnice si zatím označme  $x, y$ . Bod  $Q[0, q]$  na ose  $y$  se bude pohybovat v závislosti na poloze přímky  $a$ . Přímka  $s_a$  jdoucí body  $A, Q$  má obecnou rovnici:

$$qx - ay + qa = 0.$$

Jelikož je přímka  $s_b$  kolmá na  $s_a$ , její obecná rovnice je:

$$ax + qy + a^2 = 0.$$

Nalezením průsečíku těchto dvou přímek získáme souřadnice bodu  $S[x, y]$ , a to:

$$x = \frac{a(a^2 - q^2)}{a^2 + q^2},$$

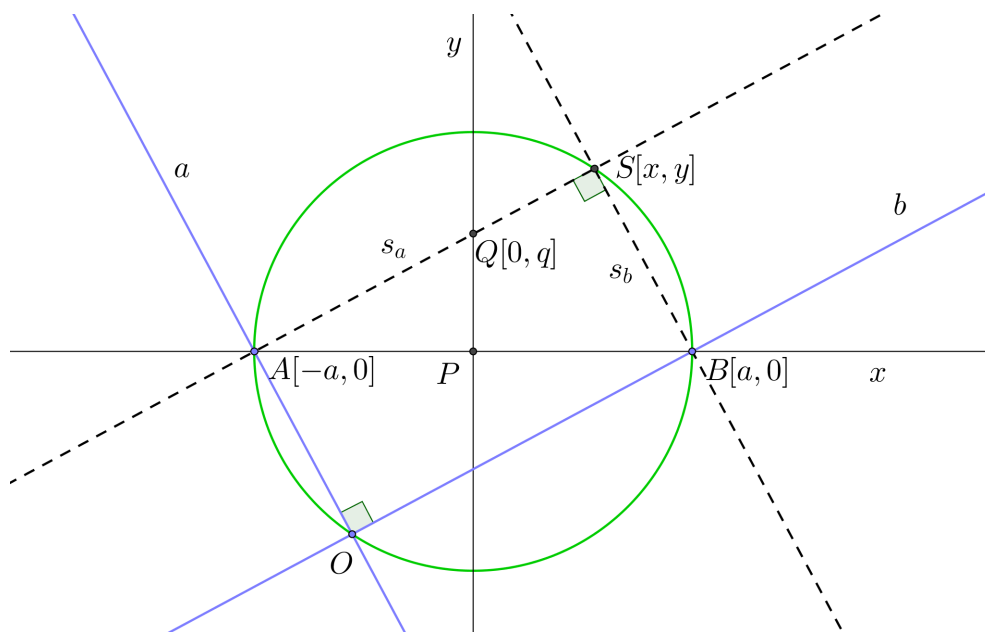
$$y = \frac{2a^2q}{a^2 + q^2}.$$

Nyní se podívejme na vzdálenost bodu  $S$  od počátku soustavy souřadnic  $P$ . Získáme vyjádření:

$$|PS| = \sqrt{\frac{a^2(a^2 - q^2)^2}{(a^2 + q^2)^2} + \frac{4q^2a^4}{(a^2 + q^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2(a^4 + 2a^2q^2 + q^4)}{(a^2 + q^2)^2}} = a,$$

tedy vzdálenost bodu  $S$  od počátku je stále konstantní. Bod  $S$  leží na kružnici se středem v počátku  $P$  a poloměrem  $a$  (obrázek 2.15). Tedy v tomto případě je rovnice pevné polodie

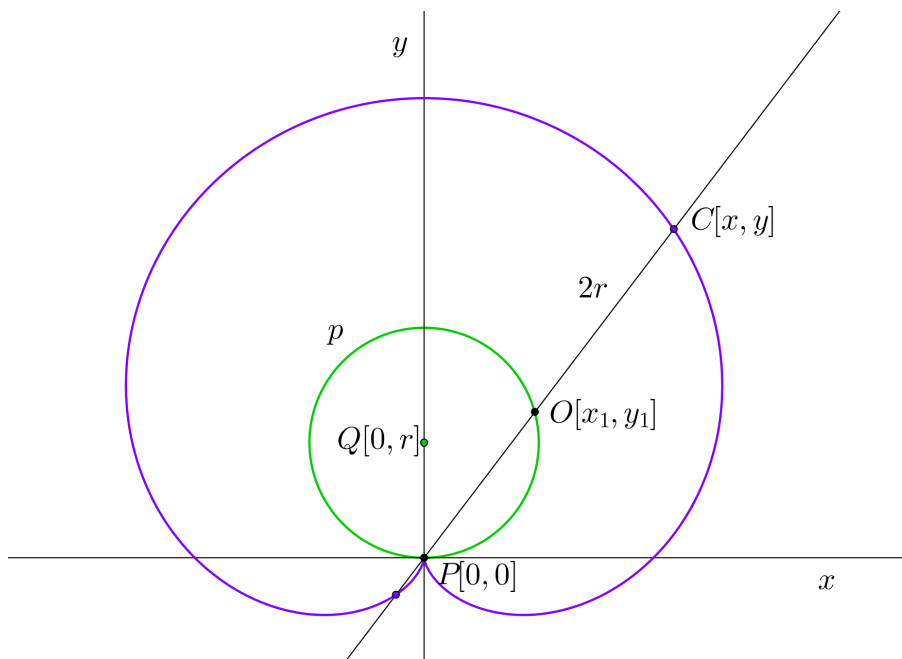
$$x^2 + y^2 = a^2.$$



Obrázek 2.15: Analytické vyjádření pevné polodie - kardioidický pohyb

Zkusme si nyní analyticky vyjádřit trajektorii bodu  $C$ , který má od bodu  $O$  na pevné polodii stejnou vzdálenost jako je velikost průměru pevné polodie (stejně jako na obrázku 2.13).

Mějme dánu kartézskou soustavu souřadnic, poloměr pevné polodie si označme  $r$ , vzdálenost bodů  $|OC|$  bude tedy  $2r$ . Střed pevné polodie  $Q[0,r]$  leží na ose  $y$ . Pevná polodie tedy prochází počátkem soustavy souřadnic, tento bod označíme  $P[0,0]$ . Bod  $C[x,y]$  leží na přímce procházející body pevné polodie  $P[0,0]$  a  $O[x_1,y_1]$  a zároveň platí  $|OC| = 2r$  (obrázek 2.16).



Obrázek 2.16: Analytické vyjádření trajektorie bodu

Podíváme-li se do [3] jak se odvozují podobné křivky, vyjádříme si postupně přímku  $PO$ , pevnou polodii a vzdálenost  $|OC|$ . Získáme tím následující tři rovnice:

$$y_1x - x_1y = 0, \quad (2.4)$$

$$x_1^2 + (y_1 - r)^2 = r^2, \quad (2.5)$$

$$2r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}. \quad (2.6)$$

Pomocí (2.4) a (2.5) si vyjádříme souřadnice bodu  $O$ , čímž získáme

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2rxy}{x^2 + y^2}, \\ y_1 &= \frac{2ry^2}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dosazením (2.7) do (2.6) a postupným upravováním se dostaneme k rovnici

$$4r^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)^2 - 4rx^2y - 4ry^3 + 4r^2y^2, \quad (2.8)$$

kteřou už můžeme upravit do konečného tvaru pro rovnici kardioidy, tedy budeme mít

$$4r^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 - 2ry)^2.$$



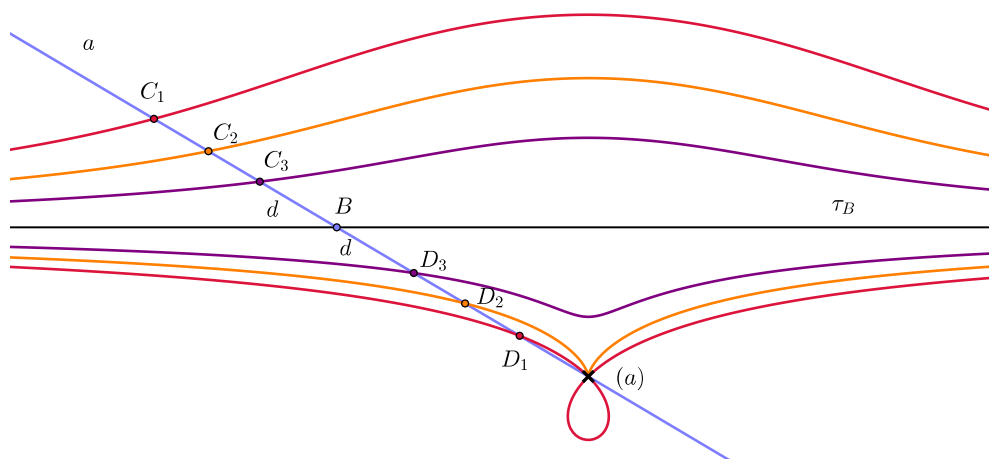
Jak je vidět, tato křivka je čtvrtého stupně. Žáci středních škol se nejspíše s rovnicí tohoto typu v hodinách analytické geometrie běžně nesetkají, přesto by se i tento příklad dal využít. Stačí, aby žák došel k vyjádření (2.8) a toto, pro zvolenou hodnotu poloměru  $r$ , zadal například v programu GeoGebra do příkazového řádku a program mu vykreslí danou křivku. Tím se žák přesvědčí, zda postupoval a počítal správně.

## 2.3 Konchoidální pohyb

Konchoidální pohyb je určen bodovou obálkou  $(a)$  přímky  $a$  a trajektorií  $\tau_B$  bodu  $B$ . Křivku, která určuje trajektorii  $\tau_B$ , nazýváme *řídící křivkou*, a bodovou obálkou  $(a)$  *pólem konchoidálního pohybu*. Křivky, které vznikají tímto pohybem, jsou *konchoidy*.

Konchoidy můžeme rozdělit na *přímé*, leží-li tvořící bod na přímce  $a$ , a *kosé*, neleží-li bod na přímce  $a$ . Konchoidu pak dále pojmenováváme podle její řídicí křivky. Tedy je-li řídicí křivkou přímka, mluvíme o *konchoidě přímky*, a je-li řídicí křivkou kružnice, jedná se o *konchoidu kružnice*.

Podívejme se blíže na konchoidu přímky. Přímá konchoida přímky se také nazývá *Nikomédova konchoida*. Zvolíme-li dva body  $C, D$  na přímce  $a$  ve stejné vzdálenosti  $d$  od bodu  $B$ , pak trajektorie bodů  $C, D$  vykreslí obě větve Nikomédovy konchoidy. Přímka  $\tau_B$  bude její asymptota. Pól pohybu je dvojnásobným bodem konchoidy, a to buď uzlovým, pokud vzdálenost  $d$  je větší než vzdálenost pólu od  $\tau_B$ , bodem vratu, jsou-li vzdálenosti stejné, a nebo izolovaný bodem, je-li vzdálenost  $d$  menší než vzdálenost pólu od  $\tau_B$  (obrázek 2.17).

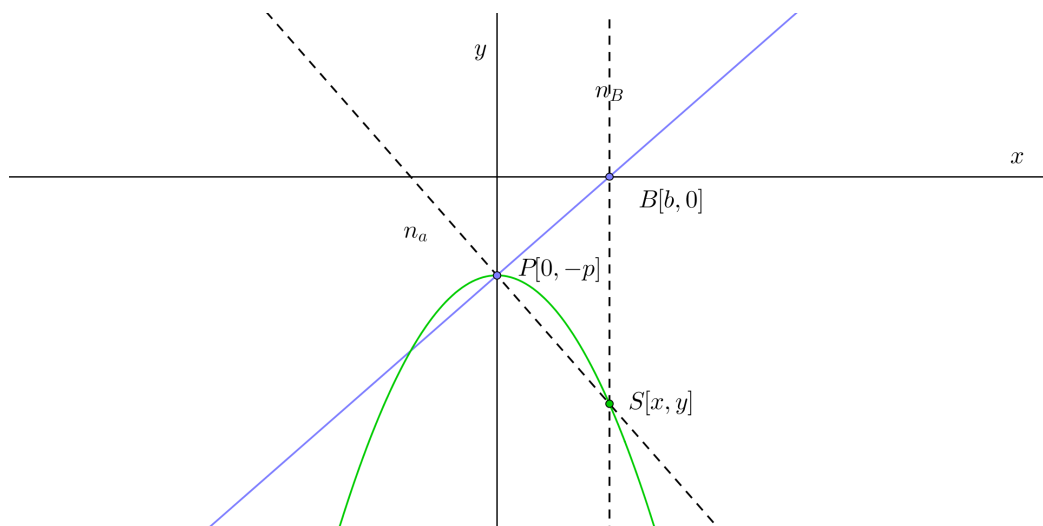


Obrázek 2.17: Nikomédova konchoida

Pevnou polodíí je v tomto případě parabola. Zvolme si v pravoúhlé soustavě řídicí křivku  $\tau_B$  například jako osu  $x$ , bod  $B[b,0]$  na ose  $x$  a pól pohybu  $P[0, -p]$  jako bod na ose  $y$  (obrázek 2.18).

