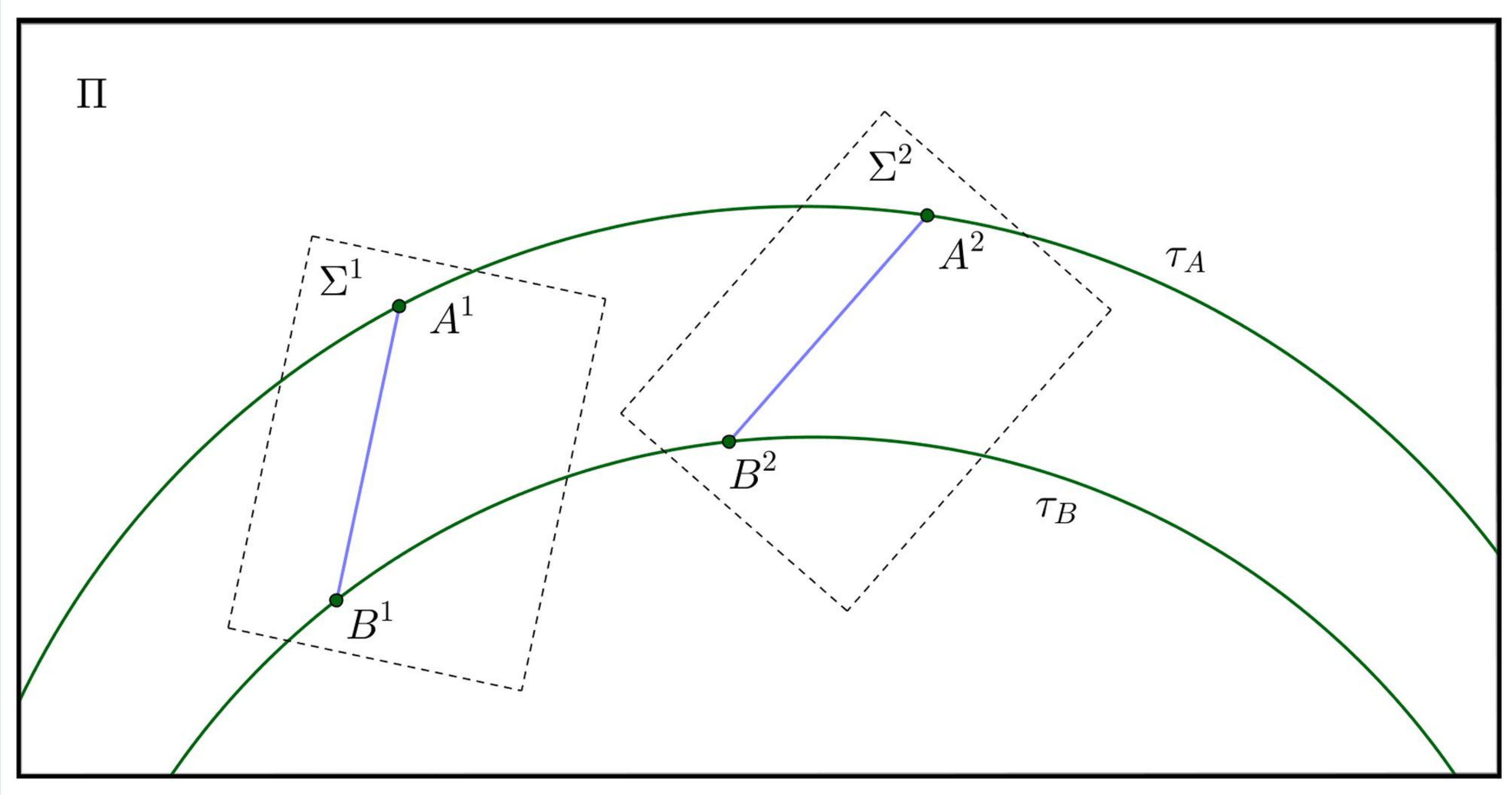
Kinematická geometrie

Přednáška 3, 4

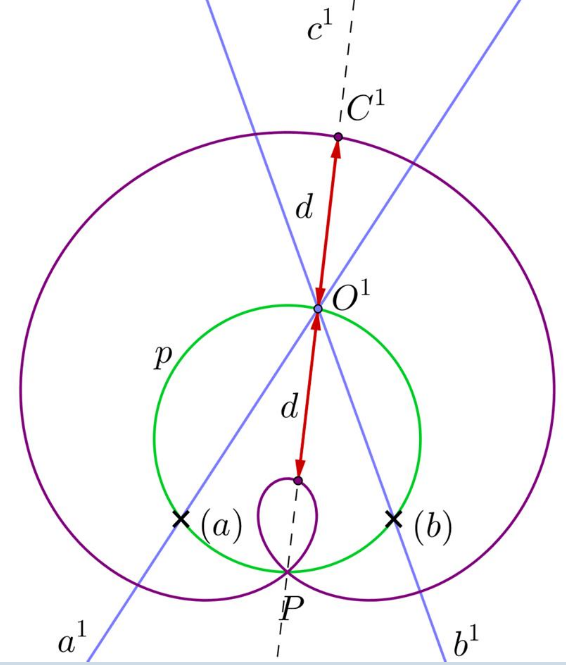
Kinematická geometrie - pohyb

- zkoumá obálky, křivosti a tečny
- máme 2 neměnné rovinné soustavy π a Σ, po neproměnné soustavě π se pohybuje hybná soustava Σ

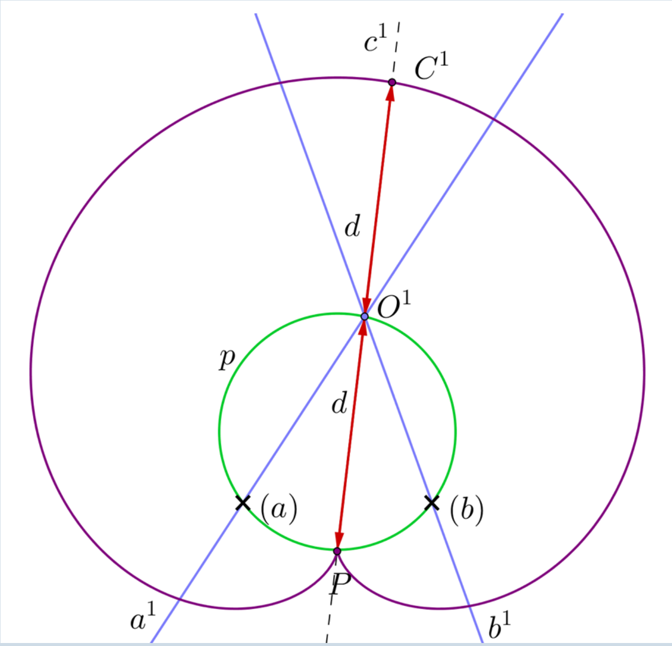


Kinematická geometrie v rovině

- máme jednoparametrickou množinu bodů:
  $$P(t) = [x(t), y(t)]$$
  kde $x(t), y(t)$ jsou spojité funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$
- důležité prvky:
  tečný vektor (v regulárním bodě):
  $$P'(t) = \left(x'(t), y'(t)\right)$$
  normálový vektor (v regulárním bodě) např.:
  $$n(t) = \left(y'(t), -x'(t)\right)$$
- body s problémovými tečnami:
  bod vratu - neexistuje tečný vektor (dodefinuje se)
  uzlový bod - dva různé tečné vektory, dvě tečny



