Konstruktivní geometrie

Analytická geometrie v $\mathbb{E}_3$ - příklady

2.1 Vypočítejte skalární součiny :

a) $(2,-5)\cdot(6,3)$;

b) $(2\,\vec{i}+\vec{j})\cdot(3\,\vec{j}+\vec{k})$;

c) $(1,3,-5)\cdot(2,1,1)$;

2.2 Je dán ΔABC, kde $A=[-1,2,3]$, $B=[1,1,1]$, $C=[0,0,5]$. Dokažte, že tento trojúhelník je pravoúhlý a vypočítejte úhel β.

2.3 Najděte úhel mezi vektory $\vec{a}=2\,\vec{m}+\vec{n}$ a $\vec{b}=-3\,\vec{m}+2\,\vec{n}$, jestliže $\vec{m},\vec{n}$ jsou jednotkové vektory, které svírají úhel $\pi/3$.

2.4 Jsou dány vektory $\vec{a}=(2,-1,3)$, $\vec{b}=(1,-3,2)$ a $\vec{c}=(3,2,-4)$. Najděte vektor $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, který splňuje podmínky $\vec{x}\cdot\vec{a}=-5$, $\vec{x}\cdot\vec{b}=-11$, $\vec{x}\cdot\vec{c}=20$.

2.5 Určete pro jaká p jsou vektory kolmé:

a) $(2p,1-p,4)$, $(-1,1,2)$;

b) $(3,4,-1)$, $(4p,-3p,0)$;

2.6 Spočítejte vektorové součiny :

a) $(3,-1,2)\times(0,4,5)$;

b) $(2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k})\times(2\vec{j})$;

c) $(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})\times(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$.

2.7 Vypočítejte jednotkový vektor $\vec{c}$, který je kolmý ke každému z vektorů $\vec{a},\vec{b}$, kde $\vec{a}=(2,-1,1)$, $\vec{b}=(1,2,-1)$.

2.8 Vypočítejte plošný obsah ΔABC o vrcholech $A=[2,3,4]$, $B=[-1,2,-3]$, $C=[5,4,-2]$.

2.9 Vypočítejte $\left|(2\,\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-3\,\vec{v})\right|$, jestliže $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=2$ a úhel vektorů $\vec{u},\vec{v}$ je $\pi/6$.

2.10 Rozhodněte, zda body $A=[1,2,-1], B=[0,1,5], C=[-1,2,1]$ a $D=[2,1,3]$ leží v jedné rovině.

2.11 Vypočítejte součiny :

a) $(2\vec{i}+\vec{j})\cdot\Big((3\vec{j}-\vec{k})\times 2\vec{k}\Big)$;

b) $\big[\,(3,2,-1)\times(1,0,-1)\,\big]\cdot(2,1,0)$;

c)* určete objem rovnoběžnostěnu sestrojeného z vektorů z bodu **b)**.

2.12 Je dána rovina $\varrho : 2x - y + 2z + 6 = 0$. Určete :

a) zda body $A = [3, 10, -1]$ a $B = [-2, 4, 3]$ leží v této rovině;

b) průsečík roviny s osou z;

c) úhel s rovinou $\sigma : -x + 2y - 2z + 6 = 0$.

2.13 Napište rovnici roviny ϱ procházející body $A = [1, 3, 2], B = [2, 2, 1]$ a :

a) obsahující bod $[0, 0, 0]$;

b) rovnoběžné s normálovým vektorem roviny $3x - y + 10 = 0$;

c) kolmé k rovině $2x - y - z + 4 = 0$.

2.14 Napište rovnici roviny ϱ, která prochází bodem $A = [4, -7, 5]$ a :

a) osou x;

b) je kolmá k ose z;

c) je rovnoběžá s rovinou (xz);

d) vytíná na osách x, y, z stejné úseky.

2.15 Určete vzdálenost rovin $\varrho : 2x - y + 2z + 5 = 0$ a $\sigma : 2x - y + 2z - 7 = 0$.

2.16 Najděte rovnici roviny procházející průsečnicí rovin $3x - 2y - 2z = -1$, $x - 3y - z + 2 = 0$ a bodem $B = [3, 1, 3]$.

2.17 Průsečnicí rovin $x + 3y - 5 = 0$ a $x - y - 2z + 4 = 0$ veďte rovinu ϱ rovnoběžnou s vektorem $\overrightarrow{AB}$, kde $A = [2, 1, 3], B = [3, 3, 2]$.

2.18 Napište parametrické rovnice přímek

a) $\left\{ \begin{array}{r} 2x + 3y - z - 4 = 0 \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0 \end{array} \right.$;

b) $\left\{ \begin{array}{r} x + 2y - z - 6 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{array} \right.$.

2.19 Napište parametrické rovnice těžnice procházející vrcholem C trojúhelníka ABC, kde $A = [3, 6, -7], B = [-5, 2, 3], C = [4, -7, -2]$.