Okamžitý střed otáčení je průsečík kolmice na přímku  $PB$  ( $n_a$ ) a kolmice na osu  $x$  procházející bodem  $B$  ( $n_B$ ). Analytické vyjádření těchto přímek je

$$n_a : bx + py + p^2 = 0, \quad (2.9)$$



Obrázek 2.18: Pevná polodie - konchoida přímky

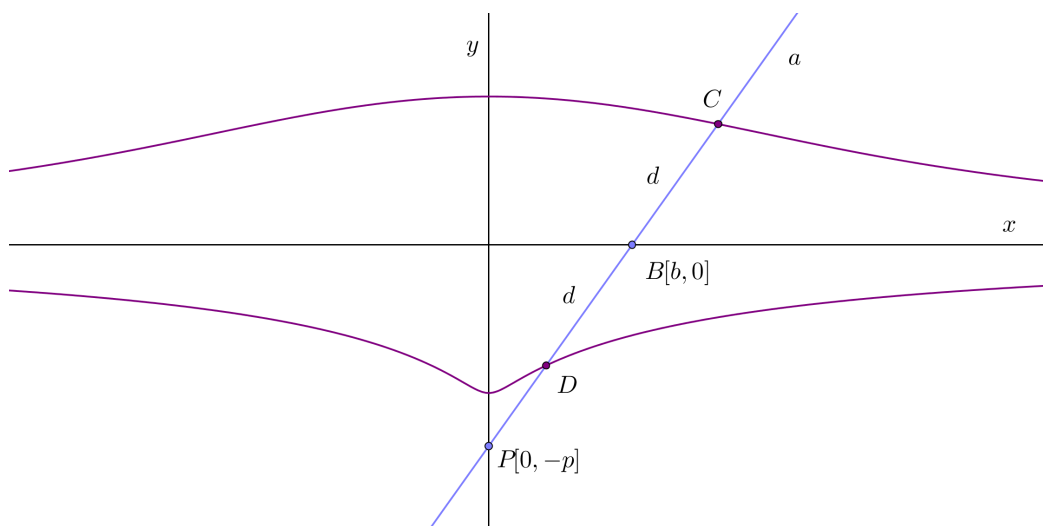
$$n_B : x = b. \quad (2.10)$$

Dosazením (2.10) do (2.9) získáme vyjádření  $x^2 + py + p^2 = 0$ , což můžeme upravit na tvar

$$p(y + p) = -x^2.$$

Vidíme, že se jedná o rovnici paraboly s vrcholem  $[0, -p]$ , řídicí přímkou  $y = 0$  a parametrem  $\frac{p}{2}$ .

Podle [3] odvodíme vyjádření Nikomédovy konchoidy, tedy trajektorii bodů  $C, D$  z předešlého odstavce. Mějme prvky zadány stejně jako v předchozím příkladu, vzdálenost bodů  $C, D$  od bodu  $B$  je  $d$  (obrázek 2.19).



Obrázek 2.19: Nikomédova konchoida - analytické vyjádření

Můžeme sestavit rovnici vyjadřující vzdálenost od  $B$ , tedy

$$d^2 = (x - b)^2 + y^2 \quad (2.11)$$

a rovnici přímky  $a$

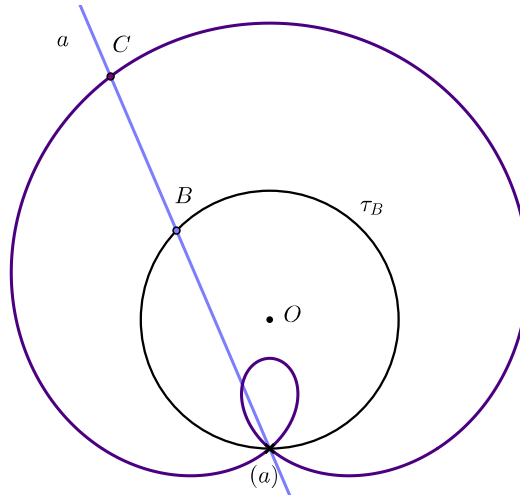
$$px - by - pb = 0. \quad (2.12)$$

Body Nikomédovy konchoidy tyto dvě rovnice splňují zároveň, můžeme si tedy z rovnice (2.12) vyjádřit  $b$ , dosadit do (2.11) a po úpravách získáme vztah

$$(d^2 - y^2)(p + y)^2 = x^2 y^2.$$

Pohyb hybné polodie po pevné je znázorněn v přiloženém souboru *konchoida\_přímky\_animace*, kde je také možné měnit polohu pólu pohybu a vzdálenost tvořících bodů od bodu  $B$ .

Nyní se zaměříme na konchoidu kružnice. Leží-li pól pohybu na kružnici, pří-  
mou konchoidou kružnice je Pascalova závitnice (obrázek 2.20).



Obrázek 2.20: Konchoida kružnice - Pascalova závitnice

S touto křivkou jsme se seznámili v minulé podkapitole *Kardioidický pohyb*. Pohyb byl zadán dvojicí bodových obálek dvou různoběžných přímek. Pokud srovnáme tyto pohyby a jejich výsledné trajektorie (vycházejme z obrázku 2.11), získáme následující spojitosti:

- pevná polodie kardioidického pohybu je v konchoidálním pohybu řídicí křivka  $\tau_B$
- bod  $P$  na pevné polodii je nyní polem  $(a)$  konchoidálního pohybu
- pro oba pohyby získáme všechny tři typy Pascalovy závitnice

Analytické vyjádření této křivky bychom odvodili stejně jako v minulé podkapitole, kde jsme využili pevnou polodii a bod  $P$  na kružnici (obrázek 2.16). Rovnice (2.4) a (2.5) zůstanou stejné, rovnici (2.6) upravíme na

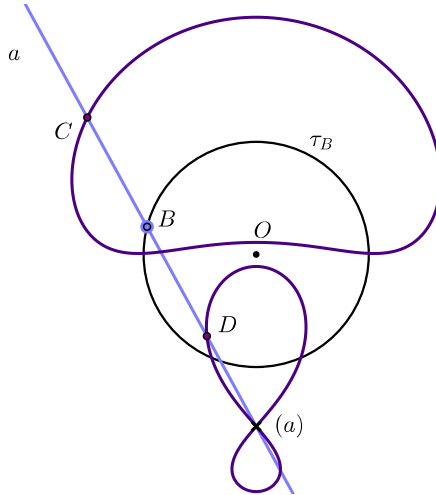
$$d = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}, \quad (2.13)$$

což představuje vzdálenost bodu  $C$  od bodu  $B$  na kružnici  $\tau_B$ . Stejným postupem jako u vyjádření kardioidy, tedy dosazení (2.7) do (2.13), bychom získali vyjádření Pascalovy závitnice:

$$d^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 - 2ry)^2, \quad (2.14)$$

pro kružnici se středem na ose  $y$  a poloměrem  $r$ .

Neleží-li pól na řídicí kružnici, křivka se rozpadne na dvě části (obrázek 2.21). Různé tvary křivek, jaké mohou pevná a hybná polodie mít, je možné si prohlédnout v příloženém souboru *konchoida\_kruznice\_animace*

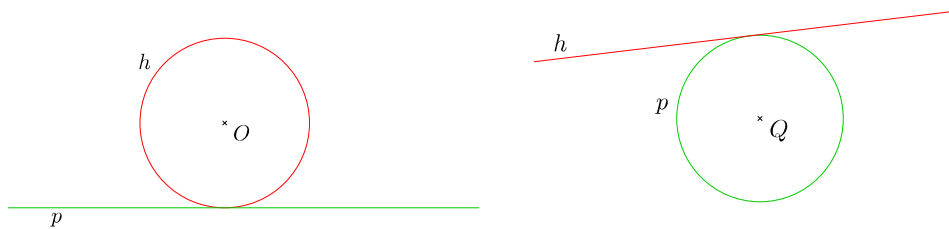


Obrázek 2.21: Konchoida kružnice

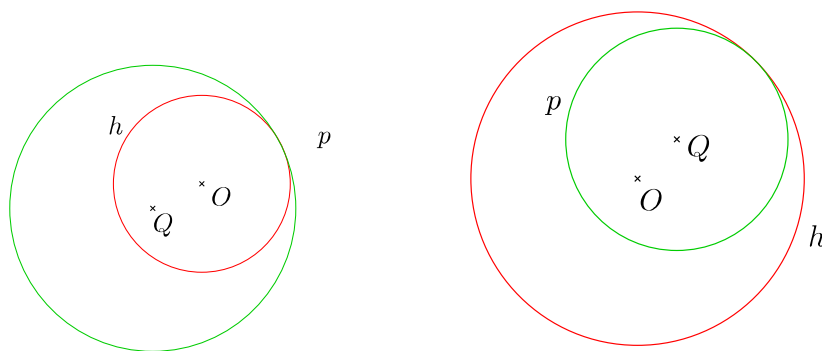
## 2.4 Cyklický pohyb

Cyklický pohyb je zadáván pomocí polodií, které jsou buď přímky nebo kružnice. Příklad, kdy pevná i hybná polodie jsou přímky samozřejmě vyloučíme. Může tedy nastat těchto pět případů:

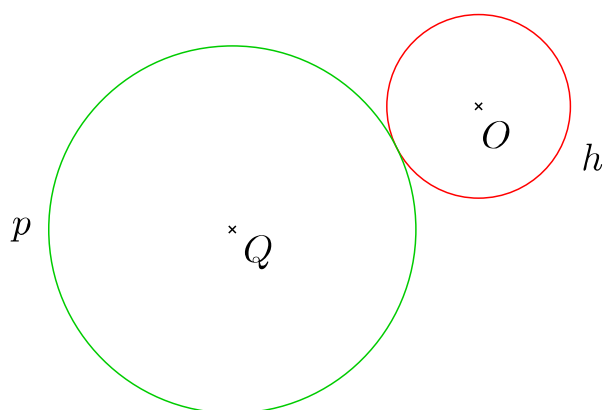
- hybná polodie, kružnice, se kotálí po pevné polodii, přímce, tzv. pohyb *cykloidální* (obrázek 2.22)
- hybná polodie, kružnice, se kotálí vnějším obvodem po vnějším obvodu pevné polodie, kružnice, tzv. pohyb *epicykloidální* (obrázek 2.24)
- hybná polodie, kružnice, se kotálí vnějším obvodem po vnitřím obvodu pevné polodie, kružnice, tzv. pohyb *hypocykloidální* (obrázek 2.23)
- hybná polodie, kružnice, se kotálí vnitřním obvodem po vnějším obvodu pevné polodie, kružnice, tzv. pohyb *pericykloidální* (obrázek 2.23)
- hybná polodie, přímka, se odvaluje po pevné polodii, kružnici, tzv. pohyb *evolventní* (obrázek 2.22)