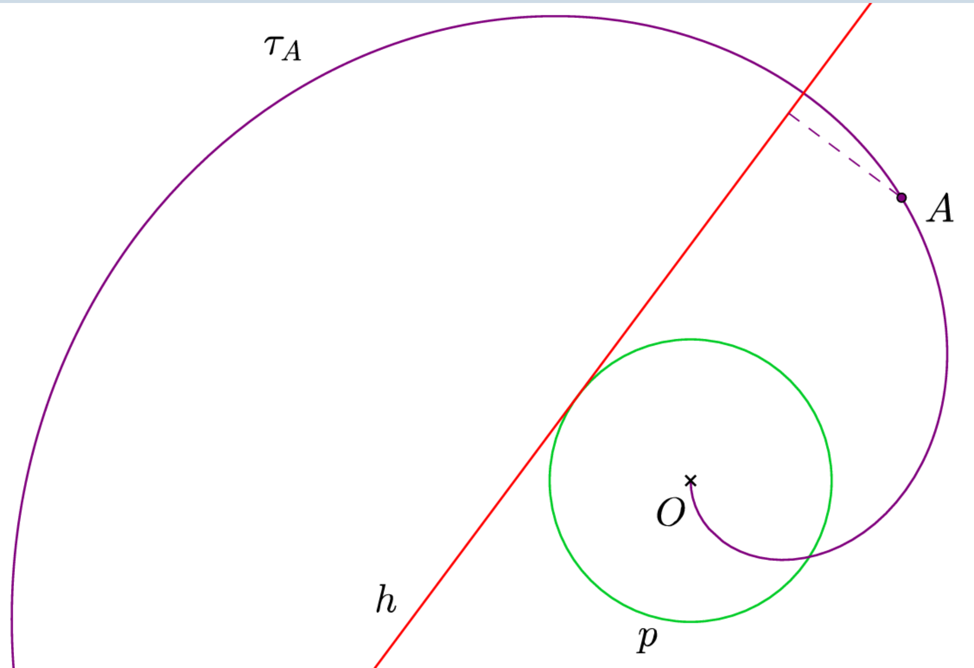
Uzlový bod Pascalovy závitnice



Bod vratu Pascalovy závitnice

Kinematická geometrie v rovině

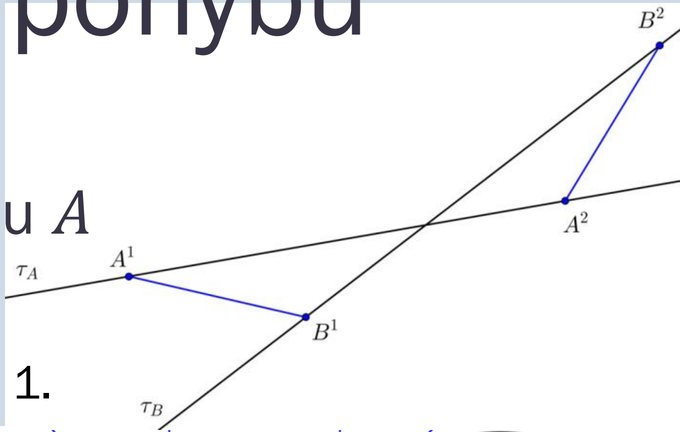
- elementární rovinné křivky: přímka, kružnice
- dvě rovinné křivky se dotýkají, pokud mají v bodě dotyku společnou tečnu a normálu
- ***ekvidistanta*** křivky k = křivka tvořená body v konstantní vzdálenosti od křivky k (vzdálenost měřena na normálách křivky k)
- ***evoluta*** křivky k = obálka normál křivky k
  l je evolutou křivky k $\Leftrightarrow$ k je tzv. ***evolventou*** křivky l (např. evoluta elipsy je asteroida)
- elementární pohyb v rovině – otočení, posunutí (speciální případ otočení, kdy střed otáčení je v nekonečnu)

