MATEMATIKA I

INTEGRÁLY

VĚTY O PRIMITIVNÍ FUNKCI:

- **O existenci primitivní funkce:**
  Je–li funkce f spojitá v intervalu I, pak k funkci f existuje v intervalu I primitivní funkce.

- Je-li F primitivní funkce k funkci f v intervalu I a je-li C libovolná reálná konstanta, pak funkce $F + C$ je také primitivní funkcí k funkci f v intervalu I.
- Jsou-li F a G primitivní funkce k funkci f v intervalu I, pak existuje reálná konstanta C taková, že $G = F + C$ v intervalu I.
- Jsou-li F a G primitivní funkce k funkcím f a g v intervalu I, pak $F + G$ je primitivní funkcí k $f + g$ v intervalu I. Je-li F primitivní funkce k funkci f v intervalu I a α libovolné reálné číslo, pak je $\alpha \cdot F$ primitivní funkcí k funkci $\alpha \cdot f$ v intervalu I.

- $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \qquad \int \alpha f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx \qquad x \in I$

PŘEHLED ZÁKLADNÍCH VZORCŮ

$$\int 0\,dx = C$$

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int e^{x}\,dx = e^{x} + C$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = tgx + C$$

$$\int \frac{1}{(\sin x)^2}\,dx = -cotgx + C$$

$$\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, (\mathrm{a} > 0, a \neq 1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctgx + C$$

PŘEHLED ZÁKLADNÍCH POSTUPŮ

- **Věta o integraci per-partes:**

Mají-li funkce u a v spojité derivace v intervalu I, pak v tomto intervalu platí:

$$\int u'(x) \cdot v(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\, dx$$

resp. $\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$

* vychází z integrace rovnice $\big(u(x) \cdot v(x)\big)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

PŘEHLED ZÁKLADNÍCH POSTUPŮ

- **Věta o integraci substitucí:**
  Předpokládejme, že $f(x)$ je spojitá v intervalu I a že $x = g(t)$ má spojitou derivaci v intervalu J a zobrazuje tento interval na I. Pak platí:
  $$\int f(x)\,dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt \text{ pro } x \in I, t \in J, x = g(t)$$

* Pokud využíváme substituci ve smyslu z pravé strany na levou, není potřeba spojitost, stačí jen vědět, že funkce g zobrazuje interval J do nějakého intervalu I', v němž je f spojitá.

PŘEHLED ZÁKLADNÍCH POSTUPŮ

- **Integrace jednodušších racionálních funkcí:**
  Racionální funkce je funkce tvaru $\frac{P}{Q}$, kde stupeň polynomu Q je alespoň jedna.

  Pokud dostaneme zlomek do tvaru, kde P má menší stupeň než Q, převedeme na ***součet parciálních zlomků***.
- Pokud $Q(x)$ má dvojnásobný kořen α, nebo dva kořeny α a β:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{q_0(x-\alpha)^2} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1(x)}{ax^2+bx+c}$$

pokud není možné najít kořen α, tedy je to již parciální zlomek

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{q_0(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{x-\beta}$$

Podobně pro vyšší stupeň polynomu.

PŘEHLED ZÁKLADNÍCH POSTUPŮ

- **Integrace funkcí typu $\boldsymbol{sin^n x \cdot cos^m x}$:**
  a) alespoň jedno z m či n je liché:
  tedy ve tvaru $2k+1$ a lze užít substituci $t = \sin x$ (resp. $t = \cos x$, je-li liché n)

  b) obě m i n jsou sudá:
  použijeme vzorec $sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ nebo $cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ a substituci $t = 2x$

- Další vzorce pro integrace racionálních funkcí obsahujících goniometrické funkce:

$cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1}{1+tg^2(\frac{x}{2})}$ $\quad$ $sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{tg^2(\frac{x}{2})}{1+tg^2(\frac{x}{2})}$ $\quad$ (navíc subst.: $t = tg(\frac{x}{2})$)

tedy: $\quad cos\, x = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-tg^2(\frac{x}{2})}{1+tg^2(\frac{x}{2})}$ $\quad$ $sin\, x = 2 \cdot sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2 \cdot tg(\frac{x}{2})}{1+tg^2(\frac{x}{2})}$