Obrázek 2.22: Zadání cykloidálního a evolventního pohybu



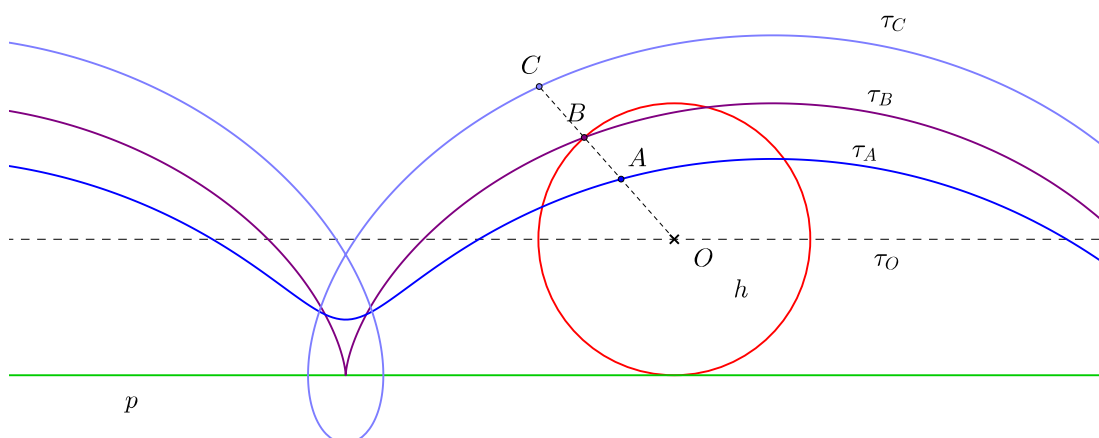
Obrázek 2.23: Zadání hypocykloidálního a pericykloidálního pohybu



Obrázek 2.24: Zadání epicykloidálního pohybu

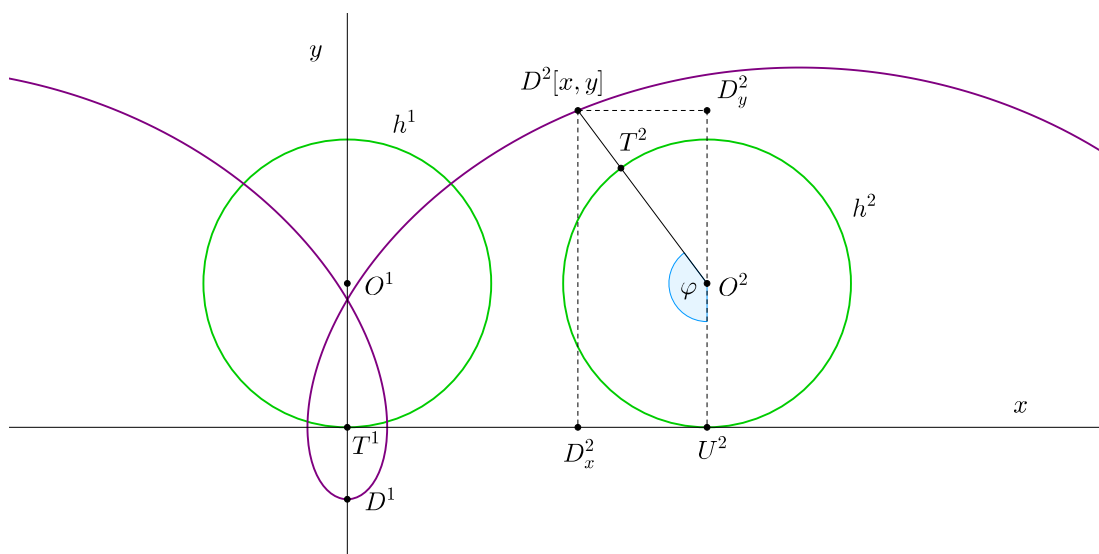
## 2.4.1 Cykloidální pohyb

Tento pohyb, kdy hybná polodie je kružnice, která se kotálí po přímkové pevné polodii, jsme si stručně představili už v minulé kapitole, přesněji v podkapitole 1.4.1. Křivky, které tímto pohybem vznikají, se nazývají *cykloidy*. Zvláštní případ nastane pro střed  $O$  hybné polodie, kdy  $\tau_O$  je přímka rovnoběžná s pevnou polodií. Rozlišujeme cykloidu *prodlouženou*, pokud má bod neproměnné rovinné soustavy od středu hybné polodie větší vzdálenost než je poloměr polodie, *prostou*, pokud bod leží na obvodu hybné polodie a *zkrácenou*, pokud bod leží uvnitř hybné polodie (obrázek 2.25).



Obrázek 2.25: Cykloida

Podívejme se, jak odvodit analytické vyjádření cykloidy. V kartézské soustavě souřadnic zvolme pevnou polodii jako osu  $x$ , první polohu hybné polodie tak, že střed kružnice s poloměrem  $r$  leží na ose  $y$ , vzdálenost bodu  $D$  od středu kružnice je  $v$  (obrázek 2.26).



Obrázek 2.26: Analytické vyjádření cykloidy

Pro souřadnice bodu  $D^2$  cykloidy platí:

$$\begin{aligned}x &= |T^1U^2| - |D_x^2U^2|, \\y &= |U^2O^2| + |O^2D_y^2|.\end{aligned}$$

Z vlastností cykloidální pohybu víme, že  $|T^1U^2| = |U^2\widehat{T^2}|$  a délku oblouku pro úhel zadaný v radiánech vypočítáme  $|U^2\widehat{T^2}| = r\varphi$ . Vidíme, že  $|U^2D_x^2| = |D^2D_y^2|$ . V pravouhlém trojúhelníku  $O^2D_y^2D^2$  platí

$$\begin{aligned}|O^2D_y^2| &= v \cos(\pi - \varphi) = -v \cos \varphi, \\|D^2D_y^2| &= v \sin(\pi - \varphi) = v \sin \varphi.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Dosadíme-li (2.15) společně s délkou oblouku do souřadnic bodu  $D^2$ , získáme parametrické vyjádření cykloidy

$$\begin{aligned}x &= r\varphi - v \sin \varphi \\y &= r - v \cos \varphi,\end{aligned}\tag{2.16}$$

kde parametr  $\varphi$  je úhel otočení hybné polodie. Podívejme se ještě jednou na trajektorii středu hybné polodie. Vzdálenost  $v$  je nulová, vyjde tedy rovnice přímky  $y = r$  neboli rovnoběžka s osou  $x$ .

V příloženém souboru *cykloida\_animace* je možné si prohlédnout všechny typy cykloidy a měnit jak poloměr hybné polodie, tak vzdálenost tvořícího bodu od středu hybné polodie.

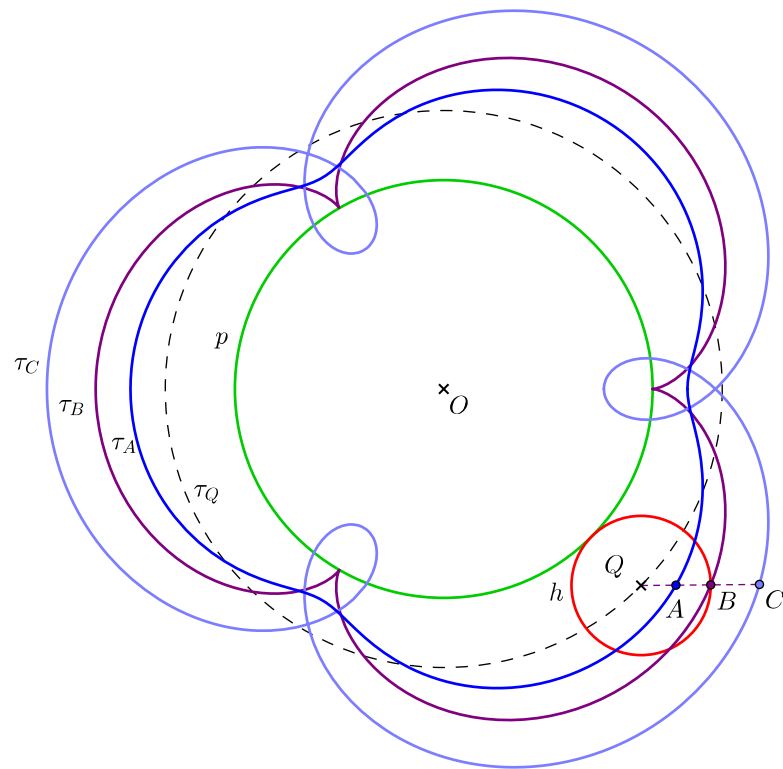
## 2.4.2 Epicykloidální pohyb

Epicykloidální pohyb je takový pohyb, kdy hybná i pevná polodie jsou kružnice a hybná polodie se vnějším obvodem kotálí po vnějším obvodu pevné polodie. Křivky, které tímto pohybem vytváří body neproměnné rovinné soustavy, se nazývají *epicykloidy*. Stejně jako u cykloidy, i zde můžeme získat tři typy epicykloidy podle vzdálenosti tvořícího bodu od středu hybné polodie - prodlouženou, prostou a zkrácenou. Pro trajektorii středu hybné polodie  $\tau_Q$  nastane speciální případ a vznikne soustředná kružnice s pevnou polodií (obrázek 2.27).

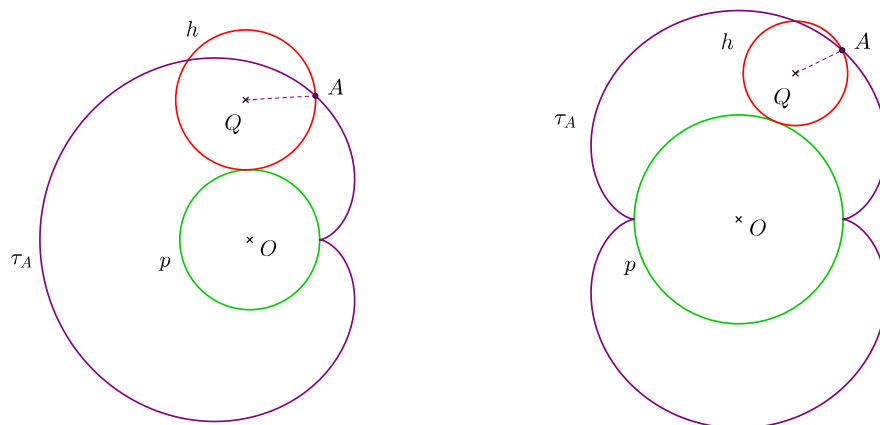
Označme si poloměr pevné polodie  $r_p$  a poloměr hybné polodie  $r_h$ . Je-li poměr poloměrů  $k = \frac{r_p}{r_h}$  číslo racionální, pak je křivka algebraická a uzavřená. Je-li  $k$  iracionální, jedná se o křivku transcendentní, která není uzavřená (viz [3]). Převeďme-li poměr  $k$  na zlomek v základním tvaru  $\frac{m}{n}$ , pak číslo  $m$  určuje počet bodů vratu pro prostou epicykloidu (uzlových bodů pro prodlouženou epicykloidu) a číslo  $n$  počet, kolikrát hybná polodie obkrouží pevnou polodii, než tvořící bod vykreslí celou uzavřenou epicykloidu.

S křivkami pro případ, kdy  $r_p = r_h$ , jsme se již seznámili. Jsou to *Pascalovy závitnice*, konkrétně prostá epicykloida se nazývá kardioida. Prostou epicykloidu, kdy  $r_p = 2r_h$ , nazýváme *nefroida* (obrázek 2.28).

