Konstruktivní geometrie kombinované studium

Přednáška 2

Analytická geometrie v E2 a E3

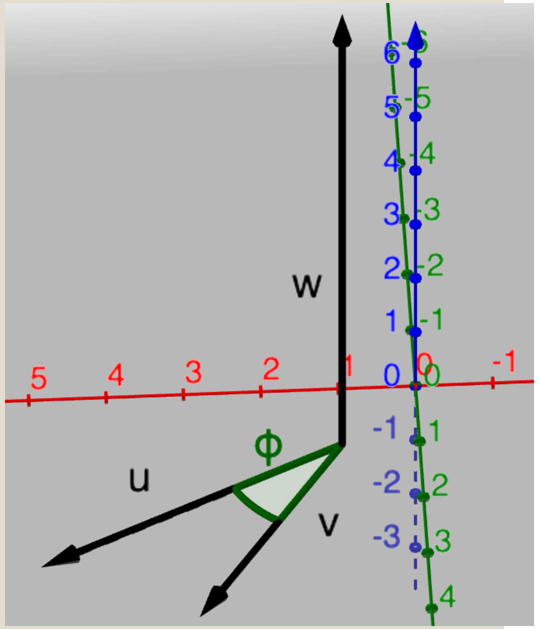
Kuželosečky a kvadriky

Analytická geometrie

- zkoumá geometrické útvary a vztahy mezi nimi pomocí algebry a matematické analýzy
- základní pojmy:
  - bod, vektor
  - souřadnice vektoru v E_3: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$
  - velikost vektoru: $\|\vec{u}\| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$
  - skalární součin dvou nenulových vektorů: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot cos\varphi$
  - odchylka dvou nenulových vektorů: $cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$

Analytická geometrie

- vektorový součin: $\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) = \vec{u}\vec{v} \cdot sin\varphi$
  $||\vec{u} \times \vec{v}||$ = obsah rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}$
- smíšený součin: $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
  $|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$ = objem rovnoběžnostěnu o stranách $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$
- lineární závislost vektorů:
  určují stejnou přímku, jsou kolineární (resp. v prostoru leží v jedné rovině, jsou koplanární



Analytická geometrie

- rovnice přímky p:

  parametrická - $X(t) = A + t \cdot \vec{u}, t \in \mathbb{R}$

  pro $\vec{u} = B - A$ a $t \in (-\infty; 0\rangle$ jde o polopřímku k bodu A

  pro $\vec{u} = B - A$ a $t \in \langle 0; \infty)$ jde o polopřímku AB

  pro $\vec{u} = B - A$ a $t \in \langle 0; 1\rangle$ jde o úsečku AB

  V ROVINĚ ještě rovnice:

  obecná: $ax + by + c = 0$, kde $(a, b) = \vec{n}$ = normálový vektor

  směrnicový tvar: $y = kx + q$, kde $k = tg\varphi$ = směrnice, $q = p \cap y$

  úsekový tvar: $\frac{x}{r} + \frac{y}{q} = 1$, kde $r = p \cap x$ a $q = p \cap y$

Analytická geometrie

- rovnice roviny ρ:
  obecná rovnice: $ax + by + cz + d = 0$, kde $(a, b, c) = \vec{n} =$ normálový vektor roviny ρ
  úsekový tvar: $\frac{x}{r} + \frac{y}{q} + \frac{z}{v} = 1$, kde $r = \rho \cap x$ a $q = \rho \cap y$ a $v = \rho \cap z$
  parametrická: $X(t, s) = A + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}, t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$

- ***příklady*** na zobrazení roviny, vzájemnou polohu bodu a přímky (dosazení či lineární (ne)závislost 2 vektorů), poloha dvou přímek (v rovině a v prostoru), poloha přímky a roviny, poloha dvou rovin

Analytická geometrie

- poloha dvou přímek v prostoru:

$p: X(t) = A + t \cdot \vec{u}$ a $q: X(t) = B + t \cdot \vec{v}$

$\vec{u}$ a $\vec{v}$

lineárně závislé (kolineární)

lineárně nezávislé (nekolineární)

$p \parallel q$

pokud $A \notin q$
nebo $B \notin p$

$p \equiv q$

pokud $A \in q$
nebo $B \in p$

$p \times q$

pokud $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}$
lineárně závislé

p, q mimoběžné

pokud $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}$
lineárně nezávislé

Analytická geometrie

- poloha přímky a roviny:

$p: X(t) = A + t \cdot \vec{u}$ a $\rho = (B, \vec{n})$

$\vec{u}$ a $\vec{n}$

kolmé $\vec{u} \perp \vec{n}$, tedy $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

$p \parallel \rho$

pokud $A \notin \rho$

$p \subset \rho$

pokud $A \in \rho$

nejsou kolmé

$p \times \rho$

Analytická geometrie

- poloha dvou rovin:

$\alpha = (A, \overrightarrow{n_\alpha})$ a $\beta = (B, \overrightarrow{n_\beta})$

$\overrightarrow{n_\alpha}$ a $\overrightarrow{n_\beta}$

kolineární

nekolineární

$\alpha \parallel \beta$

pokud $A \notin \beta$
nebo $B \notin \alpha$

$\alpha \equiv \beta$

pokud $A \in \beta$
nebo $B \in \alpha$

$\alpha \times \beta$

Analytická geometrie

- odchylka dvou přímek: $p = (A, \vec{u})$ a $q = (B, \vec{v})$

  $$cos\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}, \text{ kde } \varphi \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

- odchylka dvou rovin: $\alpha = (A, \overrightarrow{n_\alpha})$ a $\beta = \left(B, \overrightarrow{n_\beta}\right)$

  $$cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}\right|}{\|\overrightarrow{n_\alpha}\| \cdot \left\|\overrightarrow{n_\beta}\right\|}, \text{ kde } \varphi \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

- odchylka přímky a roviny: $p = (A, \vec{u})$ a $\beta = \left(B, \overrightarrow{n_\beta}\right)$

  $$cos\varphi‘ = \frac{\left|\vec{u} \cdot \overrightarrow{n_\beta}\right|}{\|\vec{u}\| \cdot \left\|\overrightarrow{n_\beta}\right\|}, \text{ kde } \varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi‘$$

Kuželosečky a kvadriky

- kuželosečky:

  je třeba znát rovnice – viz zde nebo tady

  pokud je kuželosečka v obecné poloze (nebudeme potřebovat), má obecnou (algebraickou) rovnici:

$$Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + Exy + F = 0$$

- kvadratické plochy (kvadriky) – analogie kuželoseček v prostoru

  je třeba znát rovnice – viz zde nebo něco navíc tady, nerotační kvadriky zde

- určení typu kuželosečky/kvadriky ze zadání a pomocí řezů

Kuželosečky a kvadriky

- určení typu kuželosečky z rovnice (***hrubý odhad***, musely by se dořešit např. hodnoty $\frac{B^2}{4A} + \frac{D^2}{4C} - E$):

$$Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + F = 0$$

$A = C$
kružnice

$A \neq C$
$A, C > 0$
elipsa

$A = 0, C \neq 0$
nebo
$C = 0, A \neq 0$
parabola

$A \cdot C < 0$
hyperbola

Kuželosečky a kvadriky

- určení typu kvadriky z rovnice (***hrubý odhad***):

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

$A = B$ nebo $B = C$ nebo $A = C$: rotační kvadrika

$A = 0$
nebo
$B = 0$
nebo
$C = 0$

paraboloid,
válcová plocha

$A = B = C$

kulová plocha

$A, B, C > 0$ a
navzájem
různé

elipsoid
(prodloužený,
zploštělý)

$A \cdot B \cdot C < 0$

hyperboloid
(jednodílný,
dvoudílný)

kuželová plocha