PŘEHLED ZÁKLADNÍCH POSTUPŮ

- **Integrace iracionálních funkcí typu $\boldsymbol{R\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)}$, kde $\boldsymbol{ad - bc \neq 0}$:**
  - zavede se substituce $t = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$ a dopočte se dx (pozor na definiční obor integrované funkce, jen na něm výsledek platí)
  - pokud $c = 0$ a $d = 1$, máme $R(x, \sqrt{ax+b})$ a lze tedy využít substituci $t = \sqrt{ax+b}$

* Pro typ $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$:

1. pro $a < 0$ a kořeny $\alpha < \beta$ můžeme pro $x \in (\alpha; \beta)$ převést $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{-a}(x - \alpha)\sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}}$ a substitucí $t = \sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}}$ převedeme na racionální funkci
2. pro $a > 0$ se využije ***Eulerův vzorec***: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + \sqrt{a}x$

RIEMANNŮV INTEGRÁL

- Máme omezený, uzavřený a neprázdný interval $\langle a, b\rangle$ a funkci f omezenou na tomto intervalu. Dále máme ***dělení intervalu*** D: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ a jeho ***normu*** $||D|| = \max\limits_{i=1,\dots,n}(x_i - x_{i-1})$ (tedy „jemnost“ dělení).
- **Riemannův integrál** funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ je číslo $S = \lim\limits_{||D||\to 0+} s(f, D, V)$, kde $s(f, D, V) = \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i) \cdot \Delta x_i$, V je systém bodů $\varsigma_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ a $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Integrál pak označujeme $\int_a^b f(x)\,dx$.
- Platí: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ a $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- ***Střední hodnota*** funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ je $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

VLASTNOSTI RIEMANNOVA INTEGRÁLU

- **O existenci integrálu:**
  Nechť je funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je v něm integrovatelná.
  Je-li funkce f omezená a po částech spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je v něm integrovatelná.
- Je-li f integrovatelná v $\langle a, b\rangle$ a $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$, pak je v $\langle c, d\rangle$ integrovatelná.
- Jsou-li funkce f a g integrovatelné v $\langle a, b\rangle$, pak $f \cdot g$ je v něm také integrovatelná.
- Je-li f integrovatelná v $\langle a, b\rangle$ a liší-li se funkce g od f v $\langle a, b\rangle$ jen v konečně mnoha bodech, pak g je také integrovatelná v $\langle a, b\rangle$.

- $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$ (linearita integrálu)
- $\int_a^b \alpha \cdot f(x)\, dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\, dx$
- $\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$ (aditivita integrálu)