Pro odvození analytického vyjádření epicykloidy uvažujme případ, kdy pevná polodie o poloměru  $r_p$  má střed v počátku kartézské soustavy, hybná polodie má

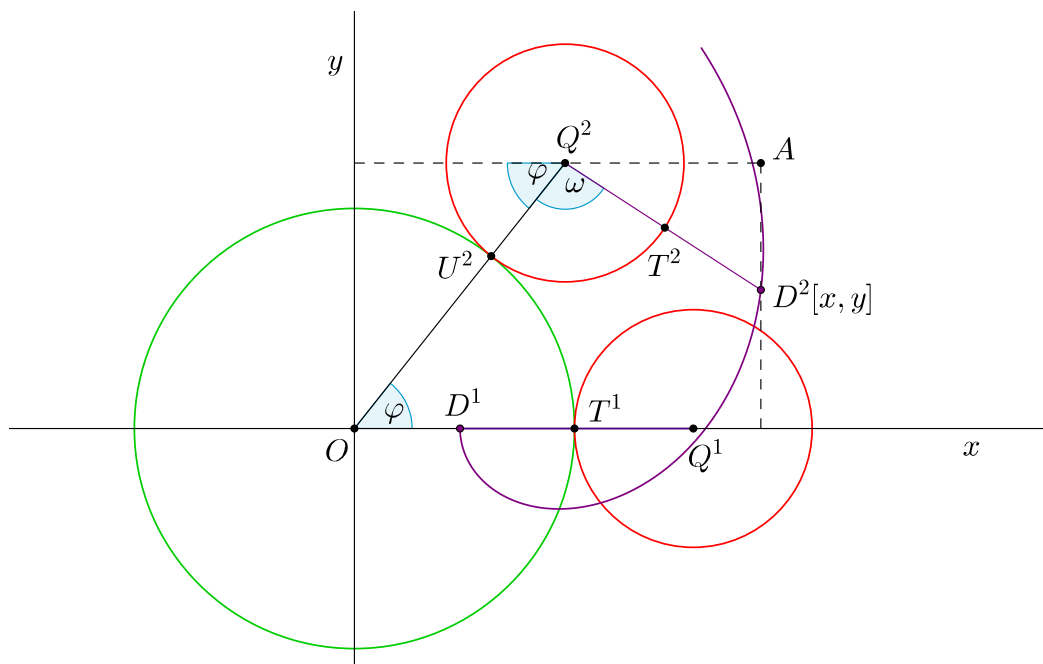


Obrázek 2.27: Epicykloida



Obrázek 2.28: Epicykloida - kardioida a nefroida





Obrázek 2.29: Analytické vyjádření epicykloidy

poloměr  $r_h$  a bod  $D$  neproměnné rovinné soustavy je od středu  $Q$  hybné polodie ve vzdálenosti  $v$  (obrázek 2.29).

Zajímají nás souřadnice bodu  $D$  v různých polohách hybné polodie. Z obrázku vidíme, že pro souřadnice bodu  $D^2$  platí:

$$x = x_{Q^2} + |Q^2A|,$$

$$y = y_{Q^2} - |AD^2|, \quad (2.17)$$

kde  $x_{Q^2}$  a  $y_{Q^2}$  jsou souřadnice bodu  $Q^2$ .

Z vlastností epicykloidálního pohybu víme, že délky kruhových oblouků  $T^1U^2$  a  $U^2T^2$  jsou stejné a můžeme proto psát  $r_p\varphi = r_h\omega$ . Souřadnice středu  $Q$  hybné polodie jsou ve druhé poloze (vyjádřeno v polárních souřadnicích):

$$Q = [(r_p + r_h) \cos \varphi, (r_p + r_h) \sin \varphi]. \quad (2.18)$$

Trojúhelník  $D^2AQ^2$  je pravoúhlý s přeponou délky  $v$ , velikosti odvěsen se vypočítají pomocí goniometrických funkcí a proto

$$|Q^2A| = v \cos(\pi - \varphi - \omega) = -v \cos(\varphi + \omega),$$

$$|D^2A| = v \sin(\pi - \varphi - \omega) = v \sin(\varphi + \omega). \quad (2.19)$$

Už jsme zmínili, že délky kruhových oblouků  $T^1U^2$  a  $U^2T^2$  jsou stejné a proto si můžeme vyjádřit parametr

$$\omega = \frac{r_p\varphi}{r_h}. \quad (2.20)$$

Nyní můžeme dát vše dohromady, konkrétně (2.18), (2.19) a (2.20) dosadíme do (2.17) a po úpravách vzniknou parametrické rovnice vyjadřující předpis epicykloidy

$$x = (r_p + r_h) \cos \varphi - v \cos \left( \frac{r_p + r_h}{r_h} \varphi \right),$$

$$y = (r_p + r_h) \sin \varphi - v \sin \left( \frac{r_p + r_h}{r_h} \varphi \right).$$

Pro trajektorii středu hybné polodie, kdy  $v = 0$ , speciálně vyjde

$$x = (r_p + r_h) \cos \varphi,$$

$$y = (r_p + r_h) \sin \varphi$$

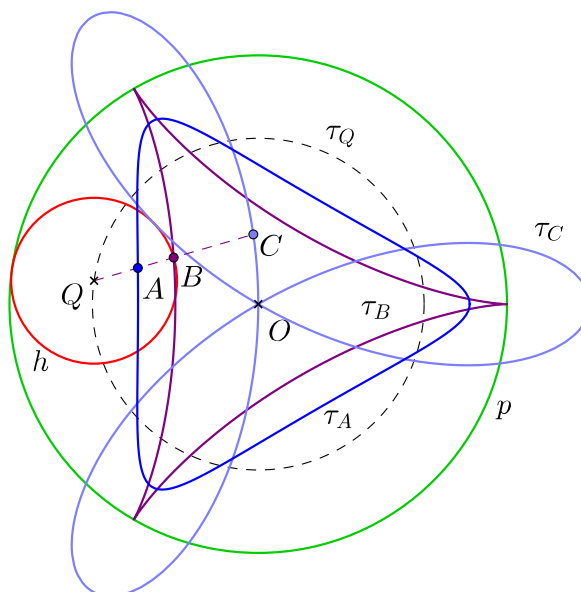
což je kružnice se středem v počátku kartézské soustavy s poloměrem  $r_p + r_h$ , jak jsme zmínili na začátku podkapitoly.

Epicykloidální pohyb je další způsob, jak získat Pascalovy závitnice. Analyticky si to lze ověřit dosazením rovnic pro epicykloidu, kdy  $r_p = r_h$ , do rovnice (2.14).

K tomuto pohybu je opět vytvořem v programu GeoGebra soubor, kde je možné se podívat na animaci a různé druhy epicykloid.

### 2.4.3 Hypocykloidální pohyb

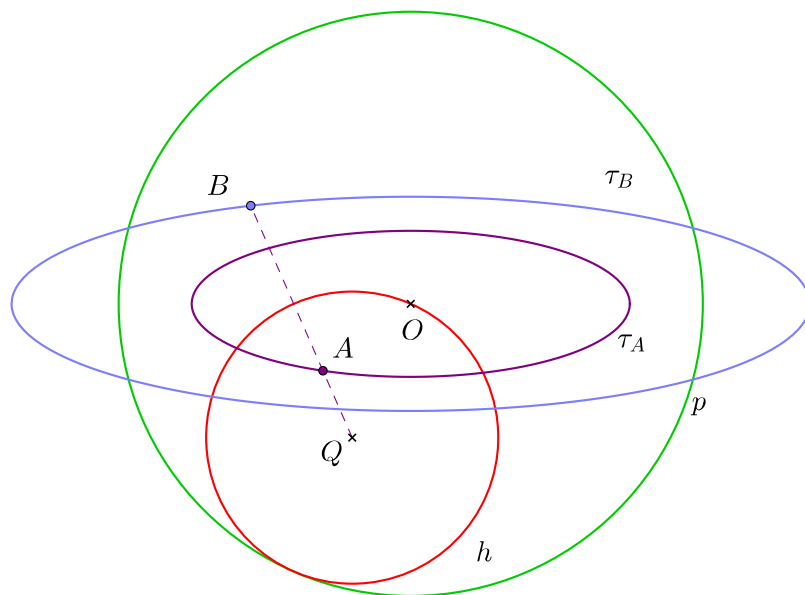
Hypocykloidální pohyb je pohyb, kdy se kružnice svým vnějším obvodem kotálí po vnitřním obvodu druhé kružnice. Křivky, které takto vznikají, se nazývají hypocykloidy. Stejně jako u předchozích příkladů cyklických pohybů, i zde mohou vzniknout zkrácené, prosté a prodloužené hypocykloidy a speciální případ nastane pro střed hybné polodie  $Q$  (obrázek 2.30)



Obrázek 2.30: Hypocykloida

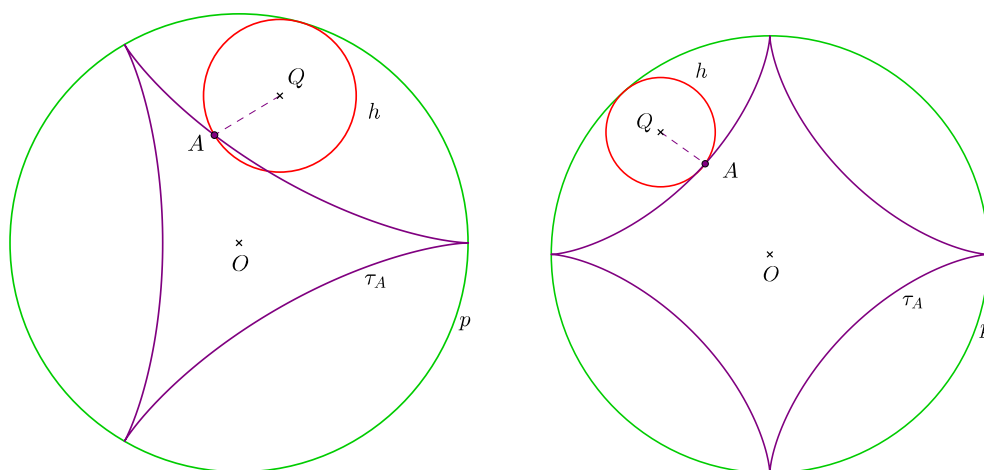
Pro poměr  $k$  poloměrů pevné a hybné polodie platí, stejně jako u epicyklického pohybu, že je-li číslo  $k$  racionální, je hypocykloida křivka algebraická a uzavřená a je-li  $k$  iracionální, je výsledná křivka transcendentní a neuzavřená. Aby pohyb zůstal hypocykloidální, poloměr hybné polodie musí být menší než poloměr pevné polodie.

Pokud bude poměr poloměrů  $r_p : r_h = 2 : 1$ , získáme tak pro prodlouženou a zkrácenou hypocykloidu *elipsu* (obrázek 2.31).



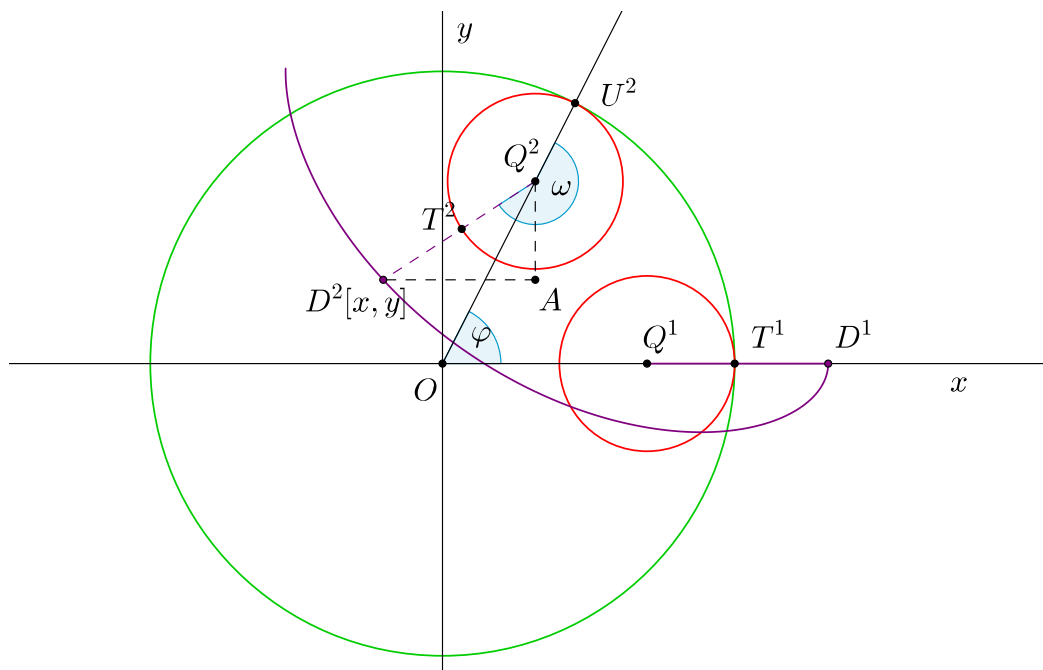
Obrázek 2.31: Prodloužená a zkrácená hypocykloida - elipsa

Prostá hypocykloida pro poměr  $r_p : r_h = 3 : 1$  se nazývá *Steinerova hypocykloida* a pro poměr  $r_p : r_h = 4 : 1$  *asteroida* (obrázek 2.32)



Obrázek 2.32: Steinerova hypocykloida a asteroida

Odvodíme si analytické vyjádření hypocykloidy pro případ, kdy pevná polodie s poloměrem  $r_p$  má střed v počátku kartézské soustavy a hybná polodie má



Obrázek 2.33: Analytické vyjádření hypocykloidy

poloměr velikosti  $r_h$  (obrázek 2.33). Postup je velmi podobný tomu, který jsme předvedli u epicykloidálního pohybu.