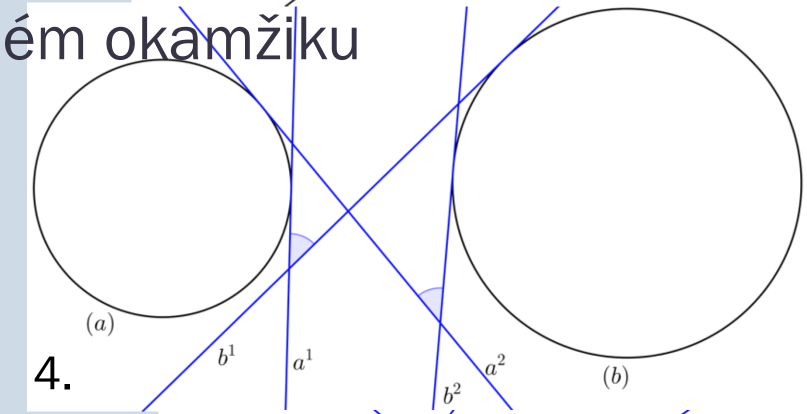


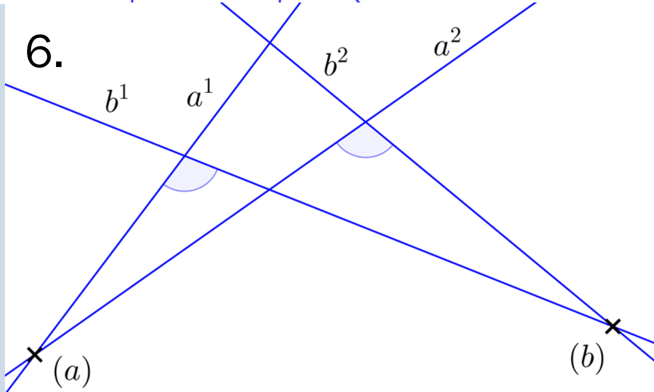
evolventa – Archimédova spirála

Kinematická geometrie – druhy pohybů

1. trajektorií τ^A bodu A a trajektorií τ^B bodu B
   trajektorie (stopa bodu) = křivka vytvořená pohybem bodu A
   (polohy bodu - A^0, A^1, A^2, …)
2. trajektorií τ^A a obálkou (k) křivky k
   obálka = křivka vytvořená pohybem křivky k, v každém okamžiku pohybu se dotýká pohybující se křivky k
3. trajektorií τ^A a bodovou obálkou $(\dot{k})$ křivky k
4. obálkou (k) křivky k a obálkou (l) křivky l
5. bodovou obálkou $(\dot{k})$ křivky k a obálkou (l) křivky l
6. bodovou obálkou $(\dot{k})$ křivky k a bodovou obálkou $(\dot{l})$ křivky l
7. ***polodiemi*** p a h

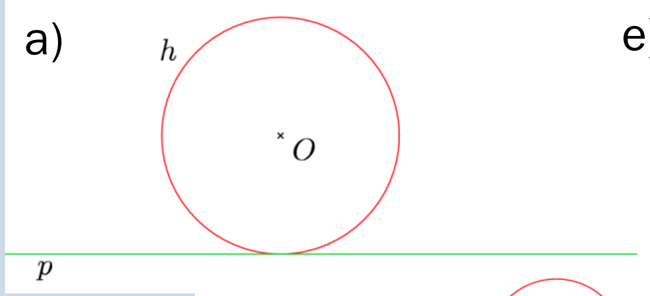


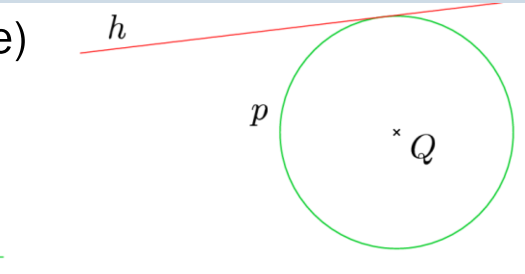


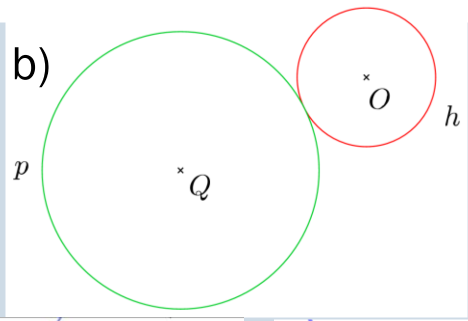


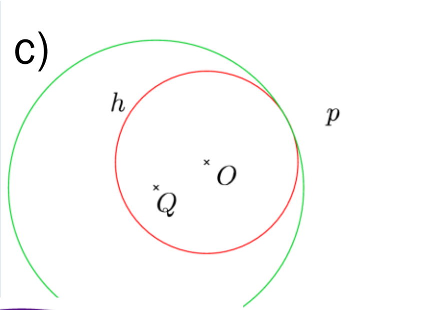
Kinematická geometrie – druhy pohybů 2

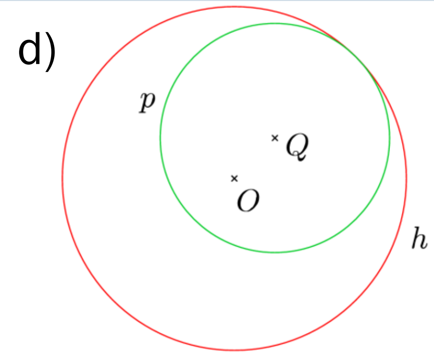
1. cyklický
    a) *cykloidální*
    b) *epicykloidální*
    c) *hypocykloidální*
    d) *pericykloidální*
    e) *evolventní*
2. kardiodický
3. konchoidální
4. eliptický
5. * úpatnicový