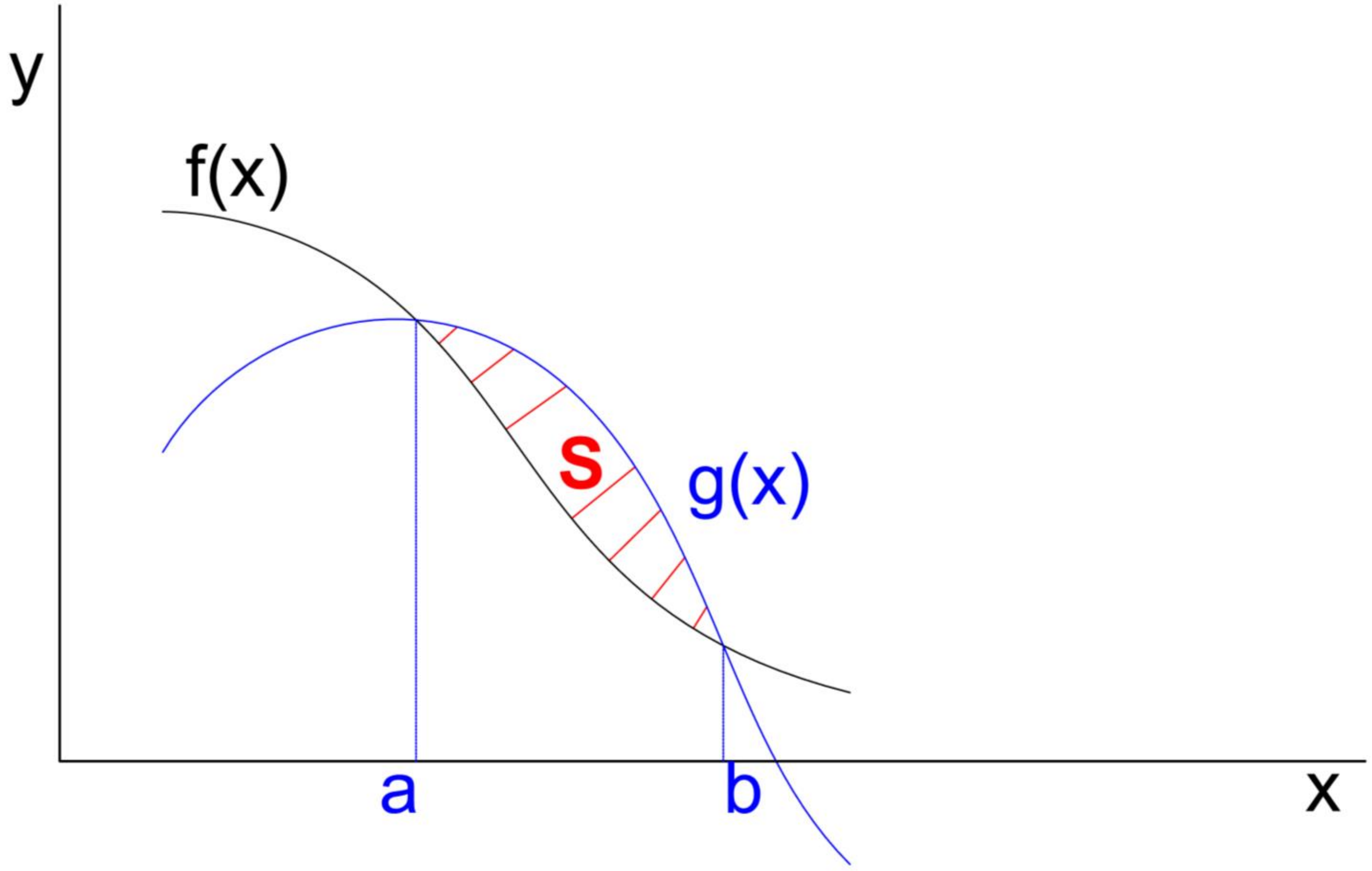
RIEMANNŮV INTEGRÁL - VÝPOČET

- Je-li f spojitá v intervalu $\langle a,b\rangle$ a F primitivní funkce k f v $\langle a,b\rangle$, pak $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. (***Newton-Leibnizova formule***)

- **Věta o integraci per-partes:**
  Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace v intervalu $\langle a,b\rangle$, pak $\int_a^b u'\cdot v\,dx = [u\cdot v]_a^b - \int_a^b u\cdot v'\,dx.$
- **Věta o integraci substitucí:**
  Nechť funkce g má spojitou derivaci v intervalu $\langle a,b\rangle$ a zobrazuje $\langle a,b\rangle$ do intervalu J, na kterém je funkce f spojitá, pak $\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\,ds.$

