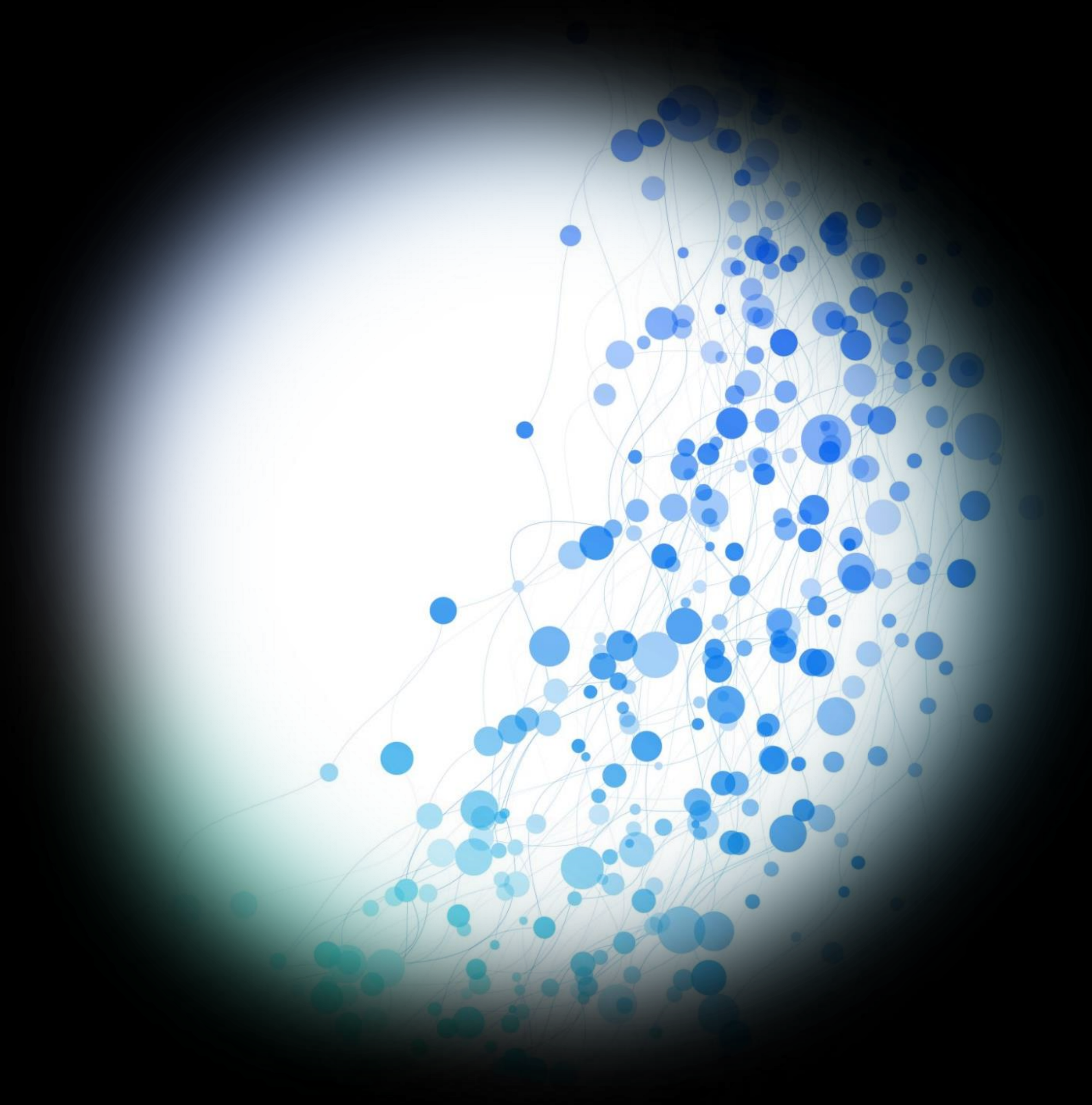

Matematika 1 – limity

Posloupnosti

Definice:

Posloupností reálných čísel budeme nazývat zobrazení množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Posloupnost, která každému $n \in \mathbb{N}$ přiřazuje číslo a_n, se značí $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ nebo stručněji $\{a_n\}$. Číslo a_n se nazývá ***n-tým členem posloupnosti*** $\{a_n\}$. Je-li $M \subset \mathbb{R}$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in M$, pak $\{a_n\}$ nazýváme posloupností v M.

Definice:

Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ nazýváme ***limitou posloupnosti*** $\{a_n\}$, jestliže $\forall U(a)\, \exists n_0 \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ (n \geq n_0) \Rightarrow (a_n \in U(a))$.