Souřadnice středu  $Q$  hybné polodie bude ve všech polohách

$$Q[(r_p - r_h) \cos \varphi, (r_p - r_h) \sin \varphi], \quad (2.21)$$

délky oblouků  $T^1U^2$  a  $T^2U^2$  jsou stejné, tedy můžeme psát  $r_p\varphi = r_h\omega$ . Souřadnice bodu  $D^2$  jsou

$$\begin{aligned} x &= x_{Q^2} - |D^2A|, \\ y &= y_{Q^2} - |Q^2A|. \end{aligned} \quad (2.22)$$

V pravoúhlém trojúhelníku je velikost úhlu  $|\angle Q^2D^2A| = \pi - \omega + \varphi$  a velikost přepony  $v$ , proto si můžeme délky odvěsen vyjádřit jako

$$\begin{aligned} |D^2Q^2| &= v \cos(\pi - \omega + \varphi) = -v \cos(\omega - \varphi), \\ |Q^2A| &= v \sin(\pi - \omega + \varphi) = v \sin(\omega - \varphi). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dosazením (2.21), (2.23) a vyjádření  $\omega = \frac{r_p\varphi}{r_h}$  do (2.22) dostaneme parametrické vyjádření hypocykloidy s parametrem  $\varphi$

$$\begin{aligned} x &= (r_p - r_h) \cos \varphi + v \cos \left( \frac{r_p - r_h}{r_h} \varphi \right), \\ y &= (r_p - r_h) \sin \varphi - v \sin \left( \frac{r_p - r_h}{r_h} \varphi \right). \end{aligned}$$

Můžeme se přesvědčit, že trajektorie středu hybné polodie je kružnice s poloměrem  $r_p - r_h$ , protože hodnota  $v$  je nulová.

Animaci kotálení hybné polodie uvnitř pevné polodie je možné si prohlédnout v souboru *hypocykloida\_animace*

## 2.4.4 Pericykloidální pohyb

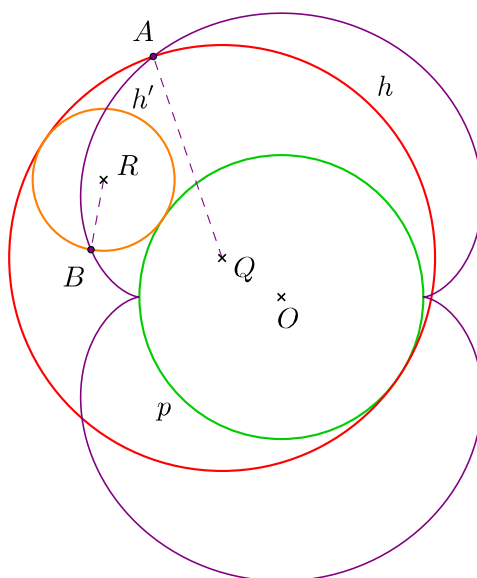
Pericykloidální pohyb je takový, kdy se hybná polodie svým vnitřním obvodem kotálí po vnějším obvodu pevné polodie. Je to vlastně vratný pohyb k hypocykloidálnímu pohybu. Ale důležitější věta, která platí pro pericykloidy je následující (převzato z [1]):

**Věta 2.** *Každá epicykloida je pericykloidou, a obráceně.*

Důkaz je možné nalézt tamtéž. Je-li epicykloida bodu  $A$ , který je ve vzdálenosti  $v$  od středu hybné polodie, zadána pevnou polodí s poloměrem  $r_p$  a hybnou s poloměrem  $r_h$ , pak platí pro poloměr  $r_{p'}$  pevné polodie shodné pericykloidy  $r_{p'} = \frac{r_p v}{r_h}$  a pro poloměr  $r_{h'}$  hybné polodie  $r_{h'} = r_{p'} + v$ .

Je-li poloměr hybné polodie dvojnásobně velký než poloměr pevné polodie, jedná se o kardioidický pohyb, který už dobře známe z předchozí podkapitoly 2.2. Na to, jaké křivky vzniknou různými poměry poloměrů pevné a hybné polodie, je možné se podívat v programu *pericykloida\_animace*.

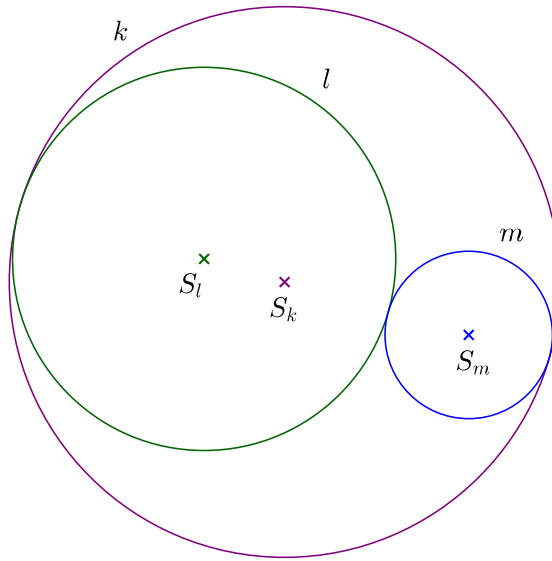
Podívejme se na prostou pericykloidu, která je zadána pevnou polodí s poloměrem  $r_p$  a hybnou polodí o poloměru  $r_h$ . Pak prostá pericykloida bude shodná s epicykloidou, která vznikne valením hybné polodie s poloměrem  $r_h - r_p$  po pevné polodii (obrázek 2.34). To vyplývá ze vztahu poloměrů popsaných výše.



Obrázek 2.34: Pericykloida - epicykloida

Dle [4] pak obecně platí následující: máme-li tři kružnice, z nichž se dvě dotýkají vně a třetí je svírá, pak vezmeme-li jednu z nich za pevnou, vytvoří druhé dvě valením po ní stejnou prostou cyklickou křivku (2.35). Nastat mohou dva různé případy:

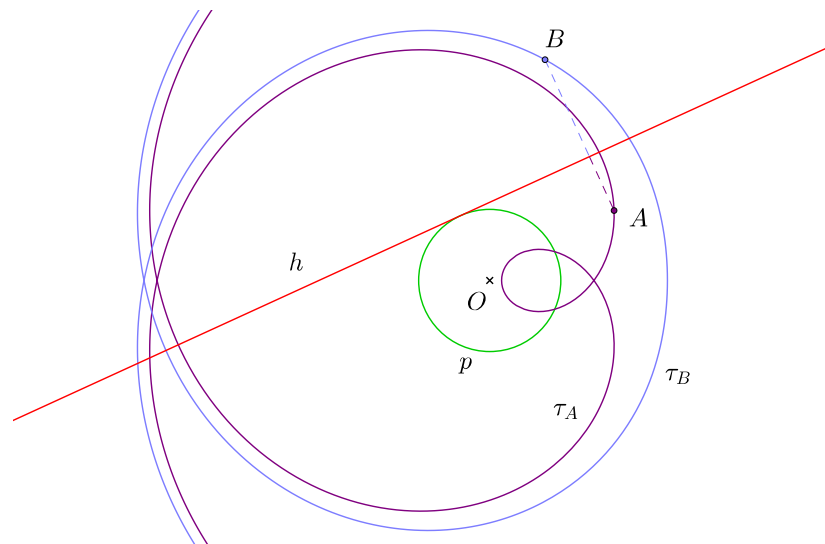
- pevná polodie bude největší z kružnic,  $k$ , pak vzniknou dvě shodné hypocykloidy
- pevná polodie bude jedna z vnitřních kružnic  $l$  nebo  $m$ , pak vznikne prostá pericykloida totožná s prostou epicykloidou



Obrázek 2.35: Zadání cyklických křivek

### 2.4.5 Evolventní pohyb

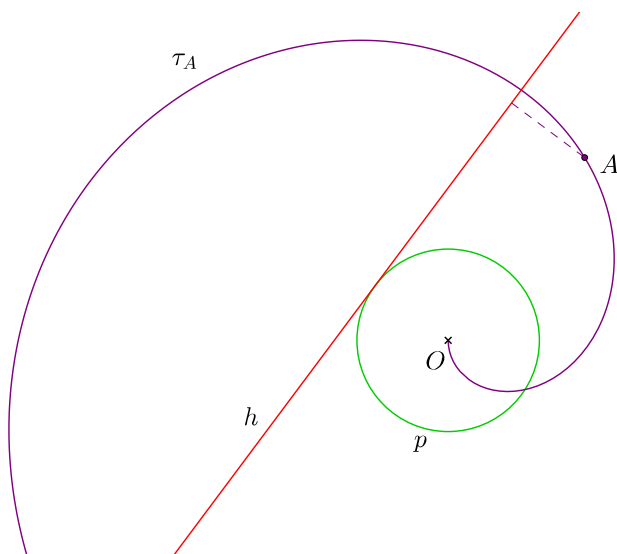
Obecně pohyb, kdy hybná polodie je přímka a pevná polodie je jiná křivka, se nazývá *evolventní*. My se nyní zaměříme na pohyb, kdy pevná polodie je kružnice. Tento pohyb je vratný k cykloidálnímu pohybu. Trajektorie bodu se nazývá *evolventa kružnice*, a opět mohou nastat tři případy v závislosti na poloze bodu vzhledem ke kružnici. Pokud bod leží uvnitř pevné polodie, trajektorie se nazývá *prodloužená evolventa kružnice*, bod ležící na přímce vykreslí *prostou evolventu kružnice* a trajektorie bodu mimo pevnou polodii je *zkrácená evolventa kružnice* (obrázek 2.36).