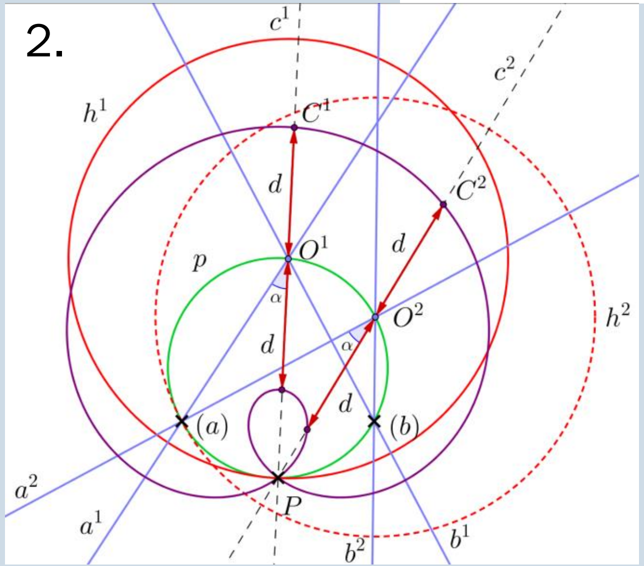


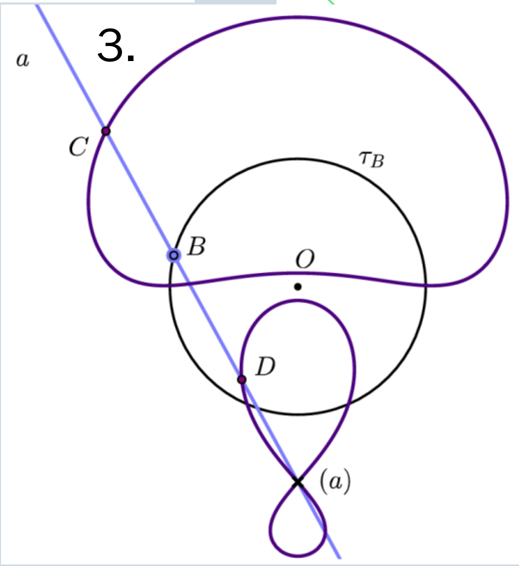


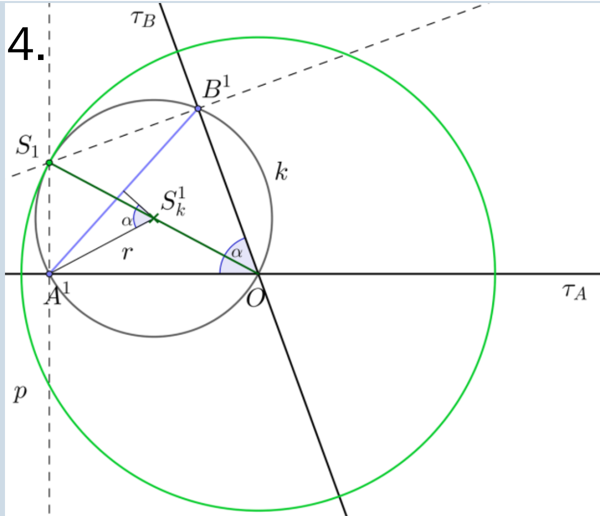








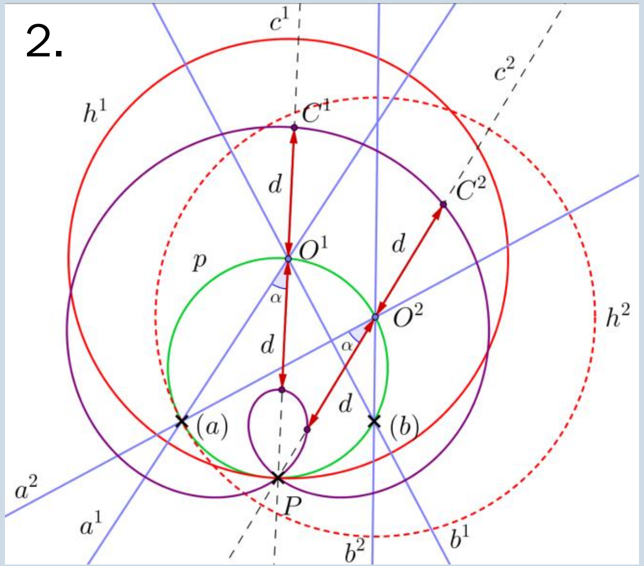


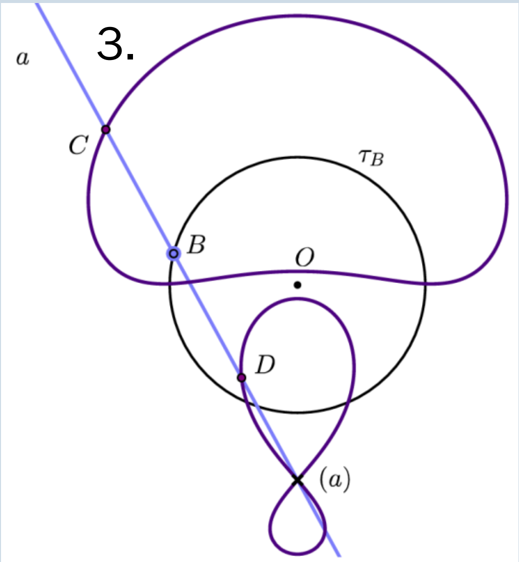


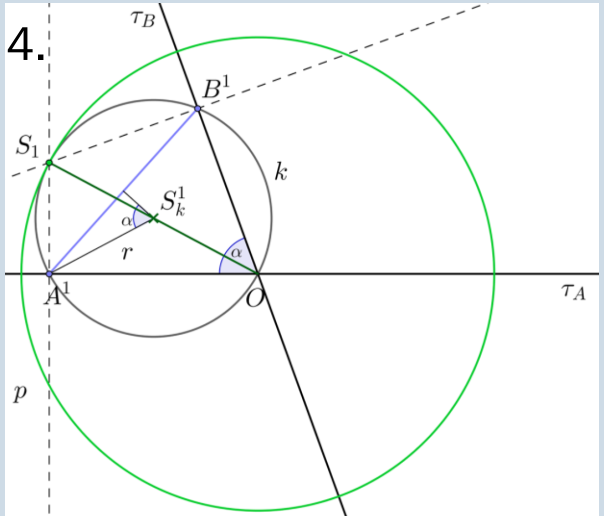
Kinematická geometrie – druhy pohybů 2

Určenosti pohybů:

1. kardiodický: $(\dot{k})$ a $(\dot{l})$ bodové obálky přímek
2. konchoidální: $(\dot{k})$ bodový obálka přímky, τ^Q ($(\dot{k})$ je pól pohybu)
3. eliptický: τ^A a τ^B přímky
4. * úpatnicový: (t) je obálka přímky, $(\dot{m})$ bodová obálka přímky, kdy
   $m \perp t$ a τ^M je pak úpatnice