Posloupnosti

Definice:

Posloupnost $\{a_n\}$ nazýváme:

a) ***omezenou shora***, existuje-li K ∈ $\mathbb{R}$ tak, že $\forall\ n \in \mathbb{N} : a_n \leq\ K$;

b) ***omezenou zdola***, existuje-li K ∈ $\mathbb{R}$ tak, že $\forall\ n \in \mathbb{N} : a_n \geq\ K$;

c) ***omezenou***, je-li tato posloupnost omezená shora i zdola;

d) ***rostoucí***, jestliže $\forall\ n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$

e) ***klesající***, jestliže $\forall\ n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$

f) ***neklesající***, jestliže $\forall\ n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$

g) ***nerostoucí***, jestliže $\forall\ n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$

h) ***monotónní***, je-li nerostoucí nebo neklesající;

i) ***ryze monotónní***, je-li rostoucí nebo klesající.

Posloupnosti

Definice:
Je-li limitou posloupnosti $\{a_n\}$ číslo z $\mathbb{R}$ (tedy nikoliv $-\infty$ nebo $+\infty$), říkáme, že tato posloupnost je ***konvergentní***, nebo také, že ***má vlastní limitu***. Je-li $\lim a_n = +\infty$ (nebo $-\infty$), říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ ***má nevlastní limitu***. Posloupnost, která nemá žádnou limitu nebo má nevlastní limitu, se nazývá ***divergentní***.

Je-li $\lim a_n = a$ a $a \in \mathbb{R}$, říkáme též, že posloupnost $\{a_n\}$ ***konverguje*** k číslu a.

Věta:
Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Věta:
Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu rovnou a, pak jakákoliv vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$ má tutéž limitu a.

Vzorce pro počítání s limitami

- **Věta o limitě sevřené posloupnosti**:

  Jestliže v okolí bodu a platí $d(x) \leq f(x) \leq h(x)$ a platí

  $\lim_{x \to a} d(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A$, pak $\lim_{x \to a} f(x) = A$

- **Věta o limitě složené funkce:**

  Buď f funkce spojitá v bodě A. Nechť $\lim_{x \to a} g(x) = A$, potom $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(A)$.

- **Věta o limitě omezené funkce:**

  Nechť funkce f je omezená na nějakém $P(a)$, pak platí:

  Je-li $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$, pak $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, je-li $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, pak $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0$

- **Věta (aritmetika limit):**

  Jestliže funkce f, g mají vlastní limity $\lim_{x \to a} f(x) = A$ a $\lim_{x \to a} g(x) = B$, pak platí

$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$ $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$ $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{A}{B}$, pro $B \neq 0$

Vzorce pro počítání s limitami

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = \lim\limits_{x \to \pm 0} (1 + ax)^{1/x} = e^a$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0, \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ pro $0 < a < 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty, \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ pro $1 < a$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{sinx}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, pro $0 < a$

Neurčité výrazy:

- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $0 \cdot \infty$
- $\infty - \infty$

Vzorce pro počítání s limitami

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x!}{x^x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\lim\limits_{x \to 0_+} x^n \ln x = 0$, pro $n \in N$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arcsinx}{x} = 1$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{arctgx}{x} = 0$

Funkce

* **<u>znát</u>:** co je funkce, definiční obor, obor hodnot, graf funkce, operace s funkcemi, restrikce funkce, inverzní funkce, složená funkce, funkce sudá. lichá a periodická

Věta:
Je-li funkce f rostoucí, je inverzní funkce f^{-1} také rostoucí.

Věta:

O funkci f říkáme, že je:

a) **shora omezená**, $\exists\, K \in R \,::\, \forall x \in D(f)\colon\ f(x) \leq K$ (K se nazývá ,,horní mez", ,,horní hranice" nebo také ,,horní závora" funkce f)

b) **zdola omezená**, $\exists\, L \in R \,::\, \forall x \in D(f)\colon\ f(x) \geq L$ (L se nazývá ,,dolní mez", ,,dolní hranice" nebo také ,,dolní závora" funkce f)

c) **omezená**, je-li f zároveň shora i zdola omezená

d) **shora omezená** na množině $M \subset D(f)$, $\exists\, K \in R \,::\, \forall x \in M\colon\ f(x) \leq K$ (tj. je-li restrikce $f|_M$ shora omezenou funkcí)

e) **zdola omezená** na množině M či **omezená** na množině M (analogicky)

Funkce

Věta:
Říkáme, že funkce f nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého **maxima**, jestliže $\forall x \in D(f)$: $f(x) \leq f(x_0)$.
Píšeme: $f(x_0) = \max f$.

Analogicky, funkce f nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého **minima**, jestliže $\forall x \in D(f)$: $f(x) \geq f(x_0)$.
Píšeme: $f(x_0) = \min f$.

Předpokládejme, že $M \subset D(f)$. Říkáme, že funkce f nabývá v bodě $x_0 \in M$ svého **maxima na množině** M, jestliže $\forall x \in M$: $f(x) \leq f(x_0)$. Píšeme: $f(x_0) = \max_M f$. Další používaná označení maxima funkce f na množině M jsou: $\max\limits_{M} f$, $\max\limits_{x \in M} f(x)$.

