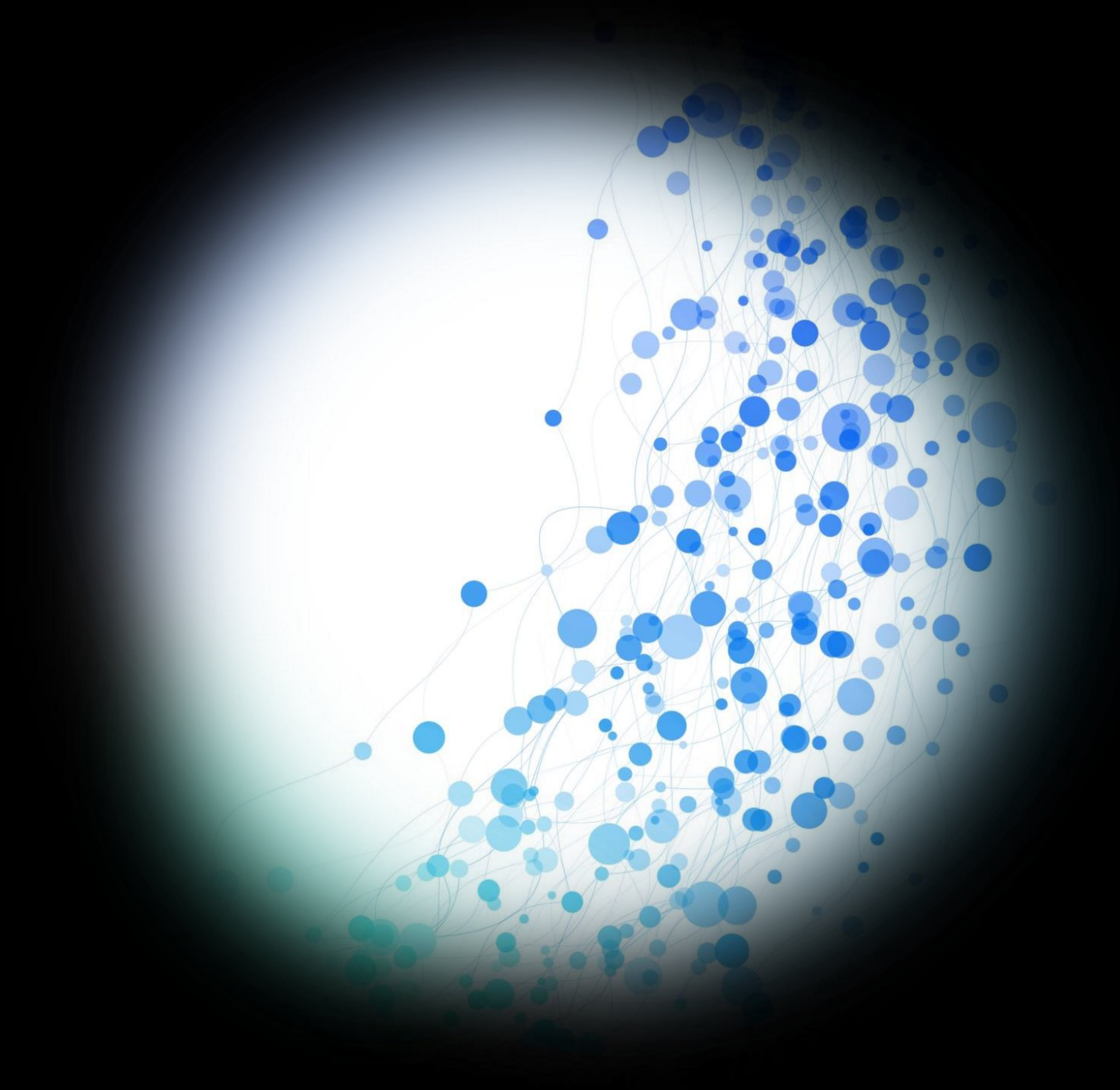

Matematika 1 – derivace a chování funkce

Věty pro derivace

- **Definice derivace:**
  Derivací funkce f v bodě x_0 nazýváme číslo, které označujeme $f'(x_0)$ a které definujeme rovnicí $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, jestliže limita vpravo existuje a je konečná.
  → tedy platí stejné vlastnosti pro jednostranné derivace, jako u limit
- **Tečna ke grafu funkce**:

  $x_0 \in D(f)$, má-li funkce f v bodě x_0 derivaci $k = f'(x_0)$, pak tečnou ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ je přímka s rovnicí

  $$\boldsymbol{y - f(x_0) = k \cdot (x - x_0)}$$

- **Rovnice normály grafu funkce:**

  $y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ (tečna: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$)

Věty pro derivace

- **Věta o derivaci složené funkce:**
  existuje-li ve všech bodech x derivace $g'(x)$ a $f'(g(x))$, pak funkce
  $y = f(g(x))$ derivace $y'(x) = \left[f\left(g(x)\right)\right] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

- **Věta o derivaci inverzní funkce:**
  existuje-li k funkci f inverzní funkcef_{-1}a je-li $y = f_{-1}(x)$ a $f'(y)$ je
  nenulová derivace, pak derivace $f'_{-1}(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f_{-1}(x))}$

- **Věta:** Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, je v bodě x_0 spojitá. Má-li funkce f derivaci zleva (resp. zprava) v bodě x_0, je v tomto bodě spojitá zleva (resp. zprava).

Věty pro derivace

- **Diferenciál funkce f v bodě** x_0 je $f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$, označuje se také $\mathrm{d}y$ nebo $\mathrm{d}f$.
  Pro $x = x_0 + \mathrm{d}x$ je $f(x_0 + \mathrm{d}x) \doteq f(x_0) + \mathrm{d}y$, kde $\mathrm{d}y = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$

- **Výpočet přibližné hodnoty funkce** v malém okolí bodu x_0 lze spočítat jako
$$f(x_0) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

- **l'Hospitalovo pravidlo:**

Nechť $c \in \mathbb{R}^*$ a $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ jsou obě nulové nebo obě nekonečné, pak

platí: $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, existuje-li limita vpravo (platí stejně také pro jednostranné limity).

Věty pro derivace

- **Věta:** Nechť funkce f a g mají derivace v bodě x a nechť $k \in \mathbb{R}$. Pak také funkce $k \cdot f$, $f + g$, $f - g$ a $f \cdot g$ mají derivace v bodě x a platí:

$$[k \cdot f]'(x) = k \cdot f'(x) \qquad [f + g]'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$[f - g]'(x) = f'(x) - g'(x) \qquad [f \cdot g]'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Je-li navíc $g(x) \neq 0$, má i podíl f/g derivaci v bodě x a platí:

$$\left[\frac{f}{g}\right]'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Vzorce pro derivace

- $(k)' = 0$, kde k je konstanta $\quad (x)' = 1, x \in \mathbb{R} \quad (x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a\,, x \in \mathbb{R}, a > 0 \quad (e^x)' = e^x, x \in \mathbb{R}$
- $(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$
- $(tgx)' = \frac{1}{(\cos x)^2} \quad (cotgx)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$
- $(arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, pro $x \in (-1; 1)$ $\quad (arc\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, pro $x \in (-1; 1)$
- $(arc\,\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (arc\,\mathrm{cotg}\,x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, pro $x \in (0; +\infty)$ $\quad (log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, pro $a > 0, a \neq 1, x \in (0; +\infty)$

Věty pro derivace

- **Věta o střední hodnotně (Lagrangeova věta):**
  Nechť funkce f je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť má derivaci v otevřeném intervalu (a, b). Pak existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

- **Věta:**
  Nechť f je spojitá funkce v intervalu I. Pak platí implikace:
  a) $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in I^{\circ} \Rightarrow f$ je v intervalu I rostoucí
  b) $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in I^{\circ} \Rightarrow f$ je v intervalu I neklesající
  c) $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in I^{\circ} \Rightarrow f$ je v intervalu I klesající
  d) $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in I^{\circ} \Rightarrow f$ je v intervalu I nerostoucí
  e) $f'(x) = 0$ pro všechna $x \in I^{\circ} \Rightarrow f$ je v intervalu I konstantní.

Souvislost derivace a chování funkce

- Funkce f definovaná na intervalu (a, b), kdy $x_0 \in (a, b)$ má v bodě x_0:
  a) **lokální maximum (minimum)**, pokud $\exists P(x_0) :: \forall x \in P(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. je $f(x) \geq f(x_0)$)
  b) **ostré lokální maximum (minimum)**, pokud $\exists P(x_0) :: \forall x \in P(x_0)$ je $f(x) < f(x_0)$ (resp. je $f(x) > f(x_0)$)

- **Nutná podmínka pro lokální extrém**:

  Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li $f(x_0)$, je $f'(x_0) = 0$.