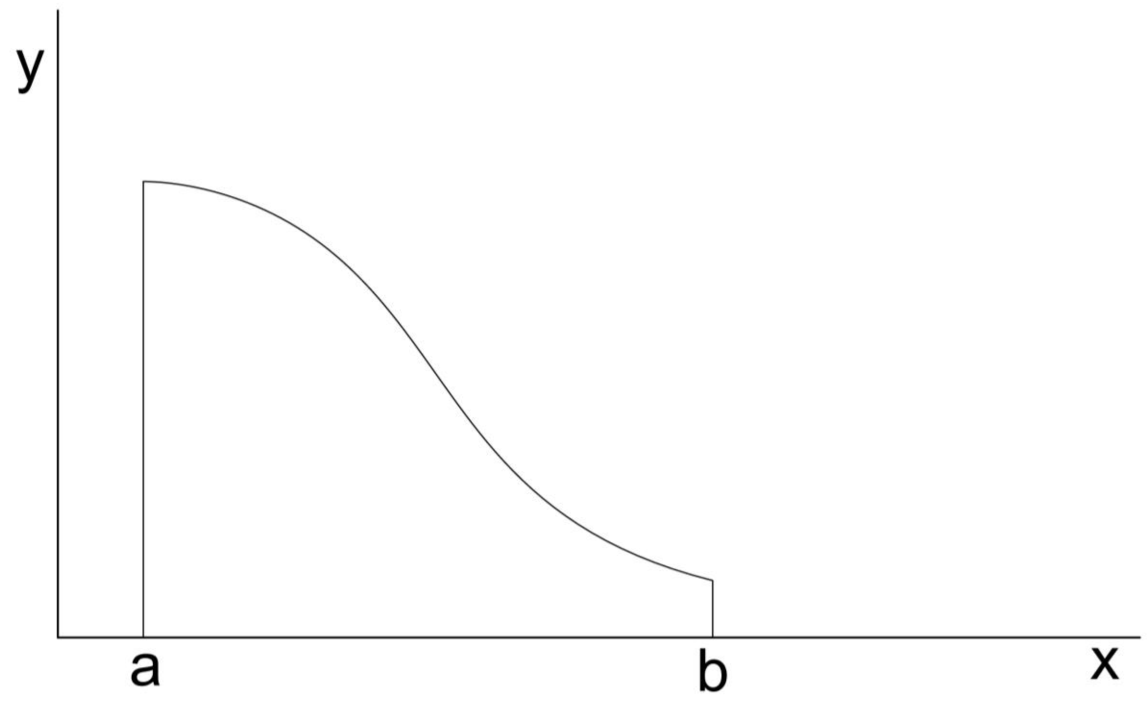
RIEMANNŮV INTEGRÁL - APLIKACE

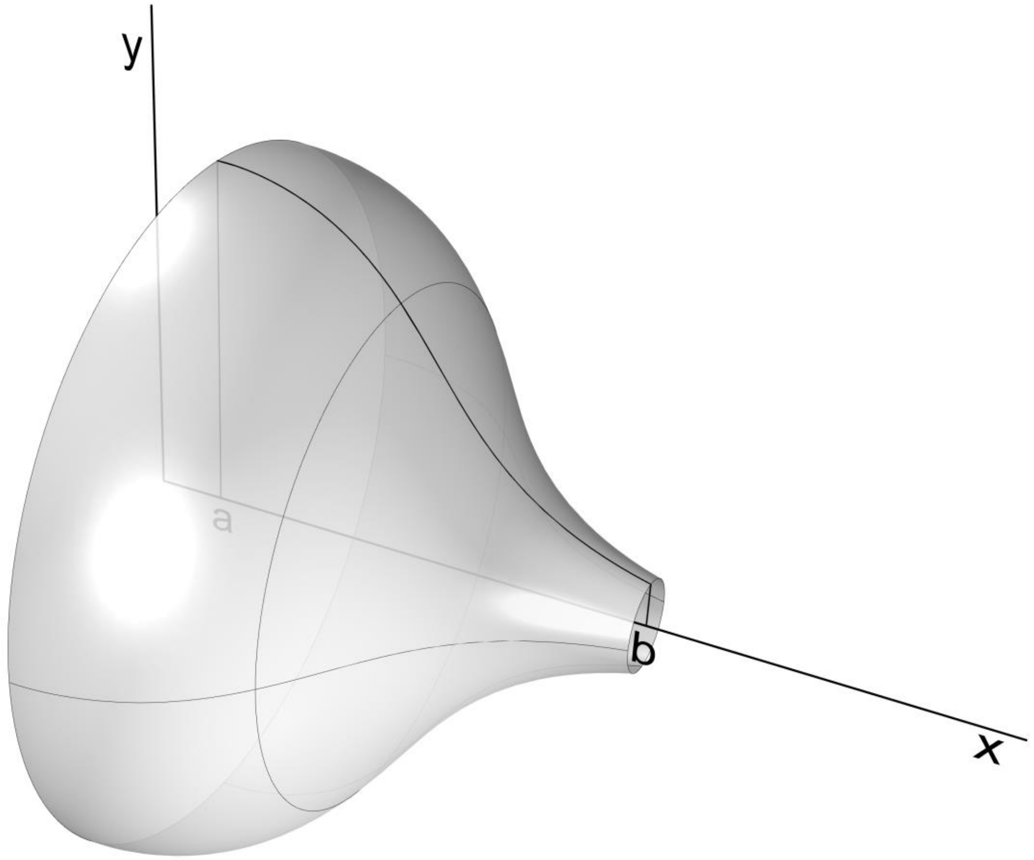
- **Obsah rovinného obrazce** mezi funkcemi f a g na $\langle a, b\rangle$ je $S = \int_a^b g(x) - f(x)\, dx$.