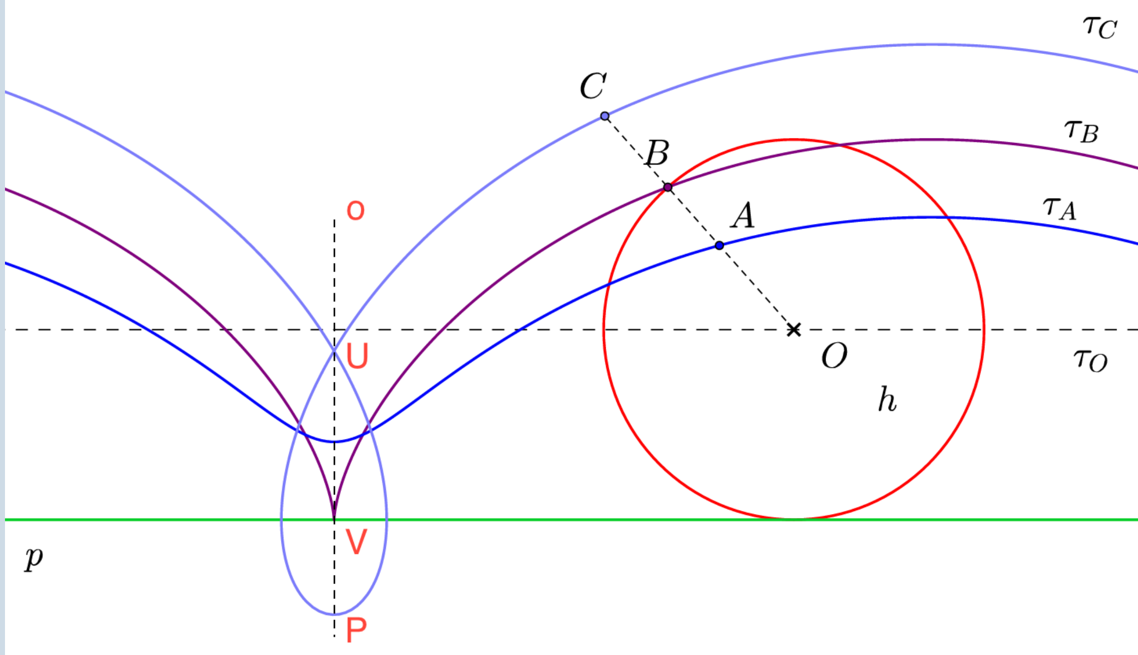






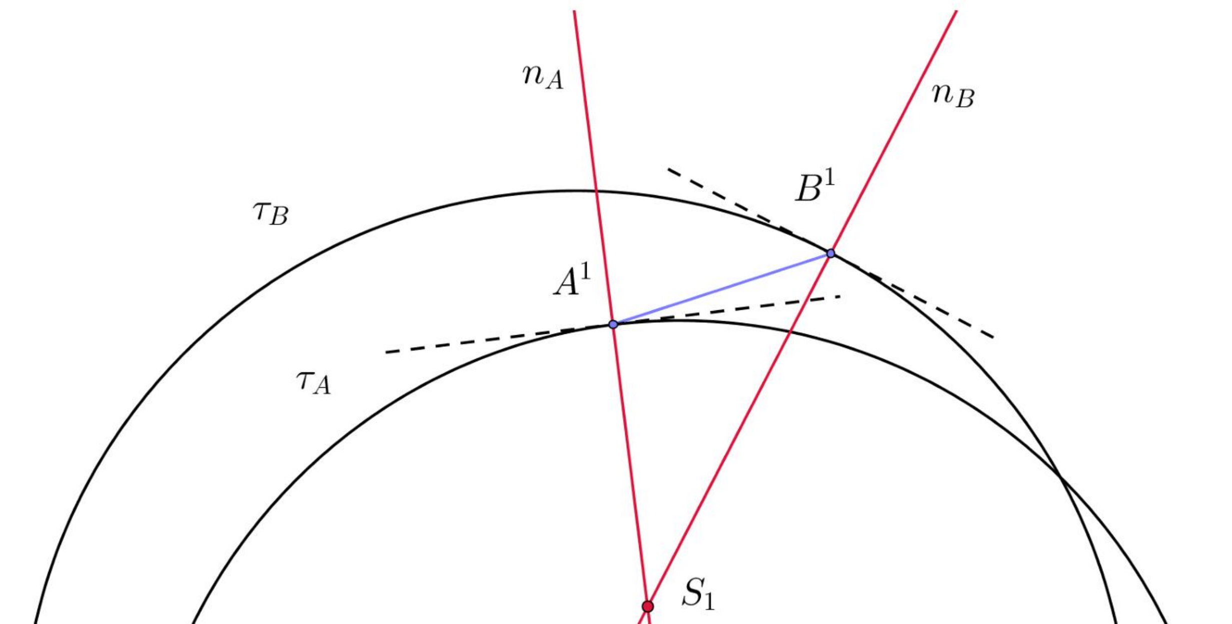
Kinematická geometrie – druhy pohybů 2

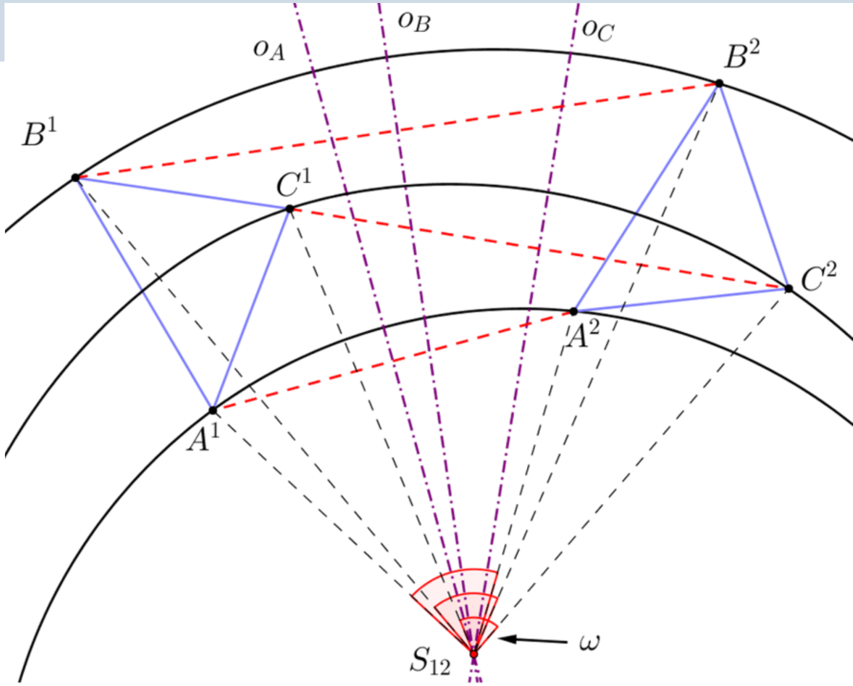
- cykloidy:
  - *prostá = bod leží na hybné polodii (τ^B ↘)*
    - obsahuje bod(y) vratu
    - částí prosté cykloidy je tzv. křivka nejkratšího spádu (=brachistochrona)
  - *prodloužená = bod leží vně hybné polodie, obsahuje uzlový(é) bod(y) (τ^C ↘)*
  - *zkrácená = bod leží uvnitř hybné polodie, obsahuje inflexní bod(y) (τ^A ↘)*
- ***vrchol*** trajektorie či obálky leží na společné normále obou polodií (= osa souměrnosti křivky), tečna je kolmá k ose souměrnosti (bod $\boldsymbol{P}$ →)
- ***bod vratu*** trajektorie či obálky leží na společné normále obou polodií, tečna s ní splývá (bod $\boldsymbol{V}$ →)



Kinematická geometrie

- máme-li dvě polohy hybné soustavy Σ^1 a Σ^2 $\longrightarrow$ existuje elementární pohyb, který převádí Σ^1 na Σ^2 $\longrightarrow$ otáčení
- pro otočení musí existovat střed $\longrightarrow$ ***okamžitý střed otáčení*** (= pól pohybu)
- pól pohybu (např. S_1) = průsečík všech normál trajektorií bodů a normál obálek křivek v daném okamžiku





Kinematická geometrie