2.20 Určete úhel přímek :

$$p : \left\{ \begin{array}{rr} x = & 5 + 2t \\ y = & 2 - t \\ z = & 7 + t \end{array} \right. , \quad q : \left\{ \begin{array}{r} x + 3y + z + 2 = 0 \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{array} \right. .$$

2.21 Určete vzdálenost bodu A od přímky p :

a) $A = [1, -1, -2]$, $p : \left\{ \begin{array}{rr} x = & -3 + 3t \\ y = & -2 + 2t \\ z = & 8 - 2t \end{array} \right.$;

b) $A = [5, -6, 8]$, p je osa x.

2.22 Zjistěte, zda se přímky p a q protínají. Jestliže ano, pak určete souřadnice průsečíku, jestliže se neprotínají, určete jejich nejkratší vzdálenost.
$p : X = [3, 4, -1] + t(1, 1, -1)$ a q je přímka procházející body $B = [-6, -5, 1]$, $C = [0, 7, -2]$.

2.23 Stanovte m tak, aby přímka $p : X = [-1, 2, -3] + t(3, m, -2)$ byla rovnoběžná s rovinou $\varrho : x - 3y + 6z + 7 = 0$.

2.24 Stanovte a, b tak, aby přímka $p : X = [2, -1, 5] + t(a, 4, -3)$ byla kolmá k rovině $\varrho : 3x - 2y - bz + 21 = 0$. Určete průsečík p a ϱ .

2.25 Bodem $A = [0, -3, 0]$ veďte rovinu kolmou k rovinám
$\alpha : x + 2y + 3z = 5,\ \beta : 3x - 5y + 4z = 12.$

2.26 Přímkou $p : X = [1, -3, -2] + t(2, -1, 5)$ veďte rovinu kolmou k rovině
$\alpha : x + y - 3z + 7 = 0.$

2.27 Bodem $A = [4, 3, -1]$ veďte rovinu kolmou k přímce $p : X = [1, 2, 5] + t(1, 2, 3)$.

2.28 Určete úhel přímky p procházející body $A = [2, 0, 3], B = [2, 2, 2]$ s rovinou
$\alpha : 3z - y + 10 = 0.$

2.29 Napište parametrické rovnice přímky, která prochází bodem $A = [1, -1, -3]$ a je rovnoběžná s přímkou $p : [1, -2, 1] + t(2, 5, 0)$.

2.30 Určete úhel přímky $p : [-2, 1, 5] + t(-1, 2, 2)$ s rovinou (xz).

2.31 Napište rovnici kulové plochy, která má střed v bodě $= [3, 0, -2]$ a prochází bodem $[3, 0, 0]$.

2.32 Napište rovnici rotační válcové plochy, která má osu v ose x a poloměr $r = 3$.

2.33* V průsečících přímky $p : X = [1, 0, 1] + t(1, -1, 2)$ s kulovou plochou
$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 6$ určete tečné roviny k této ploše.

2.34 Ukažte, že rovina $x = 2$ protíná elipsoid $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ v elipse, najděte její poloosy a vrcholy.

2.35 Určete průnikovou křivku hyperbolického paraboloidu $z = 4x^2 - y^2$ s rovinou :

a) $y = 6;$

b) $x = 1;$

c) $z = 1;$

d) $z = 0.$

2.36 Je dána množina $D \subset \mathbb{E}_3$ Určete typ kvadriky, její střed nebo vrchol, množinu D načrtněte, případně načrtněte průmět do některé souřadnicové roviny.

a) $D = \{[x, y, z] \subset \mathbb{E}_3, x^2 + 4x + y^2 - 6y + z^2 + 4 = 0\};$

b) $D = \{[x, y, z] \subset \mathbb{E}_3, x^2 + 4x + y^2 - 2y + 4z^2 + 8z + 5 = 0\};$

c) $D = \{[x,y,z] \subset \mathbb{E}_3, x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 + 2z + 6 = 0\}$;

d) $D = \{[x,y,z] \subset \mathbb{E}_3, 4x^2 - 16x - y^2 - 6y + 4z^2 + 8z + 7 = 0\}$;

e) $D = \{[x,y,z] \subset \mathbb{E}_3, x^2 - 2x + y^2 - 4y - 4 = 0\}$;

f) $D = \{[x,y,z] \subset \mathbb{E}_3, x^2 - 4x - y^2 + 6y - z^2 + 2z - 7 = 0\}$;

g) $D = \{[x,y,z] \subset \mathbb{E}_3, 2x^2 - 4x + y^2 + 4y + 2 = 0\}$;

h) $D = \{[x,y,z] \subset \mathbb{E}_3, x^2 + y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0\}$;

i) $D = \{[x,y,z] \subset \mathbb{E}_3, x^2 - 4x - y^2 - 2y = 0\}$;

j) $D = \{[x,y,z] \subset \mathbb{E}_3, x^2 - 6x + y^2 + 4y - z + 15 = 0\}$;

k) $D = \{[x,y,z] \subset \mathbb{E}_3, x^2 - 6x - y + 11 = 0\}$;

l) $D = \{[x,y,z] \subset \mathbb{E}_3, x^2 - 2x - y^2 - z + 4 = 0\}$;

m)* $D = \{[x,y,z] \subset \mathbb{E}_3, x^2 + x - y^2 - y = 0\}$.