RIEMANNŮV INTEGRÁL - APLIKACE

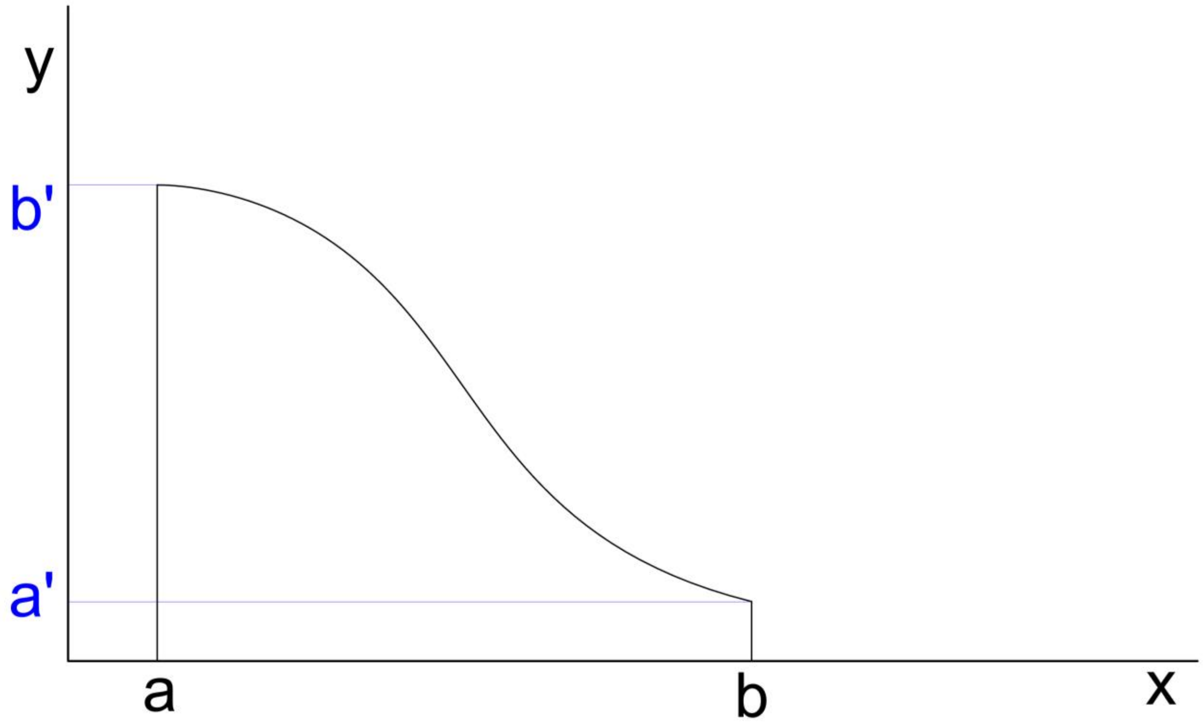
- **Objem rotačního tělesa** vzniklého rotací funkce f na $\langle a, b\rangle$ kolem osy x je $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$.