Obrázek 2.36: Prodloužená a zkrácená evolventa

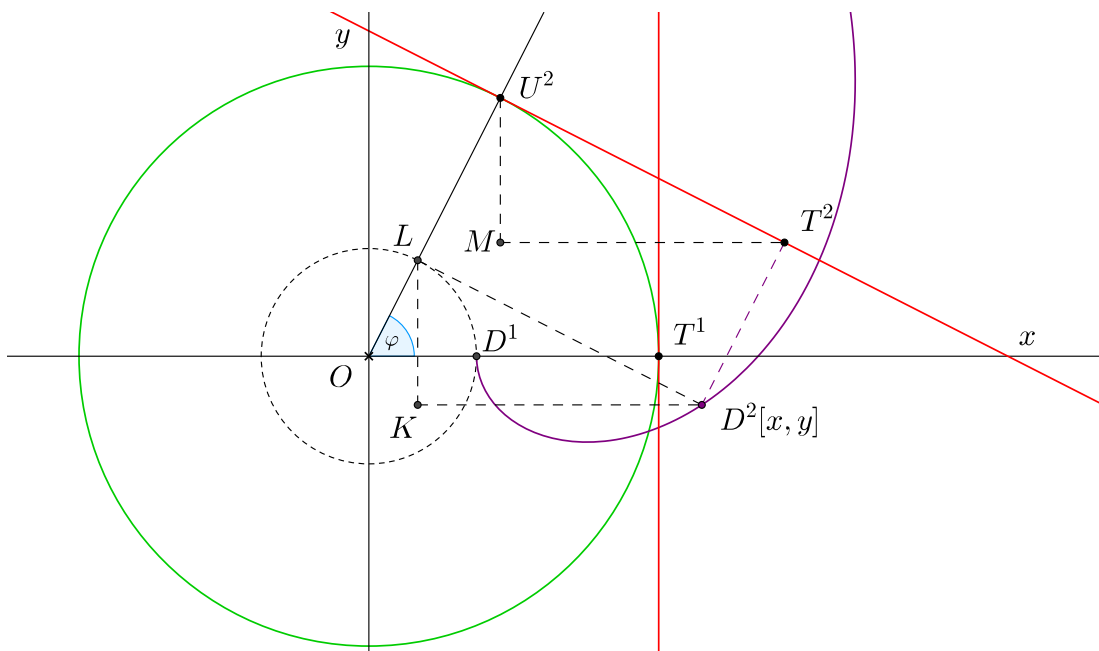
Speciální případ evolventy nastane, pokud jedna z poloh bodu neproměnné rovinné soustavy splyne se středem pevné polodie. Pak se křivka, kterou vykreslí takový bod, nazývá *Archimédova spirála* (obrázek 2.37). Jinak křivku můžeme

popsat také tak, že vzdálenost bodu spirály od počátku soustavy souřadnic je přímo úměrná úhlu otočení přímky procházející bodem spirály a počátkem (viz například [5]).



Obrázek 2.37: Archimédova spirála

Podívejme se na analytické odvození evolventy kružnice. Mějme pevnou polohu se středem v počátku kartézské soustavy a poloměrem  $r$ . Bod  $D$ , který bude vytvářet danou evolventu, je od středu ve vzdálenosti  $v$  (obrázek 2.38).



Obrázek 2.38: Analytické vyjádření evolventy

Souřadnice bodu  $D^2$  můžeme vyjádřit pomocí bodu  $L$  a délek odvěsen v pravouhlém trojúhelníku  $KD^2L$  jako

$$\begin{aligned} x &= x_L + |KD^2|, \\ y &= y_L - |LK|, \end{aligned} \tag{2.24}$$

kde  $x_L$  a  $y_L$  jsou souřadnice bodu  $L$ .

Víme, že délka oblouku  $T^1U^2$  a velikost úsečky  $T^2U^2$  jsou stejné, tedy  $|T^1U^2| = r\varphi$ . Dále je z obrázku patrné, že trojúhelníky  $MT^2U^2$  a  $KD^2L$  jsou shodné. Uvědomíme-li si, že přímka je v každé poloze tečnou kružnice, pak lze snadno ukázat, že velikost úhlu  $MU^2T^2$ , resp.  $KLD^2$ , je  $\varphi$ . V pravoúhlém trojúhelníku pak snadno dopočítáme délky odvěsen

$$\begin{aligned} |MU^2| &= |KL| = r\varphi \cos \varphi, \\ |MT^2| &= |KD^2| = r\varphi \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Bod  $L$  leží na kružnici se středem v počátku soustavy s poloměrem  $v$ , proto polární souřadnice tohoto bodu jsou

$$\begin{aligned} x_L &= v \cos \varphi, \\ x_L &= v \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Nyní stačí do vyjádření (2.24) dosadit rovnice (2.25) a (2.26) a získáme rovnice evolventy kružnice

$$\begin{aligned} x &= v \cos \varphi + r\varphi \sin \varphi, \\ y &= v \sin \varphi - r\varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.27)$$

V příloženém souboru *evolventa\_animace* je možné měnit vzdálenost bodu od středu pevné polodie a podívat se tak na různé typy evolvent kružnice.



## 3. Historie a využití

Nyní už známe několik základních křivek kinematické geometrie v rovině, způsob jejich zadávání, sestavení, rovnice a souvislosti mezi pohyby. V následující kapitole se podíváme na vybrané zajímavé křivky, ať už z pohledu historie nebo využití v praxi. Spíše se ale zaměříme na jejich geometrický význam, který se budeme snažit více popsat, než na technickou stránku věci. Odborné využití, například ve strojírenství, budeme popisovat stručně a co nejsrozumitelněji i pro čtenáře bez technického vzdělání.

### 3.1 Cyklické křivky

Cyklických pohybů se využívá pro různé druhy ozubených kol, která nám převádí rotační pohyb na jiný rotační pohyb nebo na posuvný a obráceně. To je hlavní princip převodovek a podobných strojů, stačí si vzpomenout na vnitřek hodinek (obrázek 3.1).



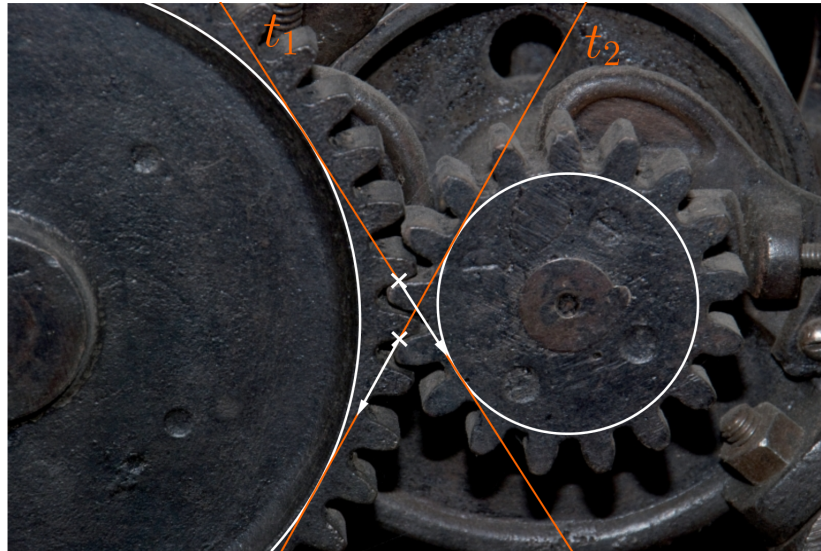
Obrázek 3.1: Ozubená kola a převodovka (převzato z <http://www.quartaparetepress.it/2016/02/27/lincredibile-critica/> a <https://cs.wikipedia.org/wiki/Převodovka>)

Na ozubená kola a soukolí jsou kladeny různé podmínky, aby stroj byl co nejefektivnější. Jmenujme například rovnoměrný přenos otáček a co nejmenší ztráty energie. Toto má vliv i na profil boku zubu. Nejčastěji používaným profilem je evolventní (obrázek 3.2). Společný dotykový bod dvou ploch zubů se pohybuje po přímce, která je tečnou k základním kružnicím ozubených kol.

Kinematické mechanismy slouží také k převodu mezi různými druhy pohybů (rotační, posuvný), ale jsou už o něco složitější. Využívají k tomu převodové části jako jsou páky, kliky, vačky atd. Výsledný mechanismus by měl být co nejjednodušší a splňovat zadané parametry, jako pohyb určitých bodů soustavy po dané trajektorii.

Představme si pár jednoduchých a častých kinematických mechanismů:

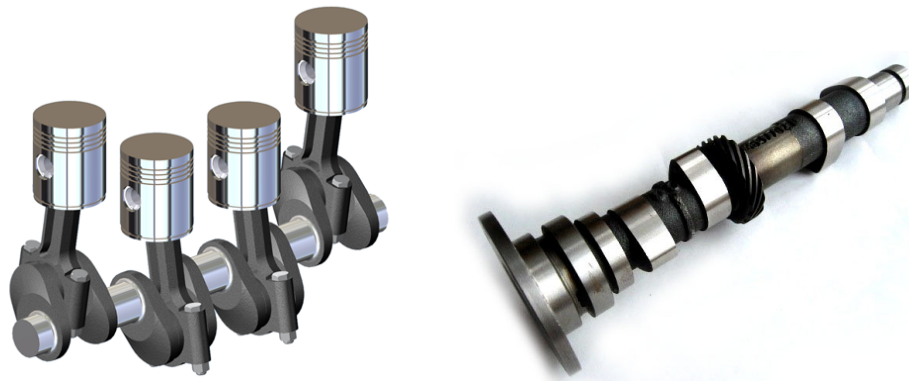
- *klikový mechanismus* - převádí přímočarý pohyb na rotační pomocí pístu, který se pohybuje po úsečce od jednoho konce k druhému; použití například ve spalovacích motorech (obrázek 3.3)



Obrázek 3.2: Evolventní ozubení

- *vačkový mechanismus* - převádí rotační pohyb na pohyb posuvný nebo kývavý jen ve vymezeném okamžiku; vačkové hřídel nalezneme například ve spalovacím motoru (obrázek 3.3)
- *pohybové šrouby* - převádí otáčivý pohyb na posuvný a naopak; použití v ručních lisech, svěrácích atd.

Více je možné nalézt například v [5], [4] a jiných, hlavně strojírenských, knihách.



Obrázek 3.3: Klikový mechanismus a vačková hřídel (převzato z <http://www.usysla.eu/index.php?go=inventor/galerie/klikovka> a [http://www.revoracing.cz/index.php?option=com\\_content&view=article&id=35&Itemid=215](http://www.revoracing.cz/index.php?option=com_content&view=article&id=35&Itemid=215))

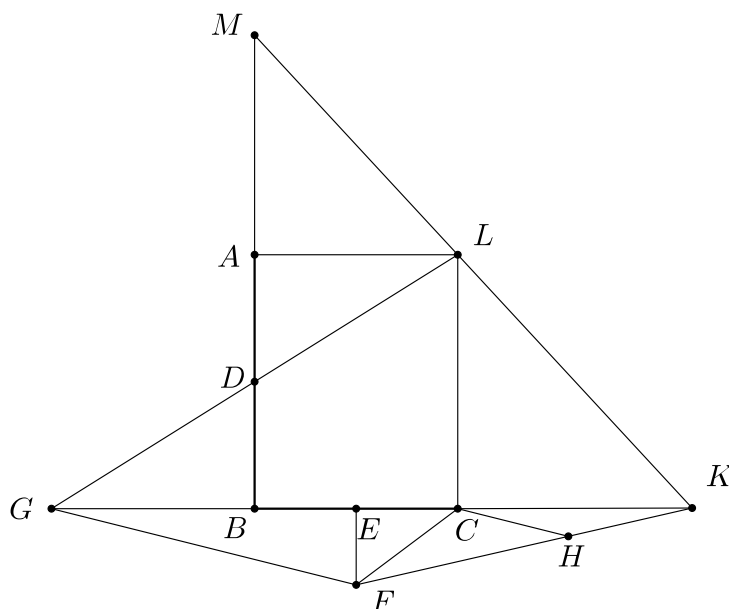
Křivka, po které se hmotný bod dostane z počáteční pozice do koncové za nejkratší dobu pouze působením homogenního gravitačního pole, se nazývá *brachistochrona*. Poprvé o ní psal na konci 17. století Johann Bernoulli v časopise *Acta Eruditorum*. Je zajímavé, že se jedná o část prosté cykloidy. Této křivky se například využívá při stavění ramp na skateboarding a snowboarding nebo jako mostních oblouků (viz [5]).

## 3.2 Nikomédova konchoida

Jak napovídá název, jedná se o křivku, o které poprvé píše Nikomédés. Jak se můžeme dočíst v [7] tuto křivku popsal ve své knize *O konchoidách* (3. stol. př. n. l.) pro stanovení dvou středních geometrických úměrných. Jméno konchoida znamená *tvaru škeble*. Zajímavé je však její využití k trisekci úhlu a k zobecněnému problému zdvojení krychle.

Hippokratés z Chiu zobecnil problém hledání velikosti hrany krychle o dvojnásobném objemu, když popsal jiný problém, a to nalezení dvou úseček, geometrických úměrných,  $x, y$ , které budou se zadanými úsečkami  $a, b$  v postupném poměru  $a : x = x : y = y : b$ . Dokázal, že pak bude platit také  $a^3 : x^3 = a : b$  (viz [6]). A tak pro  $b = 2a$  jde o řešení zdvojení krychle.