- pól pohybu = bod pevné polodie, průsečík všech normál → tečny v daných bodech a body dotyku
- pevná polodie p je v soustavě π, hybná polodie h v soustavě Σ
- pohyb určen odvalováním (= kotálením) křivky h po křivce p → při odvalování se křivky dotýkají vždy v jednom bodě (= pól pohybu)
- ***pevná polodie*** = množina všech okamžitých středů otáčení
- ***hybná polodie*** = množina všech "budoucích" okamžitých středů otáčení

  - konstrukce vzhledem k danému okamžiku (= fázi pohybu)
  - bod dotyku polodií v tomto okamžiku - okamžitý střed otáčení
  - přímá konstrukce (přenášení středů otáčení do polohy určené daným okamžikem)
  - pomocí vratného pohybu (záměna rolí zadání, např. bod je obálka a jeho trajektorie je pohyblivá křivka) → pevná polodie vratného pohybu je hybná polodie výchozího

Kinematická geometrie - konstrukce

- rektifikace oblouku ⟶ oblouk se rozdělí (nejlépe pravidelně) na menší obloučky a ty se pak nahradí tětivami, které aproximují oblouček
  - pro známý poloměr a úhel vypočteme délku oblouku
  - papírovým měřidlem
  - pomocí malých dílků v kružítku
  - Kochaňského rektifikace, Sobotkova rektifikace, D‘Ocagneova rektifikace (postup zde, nejsou potřeba umět)