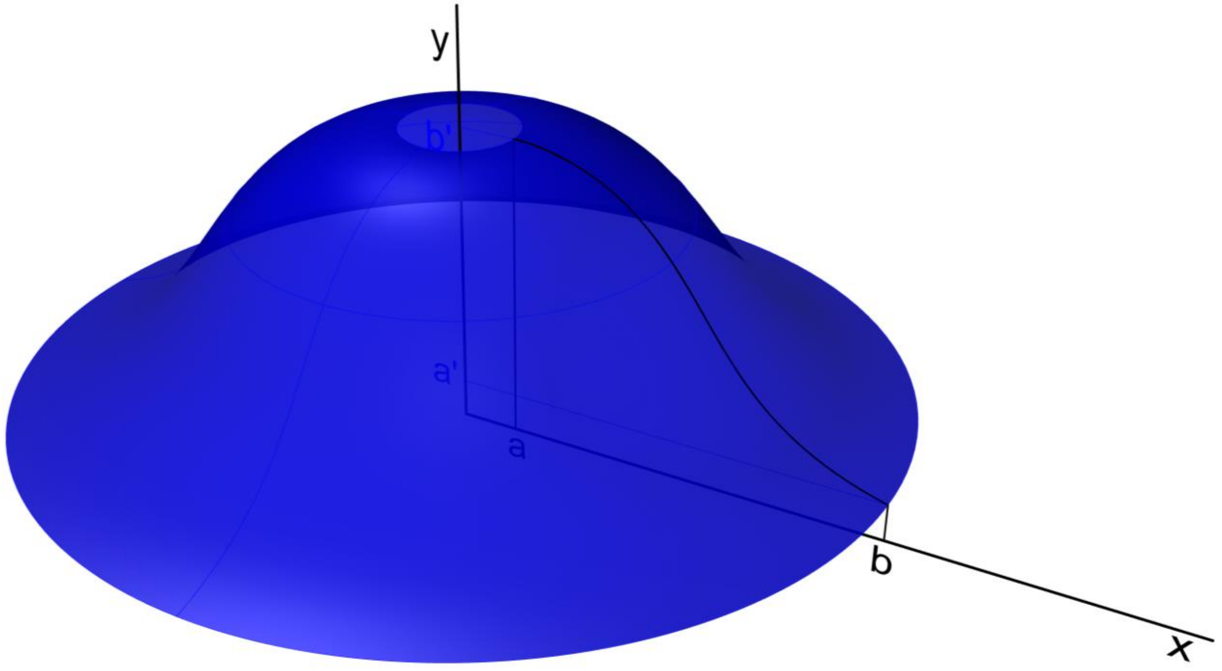




RIEMANNŮV INTEGRÁL - APLIKACE

- **Objem rotačního tělesa** vzniklého rotací funkce f na $\langle a, b\rangle$ kolem osy y je $V = \pi \int_{a'}^{b'} h^2(y)\, dy$.