Tohoto zobecněného problému využil také Nikomédés. Mějme dány dvě úsečky  $AB$  a  $BC$ . Označme si  $AB = a$ ,  $BC = b$ . Budeme hledat takové úsečky  $x, y$  jako jsou popsány výše. Nechť jsou na sebe úsečky  $AB, BC$  kolmé, body  $D, E$  po řadě středy úseček  $AB, BC$  a bod  $L$  čtvrtý vrchol obdélníku  $ABCL$  (obrázek 3.4).



Obrázek 3.4: Zobecněné zdvojení krychle

Body  $L, D$  vedeme přímkou, která protne přímkou  $BC$  v bodě  $G$ . Bod  $F$  bude ležet na kolmici vedoucí bodem  $E$  k  $BC$  ve vzdálenosti  $|AD|$  od bodu  $C$ . Úsečka  $CH$  je rovnoběžná s úsečkou  $GF$ . Poté vedeme přímkou  $FH$  tak, aby průsečík  $K$  s přímkou  $BC$  splňoval podmínku  $|HK| = |CF| = |AD|$ .

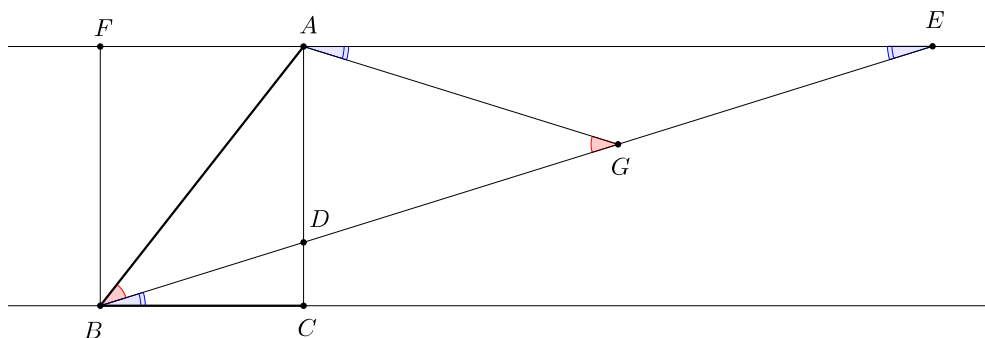
K nalezení bodu  $K$  se právě použije Nikomédova konchoida, kde bod  $F$  je pól konchoidy,  $CH$  je řídicí přímka konchoidy a velikost  $|AD|$  udává vzdálenost od bodu na přímce  $CH$ . Bodem  $K$  poté vedeme přímkou přes bod  $L$  a průsečík přímek  $KL$  a  $AB$  označme  $M$ . Úsečky  $CK$  a  $MA$  jsou hledané úsečky  $x, y$ .

Nyní si projdeme důkaz, jak je ho možné nalézt v [6]. Protože  $|BE| = |EC|$ , platí

$$|BK| \cdot |KC| + |CE|^2 = |EK|^2.$$

Přidáním k oběma stranám  $|EF|^2$  vyjde rovnost

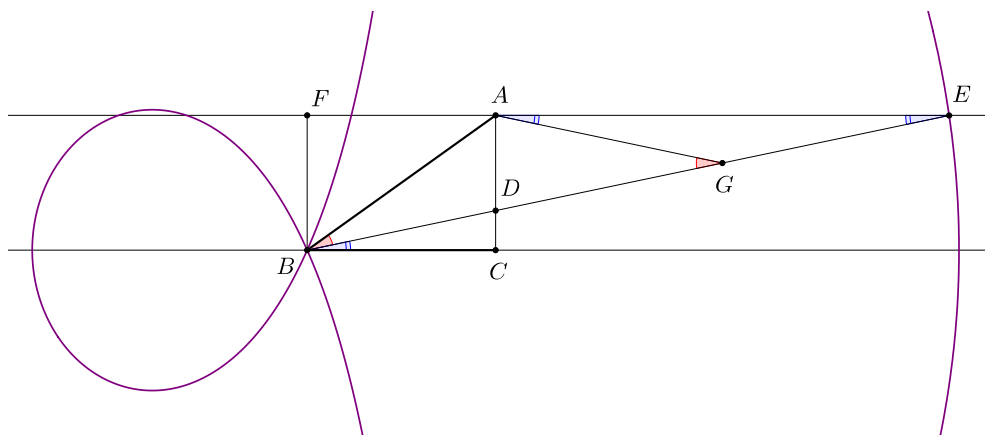




Obrázek 3.6: Trisekce úhlu

Trojúhelník  $ABC$  doplníme na obdélník  $BCAF$ . Na přímce  $FA$  hledáme bod  $E$  tak, aby průsečík  $D$  úseček  $BE$  a  $CA$  byl ve vzdálenosti  $2|AB|$  od bodu  $E$ . Pak jsou si rovny délky úseček  $|DG| = |GE| = |AG| = |AB|$ . Z rovnoramenného trojúhelníku  $BGA$  plyne rovnost úhlů  $|\angle ABG| = |\angle AGB|$ , dále pak platí  $|\angle AGB| = 2|\angle AEG|$  a nakonec pro souhlasné úhly platí  $|\angle AEG| = |\angle DBC|$ . Proto  $|\angle DBC| = \frac{1}{3}|\angle ABC|$ .

Hledaný bod  $E$  získáme právě pomocí Nikomédovy konchoidy. Bod  $B$  bude pólem konchoidy, přímka  $AC$  řídicí přímka konchoidy a vzdálenost od bodu na přímce  $AC$  bude  $2|AB|$ . Pak bod  $E$  bude průsečíkem konchoidy a přímky  $FA$  (obrázek 3.7).



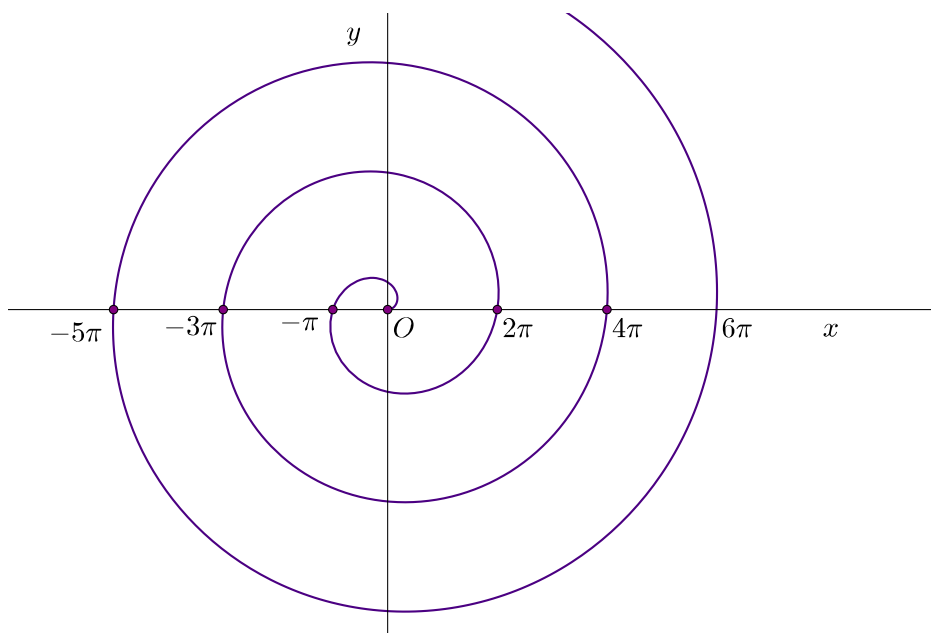
Obrázek 3.7: Trisekce úhlu - Nikomédova konchoida

Na závěr nesmíme zapomenout zmínit, že k řešení těchto klasických problémů antické matematiky bylo využito i neeukleidovských postupů. Použili jsme křivku, kterou běžným způsobem pouze za pomoci pravítka a kružítka nesestrojíme. Nikomédes ve své době vytvořil nástroj na kreslení konchoidy - dvě na sebe kolmá pravítka s pevným bodem na jenom pravítku a s pohyblivým na druhém, a třetí, které procházelo právě těmito body. Konec pohyblivého se třetího pravítka vykreslil jednu větev konchoidy.

### 3.3 Archimédova spirála

Jak jsme už krátce zmínili v podkapitole 2.4.5, vznik této křivky si můžeme představit i jako trajektorii bodu, který se rovnoměrně posunuje po polopřímce jdoucí počátkem a rovnoměrně se otáčející kolem počátku. V polárních souřadnicích má křivka vyjádření  $r = a\varphi$ .

Archimédes, po kterém je křivka pojmenována, tuto spirálu a její význam studoval ve své práci *O spirálách* (3. stol. př. n. l.). Zajímavostí například je, že vzdálenosti mezi průsečíky spirály a přímkou procházející počátkem jsou od určitého bodu stále stejné (obrázek 3.8)

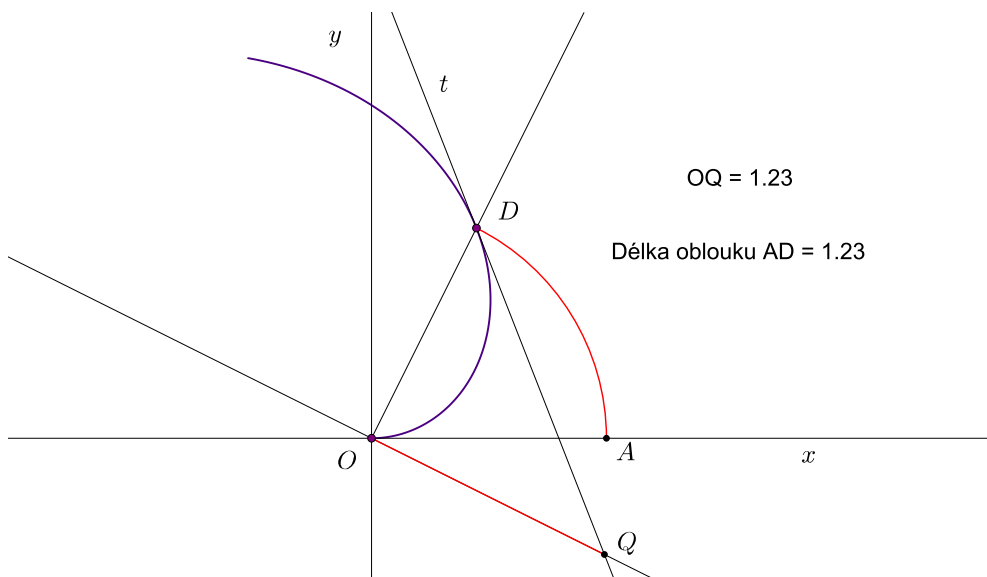


Obrázek 3.8: Průsečíky Archimédovy spirály s osou  $x$

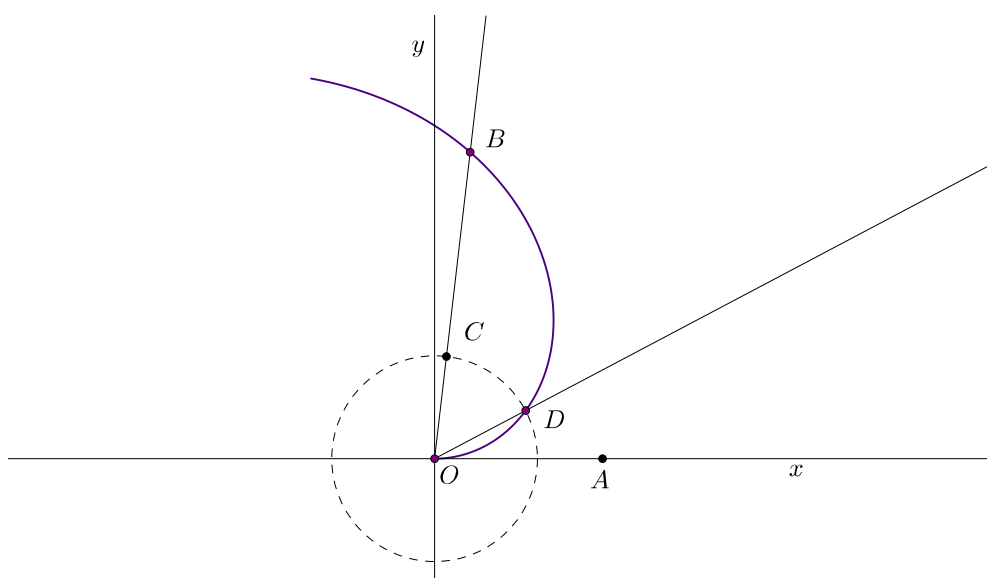
Ve svém spisu ale hlavně Archimédes popsal využití při řešení trisekce úhlu a kvadratuře kruhu. Jak se můžeme dočíst v [7], tak délka polární subtangenty  $OQ$  je stejná jako délka kruhového oblouku  $AD$ . Jinými slovy, vedme bodem  $D$  na spirále tečnu  $t$ , bodem  $O$  kolmici k  $OD$  a průsečík kolmice a tečny označme  $Q$ . Pak platí pro kruhový oblouk se středem v bodě  $O$ , že  $|\widehat{AD}| = |OQ|$ . V programu GeoGebra je možné si zjistit délky úseček a oblouků, a tak lze například studentům ukázat pomocí moderní technologie, že geometrické věty a tvrzení skutečně platí (obrázek 3.9).