- funkce ***může*** lokálních extrémů nabývat pouze ve vnitřních bodech intervalu, kde je $\boldsymbol{f' = 0}$, NEBO ve vnitřních bodech intervalu, kde f' ***neexistuje***

Souvislost derivace a chování funkce

- **Postačující podmínka pro ostrý lokální extrém**:

  Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

  Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

- **Nutná podmínka pro existenci inflexního bodu:**

  Je-li x_0 inflexní bod funkce f a existuje-li $f''(x_0)$, je $f''(x_0) = 0$.

- **Postačující podmínka pro existenci inflexního bodu:**

  Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, je x_0 inflexní bod funkce f.

- funkce ***může*** <u>globálních extrémů</u> nabývat pouze ve vnitřních bodech intervalu, kde je derivace $\boldsymbol{f' = 0}$, NEBO ve vnitřních bodech intervalu, kde f' ***neexistuje***, NEBO v ***krajních bodech*** intervalu (není-li interval otevřený)

Souvislost derivace a chování funkce

- Funkce f je na množině $M \subset D(f)$:
  a) **ryze konvexní**, pokud $\forall x_1, x_2, x_3 \in M :: x_1 < x_2 < x_3$ je $[x_2, f(x_2)]$ **pod** přímkou danou body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_3, f(x_3)]$ (pouze konvexní, pokud je bod pod nebo na přímce)
  b) **ryze konkávní**, pokud $\forall x_1, x_2, x_3 \in M :: x_1 < x_2 < x_3$ je $[x_2, f(x_2)]$ **nad** přímkou danou body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_3, f(x_3)]$ (pouze konkávní, pokud je bod nad nebo na přímce)
- Nechť je funkce f spojitá na intervalu I, pak platí:
  1) je-li $\forall x \in I^o\ f''(x) > 0$, pak f je v I **ryze konvexní**
  2) je-li $\forall x \in I^o\ f''(x) \geq 0$, pak f je v I **konvexní**
  3) je-li $\forall x \in I^o\ f''(x) < 0$, pak f je v I **ryze konkávní**
  4) je-li $\forall x \in I^o\ f''(x) \leq 0$, pak f je v I **konkávní**
  5) je-li $\forall x \in I^o\ f''(x) = 0$, pak f je v I **lineární**

Souvislost derivace a chování funkce

- **Nutná a postačující podmínka pro asymptotu:**

$y = kx + q$ je ***šikmá asymptota*** pro $x \to \infty$ $(resp. -\infty) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ a

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - kx = q$$

$x = x_0$ je ***svislá asymptota***, jestliže alespoň jedna jednostranná limita f v x_0 je $\pm\infty$

Postup při vyšetřování průběhu funkce

1. určíme definiční obor (příp. obor hodnot) funkce, její sudost, lichost, periodicitu a spojitost (případně limity v krajích a v bodech nespojitosti)
2. stanovíme průsečíky grafu se souřadnicovými osami
3. spočteme derivaci a její definiční obor, zjistíme intervaly (ryzí) monotónnosti a její typ a najdeme lokální (příp. globální) extrémy
4. vypočteme druhou derivaci a určíme její definiční obor, zjistíme intervaly (ryzí) konvexity a konkavity a určíme inflexní body
5. stanovíme asymptoty grafu a graf načrtneme

Taylorův polynom

- **Taylorova věta**:

  Nechť funkce f má v intervalu (a, b) derivace až do řádu $n+1$ včetně a nechť $x_0 \in (a, b)$. Pak ke každému $x \in (a, b)$ existuje bod ξ ležící mezi x a x_0 tak, že $f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x)$, kde $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$

  Taylorův vzorec ***Lagrangeův tvar zbytku***

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Maclaurinovy polynomy základních funkcí

e^x	$=$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$=$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$=$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$=$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$	$x \in (-1, 1\rangle$
$\operatorname{arctg} x$	$=$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$	$x \in \langle -1, 1\rangle$

Maclaurinovy polynomy základních funkcí

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{pro } x \in (-1, 1)$$

$$(1+x)^r = 1 + \binom{r}{1} x + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n \quad \text{pro } r \in \mathbb{R}, x \in (-1, 1),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{pro } x \in (-1, 1\rangle$$

$$a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 a}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!} \quad \text{pro } a > 0, x \in (-\infty, \infty)$$