RIEMANNŮV INTEGRÁL - APLIKACE

- **Povrch rotační plochy** vzniklé rotací f kolem osy x je $P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{[f'(x)]^2+1}\,dx$.
- **Délka křivky**, která je grafem funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ je $l = \int_a^b \sqrt{[f'(x)]^2+1}\,dx$.
- **Hmotnost křivky**, na které je hmota rozložena s hustotou ρ je
  $m = \rho \cdot l = \rho \int_a^b \sqrt{[f'(x)]^2+1}\,dx$.
- **Statické momenty** křivky vzhledem k osám x a y jsou
  $m_x = \rho \int_a^b f(x)\sqrt{[f'(x)]^2+1}\,dx$ $\qquad$ $m_y = \rho \int_a^b x\sqrt{[f'(x)]^2+1}\,dx$.
- **Souřadnice těžiště** křivky jsou $T_x = \frac{m_x}{m}$ a $T_y = \frac{m_y}{m}$.
- **Momenty setrvačnosti** křivky vzhledem k osám x a y jsou
  $J_x = \rho \int_a^b f^2(x)\sqrt{[f'(x)]^2+1}\,dx$ $\qquad$ $J_y = \rho \int_a^b x^2\sqrt{[f'(x)]^2+1}\,dx$.

RIEMANNŮV INTEGRÁL - APLIKACE

- **Hmotnost rovinného obrazce,** na kterém je hmota rozložena s hustotou ρ je
  $m = \rho \int_a^b f(x)\,dx.$

- **Statické momenty** obrazce vzhledem k osám x a y jsou
  $m_x = \frac{1}{2}\rho \int_a^b f(x)^2\ dx$ $\qquad$ $m_y = \rho \int_a^b x f(x)\,dx.$

- **Souřadnice těžiště** obrazce jsou $T_x = \frac{m_x}{m}$ a $T_y = \frac{m_y}{m}$.

- **Momenty setrvačnosti** obrazce vzhledem k osám x a y jsou
  $J_x = \frac{1}{3}\rho \int_a^b f^3(x)\ dx$ $\qquad$ $J_y = \rho \int_a^b x^2 f(x)\,dx.$

RIEMANNŮV INTEGRÁL - APLIKACE

- **Hmotnost rotačního tělesa**, vzniklé rotací obrazce kolem osy x, na kterém je hmota rozložena s hustotou ρ je $m = \rho V = \rho\pi \int_a^b f^2(x)\, dx$.

- **Statické momenty** tělesa vzhledem k rovinám xy, xz a yz jsou
  $m_{xy} = 0$ $\quad$ $m_{xz} = 0$ $\quad$ $m_{yz} = \rho\pi \int_a^b x f^2(x)\, dx$.

- **Souřadnice těžiště** obrazce jsou $T_x = \frac{m_{yz}}{m}$, $T_y = \frac{m_{xz}}{m}$ a $T_z = \frac{m_{xy}}{m}$.

- **Moment setrvačnosti** tělesa vzhledem k ose rotace x je $J_x = \frac{1}{2}\rho\pi \int_a^b f^4(x)\ dx$.

NEURČITÝ RIEMANNŮV INTEGRÁL

- Předpokládáme, že je pro $\int_a^b f(x)\,dx$ interval $\langle a; b\rangle$ omezený a f je v něm omezená.
- Pokud je interval nebo funkce nebo obojí neomezené, nazývá se integrál ***nevlastní***.

- **Nevlastní Riemannův integrál se singulární horní mezí** je $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,dx$, pokud f je definovaná v intervalu $\langle a; b)$ a je integrovatelná v každém podintervalu $\langle a; t\rangle$ (kde $a \leq t < b$), dále pokud existuje limita $\lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,dx$ a interval $\langle a; b\rangle$ není omezený nebo f není omezená. (*Analogicky pro singulární dolní mez.*)

- Pokud je integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ konečný, ***konverguje***, pokud je $\int_a^b f(x)\,dx = \pm\infty$, integrál ***diverguje***.

NEURČITÝ RIEMANNŮV INTEGRÁL

- **Nevlastní Riemannův integrál s oběma mezemi singulárními** je $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, pokud $c \in (a; b)$ a integrály $\int_a^c f(x)\,dx$ a $\int_c^b f(x)\,dx$ existují a jejich součet má smysl.

- Toto lze použít i pokud jsou singulární body uvnitř intervalu $(a; b)$.
- Pokud jsou neomezené meze, integrál nazýváme ***nevlastní integrál vlivem meze***, pokud je neomezená funkce, integrál se nazývá ***nevlastní integrál vlivem funkce*** (je také možná kombinace obou).