Díky tomu, jakým způsobem je spirála definovaná, je trisekce úhlu celkem jasným důsledkem. Podívejme se na předpis, jak jsme ho napsali výše. Vidíme, že abychom se dostali k třetině úhlu  $AOB$ , musíme najít bod na spirále vzdálen třetinu délky  $OB$  od počátku. Takovým bod  $D$  bude ležet zároveň i na kružnici se středem v počátku a poloměrem  $\frac{1}{3}|OB|$  (obrázek 3.10). Obecně bychom mohli najít  $nt$ inu zadaného úhlu.

Dodejme ještě, že Archimédovy spirály se využívá pro tvar vačky, když chceme převést rotační pohyb na pohyb po přímce.



Obrázek 3.9: Rektifikace kružnice



Obrázek 3.10: Trisekce úhlu

# Závěr

V práci se mi podařilo pomocí názorných ilustrací a animací vysvětlit nejen základní pojmy kinematické, ale také některé typy pohybů. Programy vytvořené v softwaru GeoGebra jsou nedílnou součástí diplomové práce, protože dokreslují právě to, o čem kinematická geometrie je – pohyb bodů a křivek v rovině.

Animace se dají použít jak na vysokoškolských kurzech deskriptivní geometrie, tak na středních školách. Tam mohou sloužit jako motivace pro studium geometrie nebo na odborných středních školách jako moderní učební pomůcka.

Části práce, které se věnují analytickému odvození křivek, jsou také vhodné na vybrané středoškolské semináře, protože nabízí i obecné postupy hledání vyjádření obecně zadaných křivek. Žáci si pomocí moderních softwarů, jako je například právě GeoGebra, mohou ověřovat své postupy a výsledky v analytické geometrii.

Závěrečná kapitola stručně shrnula využití kinematické geometrie v praxi. Případným zájemcům o hlubší náhled do problému doporučuji literaturu technického zaměření, strojírenství, stavebnictví apod.

Rychlý vhled do historie nabídl představu o tom, jak jsou některé z křivek již dlouho známy a jaký měly ve své době význam, když pomohly řešit klasické problémy antické matematiky (musíme ovšem dodat, že k tomu bylo použito i neeukleidovských postupů). Opět tato část může sloužit jako motivace v hodinách matematiky i na středních školách.

S tímto tématem by se dalo dále pracovat, hlavně co se týká využití v praxi, nebo navázat kinematickou geometrií v prostoru.



# Seznam použité literatury

- [1] URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie II*. 3. vydání. Praha: SNTL, 1984.
- [2] KARGEROVÁ, Marie. *Deskriptivní geometrie pro technické školy vysoké, vyšší a střední*. 1. vydání. Ostrava: MONTANEX a.s., 1997. ISBN 80-85780-68-2.
- [3] DRÁBEK, Karel, HARANT, František, SETZER, Ota. *Deskriptivní geometrie II*. 2. vydání. Praha: SNTL, 1979.
- [4] ŠMEJKAL, Jaromír. *Technické křivky geometrické v praxi*. 2. vydání. Praha: Česká grafická Unie a.s., 1946.
- [5] VORÁČOVÁ, Šárka (ed.), et al. *Atlas geometrie: geometrie krásná a užitečná*. 1. vydání. Praha: Academia, 2012. ISBN 978-80-200-1575-4.
- [6] HEATH, Thomas Little. *A history of Greek mathematics (From Thales to Euclid)*. Oxford: Clarendon Press, 1921.
- [7] LOMTATIDZE, Lenka. *Historický vývoj pojmu křivka*. Brno: Nadace Universitas, 2007. ISBN 978-08-7204-492-4

# Seznam obrázků

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Trajektorie bodu . . . . .   | 3  |
| 1.2  | Křivková obálka kružnic a přímek . . . . .                                 | 3  |
| 1.3  | Bodová obálka kružnic a přímek . . . . .                                   | 4  |
| 1.4  | Pohyb zadaný dvěma trajektoriemi . . . . .                                 | 5  |
| 1.5  | Dourčení trajektorie bodu $C$ . . . . .                                    | 5  |
| 1.6  | Dvě trajektorie . . . . .  | 6  |
| 1.7  | Dvě křivkové obálky . . . . .  | 6  |
| 1.8  | Dvě bodové obálky . . . . .  | 7  |
| 1.9  | Bodová a křivková obálka . . . . .   | 7  |
| 1.10 | Trajektorie bodu a křivková obálka . . . . .                               | 8  |
| 1.11 | Trajektorie bodu a bodová obálka . . . . .                                 | 8  |
| 1.12 | Otočení polohy $\Sigma^1$ do polohy $\Sigma^2$ . . . . .                   | 9  |
| 1.13 | Posunutí polohy $\Sigma^1$ do polohy $\Sigma^2$ . . . . .                  | 10 |
| 1.14 | Okamžitý střed otáčení . . . . .   | 10 |
| 1.15 | Nalezení okamžitého středu otáčení - dvě trajektorie . . . . .             | 11 |
| 1.16 | Nalezení okamžitého středu otáčení - obálka a trajektorie . . . . .        | 11 |
| 1.17 | Nalezení okamžitého středu otáčení - bodová obálka a trajektorie . . . . . | 12 |
| 1.18 | Pohyb $h_\alpha$ po $p_\alpha$ . . . . .                                   | 13 |
| 1.19 | Pevná polodie $p$ . . . . .  | 13 |
| 1.20 | Hybná polodie $h$ . . . . .  | 14 |
| 1.21 | Pohyb zadán pevnou a hybnou polodií . . . . .                              | 14 |
| 1.22 | Pohyb zadán pevnou a hybnou polodií - odvalování . . . . .                 | 15 |
| 1.23 | Trajektorie bodu $C$ . . . . .   | 15 |
| 1.24 | Konstrukce obálky ( $k$ ) pro kružnici $k$ . . . . .                       | 16 |
| 1.25 | Vratný pohyb . . . . .   | 17 |
|      |  |    |
| 2.1  | Pevná polodie eliptického pohybu . . . . .                                 | 18 |
| 2.2  | Pevná polodie eliptického pohybu - obecný úhel . . . . .                   | 19 |
| 2.3  | Pevná a hybná polodie eliptického pohybu . . . . .                         | 19 |
| 2.4  | Trajektorie bodu na hybné polodii . . . . .                                | 20 |
| 2.5  | Trajektorie zvoleného bodu eliptického pohybu . . . . .                    | 20 |
| 2.6  | Analytické vyjádření pevné polodie - eliptický pohyb . . . . .             | 21 |
| 2.7  | Analytické vyjádření trajektorie bodu . . . . .                            | 22 |
| 2.8  | Pevná polodie kardioidického pohybu . . . . .                              | 23 |
| 2.9  | Pevná polodie kardioidického pohybu - obecný úhel . . . . .                | 23 |
| 2.10 | Pevná a hybná polodie kardioidického pohybu . . . . .                      | 24 |
| 2.11 | Trajektorie bodu $C$ při kardioidickém pohybu . . . . .                    | 25 |
| 2.12 | Pascalovy závitnice - uzlový bod . . . . .                                 | 25 |
| 2.13 | Pascalovy závitnice - bod vratu . . . . .                                  | 26 |
| 2.14 | Pascalovy závitnice . . . . .  | 26 |
| 2.15 | Analytické vyjádření pevné polodie - kardioidický pohyb . . . . .          | 27 |
| 2.16 | Analytické vyjádření trajektorie bodu . . . . .                            | 28 |
| 2.17 | Nikomédova konchoida . . . . .   | 29 |
| 2.18 | Pevná polodie - konchoida přímky . . . . .                                 | 30 |
| 2.19 | Nikomédova konchoida - analytické vyjádření . . . . .                      | 30 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.20 | Konchoida kružnice - Pascalova závitnice . . . . .            | 31 |
| 2.21 | Konchoida kružnice . . . . .                                  | 32 |
| 2.22 | Zadání cykloidálního a evolventního pohybu . . . . .          | 33 |
| 2.23 | Zadání hypocykloidálního a pericykloidálního pohybu . . . . . | 33 |
| 2.24 | Zadání epicykloidálního pohybu . . . . .                      | 33 |
| 2.25 | Cykloida . . . . .  | 34 |
| 2.26 | Analytické vyjádření cykloidy . . . . .                       | 34 |
| 2.27 | Epicykloida . . . . .   | 36 |
| 2.28 | Epicykloida - kardioida a nefroida . . . . .                  | 36 |
| 2.29 | Analytické vyjádření epicykloidy . . . . .                    | 37 |
| 2.30 | Hypocykloida . . . . .  | 38 |
| 2.31 | Prodloužená a zkrácená hypocykloida - elipsa . . . . .        | 39 |
| 2.32 | Steinerova hypocykloida a asteroida . . . . .                 | 39 |
| 2.33 | Analytické vyjádření hypocykloidy . . . . .                   | 40 |
| 2.34 | Pericykloida - epicykloida . . . . .                          | 41 |
| 2.35 | Zadání cyklických křivek . . . . .                            | 42 |
| 2.36 | Prodloužená a zkrácená evolventa . . . . .                    | 42 |
| 2.37 | Archimédova spirála . . . . .                                 | 43 |
| 2.38 | Analytické vyjádření evolventy . . . . .                      | 43 |
|      |   |    |
| 3.1  | Ozubená kola a převodovka . . . . .                           | 45 |
| 3.2  | Evolventní ozubení . . . . .                                  | 46 |
| 3.3  | Klikový mechanismus a vačková hřídel . . . . .                | 46 |
| 3.4  | Zobecněné zdvojení krychle . . . . .                          | 47 |
| 3.5  | Zobecněné zdvojení krychle - Nikomédova konchoida . . . . .   | 48 |
| 3.6  | Trisekce úhlu . . . . .                                       | 49 |
| 3.7  | Trisekce úhlu - Nikomédova konchoida . . . . .                | 49 |
| 3.8  | Průsečíky Archimédovy spirály s osou $x$ . . . . .            | 50 |
| 3.9  | Rektifikace kružnice . . . . .                                | 51 |
| 3.10 | Trisekce úhlu . . . . .                                       | 51 |

# Seznam animací

- I *pevna\_hybna\_polodie\_animace*
- II *priklad\_zadani\_polodiemi*
- III *elipticky\_pohyb\_animace*
- IV *kadioidicky\_pohyb\_animace*
- V *konchoida\_primky\_animace*
- VI *konchoida\_kruznice\_animace*
- VII *cykloida\_animace*
- VIII *epicykloida\_animace*
- IX *hypocykloida\_animace*
- X *pericykloida\_animace*
- XI *evolventa\_animace*