Podobně lze definovat i **minimum funkce** f **na množině** M. Používáme pro ně označení: $\min_M f$, $\min\limits_{M} f$ nebo $\min\limits_{x \in M} f(x)$. Maximum a minimum funkce f nazýváme souhrnně **extrémy funkce** f.

Funkce

Věta:
Podobně lze definovat i **supremum funkce** (tj. nejmenší horní mez) a **infimum funkce** (tj. největší dolní mez).

* zatímco supremum a infimum funkce f (na celém definičním oboru nebo pouze na množině M) vždy existují, maximum a minimum funkce f (na celém $D(f)$ nebo pouze na M) existovat nemusí

* Existuje-li $\max f$, je $\sup f = \max f$. Podobně, existuje-li $\min f$, je $\inf f = \min f$.

Funkce

Definice:

Nechť f je funkce a $M \subset D(f)$. Funkci f nazýváme:

a) ***rostoucí na*** M, jestliže $\forall\ x_1, x_2 \in M: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

b) ***klesající na*** M, jestliže $\forall x_1, x_2 \in M: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

c) ***neklesající na*** M, jestliže $\forall x_1, x_2 \in M: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

d) ***nerostoucí na*** M, jestliže $\forall x_1, x_2 \in M: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

e) ***monotónní na*** M, je-li nerostoucí nebo neklesající

f) ***ryze monotónní na*** M, je-li rostoucí nebo klesající

* funkce, která je nerostoucí i neklesající, je konstantní

* funkce, která je ryze monotónní je prostá (a tudíž k ní existuje inverzní funkce)

Funkce

Definice (limita funkce):

Předpokládejme, že $x_0 \in \mathbb{R}^*$a že definiční obor funkce f obsahuje některé prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0. Jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v $P(x_0)$ platí implikace $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to a$, pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 limitu rovnou a. Píšeme: $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$.

Věta:

Funkce f muže mít v jakémkoliv bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ <u>nejvýše jednu limitu</u>.

* Je-li $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ a je-li $a \in \mathbb{R}$, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 <u>vlastní limitu</u>. Je-li $a = +\infty$ nebo $a = -\infty$, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 <u>nevlastní limitu</u>.

Funkce

* analogicky limity funkce zleva a zprava

Věta:

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu rovnou a právě když má v bodě x_0 limitu zprava i limitu zleva a obě jsou rovné a.

Definice (spojitost funkce v bodě):

O funkci f říkáme, že je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Funkce

Definice:

O funkci f říkáme, že je spojitá zprava (respektive spojitá zleva) v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže $\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$ (respektive $\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$).

* Funkce f je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, je-li v tomto bodě spojitá zprava i zleva.

Definice:

Nechť I je interval v $\mathbb{R}$, který je částí definičního oboru funkce f. Říkáme, že funkce f je **spojitá v intervalu** I, jestliže:

a) f je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I,

b) f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu I (patří-li tento bod do I),

c) f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu I (patří-li tento bod do I).

Funkce

Definice:

Jsou-li funkce f a g spojité v bodě x_0, pak také funkce $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, a $|f|$ jsou spojité v bodě x_0. Za dodatečného předpokladu, že $g(x_0) \neq 0$ je i funkce f/g spojitá v bodě x_0.

* analogicky spojitost zprava, zleva a na intervalu

Věta (o spojitosti složené funkce):

Je-li funkce g spojitá v bodě x_0 a funkce f je spojitá v bodě $g(x_0)$, je složená funkce $f * g$ (tj. funkce $y = f(g(x))$) spojitá v bodě x_0.

Funkce

Věta (Darbouxova vlastnost / o nabývání mezihodnot):

Je-li funkce f spojitá v intervalu I a jsou-li x_1 a x_2 dva libovolné body z I, pak ke každému číslu η ležícímu mezi $f(x_1)$ a $f(x_2)$ existuje bod ξ ležící mezi x_1 a x_2 takový, že $f(\xi) = \eta$.

Věta (o spojitosti inverzní funkce):

Je-li funkce f spojitá a prostá v intervalu I, $f(I) = J$, pak inverzní funkce f^{-1} je spojitá v intervalu J.

Věta (o existenci maxima a minima):

Spojitá funkce v uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá v tomto intervalu svého maxima i minima. (Tj. $\max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ a $\min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ existují.)

Funkce

Věta:

Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0. Je-li $f(x_0) > 0$, pak existuje okolí $U(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in U(x_0)$ platí: $f(x) > 0$.

Věta (1. věta o limitě složené funkce):

Nechť $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a nechť funkce f je spojitá v bodě λ. Pak platí: $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lambda)$.

Věta (2. věta o limitě složené funkce):

Nechť $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ (respektive $-\infty$). Nechť $\lim_{y \to +\infty} f(y) = L$ (respektive $\lim_{y \to -\infty} f(y) = L$). Pak plátí: $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = L$.