Matematika 1 - matice

Souhrn potřebných definic a vět

MATICE

- **Definice (matice):**
  Maticí typu $m \times n$ nazýváme obdélníkové pole, tvořené z $m \cdot n$ reálných čísel (tzv. prvků matice), zapsaných v m řádcích a n sloupcích.
- **Definice (rovnost dvou matic):**
  Dvě matice pokládáme za sobě rovné, jsou-li stejného typu a mají-li na odpovídajících si místech stejné prvky.
- **Definice (hlavní diagonála):**
  Prvky $a_{11}, a_{22}, \dots$ tvoří v matici A tzv. hlavní diagonálu.
- **Definice (horní trojúhelníková matice):**
  Jsou-li v matici A všechny prvky pod hlavní diagonálou rovny nule, nazýváme A horní trojúhelníkovou maticí.

MATICE

- **Definice (nulová matice):**
Matici, jejíž všechny prvky jsou rovny nule, nazýváme nulovou maticí.
- **Definice (transponovaná matice):**
Matici $B = (b_{ij})$ typu $n \times m$, pro jejíž prvky platí $b_{ij} = a_{ij}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$, nazýváme transponovanou maticí k matici A. Značíme ji A^T.
- **Definice (čtvercová matice):**
Matici typu $n \times n$ nazýváme čtvercovou maticí.
- **Definice (jednotková matice):**
Čtvercovou matici, která má na hlavní diagonále samé jednotky a všude mimo hlavní diagonálu nuly, nazýváme jednotkovou maticí. Tuto matici označujeme E.

MATICE

- **Definice (sčítání matic):**
  Jsou-li $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ matice stejného typu $m \times n$, pak jejich součtem nazýváme matici $C = (c_{ij})$ která je rovněž typu $m \times n$ a pro její prvky platí: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$. Používáme zápis $C = A + B$.

- **Definice (násobení matic reálnými čísly):**
  Je-li $A = (a_{ij})$ matice typu $m \times n$ a λ je reálné číslo, pak součinem čísla λ a matice A (nebo také λ–násobkem matice A) nazýváme matici $C = (c_{ij})$, která je rovněž typu $m \times n$ a pro její prvky platí: $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$. Používáme zápis $C = \lambda \cdot A$.

MATICE

- **Definice (násobení matic):**
  Je-li $A = (a_{ij})$ matice typu $m \times n$ a $B = (b_{ij})$ matice typu $n \times p$, pak součinem matic A a B nazýváme matici $C = (c_{ij})$ typu $m \times p$, pro jejíž prvky platí: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{mj}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$. Píšeme: $C = A \cdot B$.
  * **Násobení matic není komutativní!!!**

- **Definice (hodnost matice):**
  Maximální počet lineárně nezávislých řádků matice A (chápaných jako aritmetické vektory) nazýváme hodností matice A. Značíme ji $h(A)$.
  * Hodnost matice lze definovat i jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců.

- **Věta:**
  Nechť” A je horní trojúhelníková matice typu $m \times n$, která má všechny prvky na hlavní diagonále různé od nuly. Pak $h(A) = \min\{m; n\}$.

MATICE

- **Ekvivalentní úpravy matice:**
  Ekvivalentní úpravy, které budeme používat, jsou tyto:
  a) změna pořadí řádků,
  b) vynásobení některého řádku nenulovým číslem,
  c) přičtení k některému řádku lineární kombinace ostatních řádků (speciálně, přičtení násobku jiného řádku),
  d) vynechání řádku, který je lineární kombinací ostatních řádků (speciálně, vynechání řádku obsahujícího samé nuly nebo vynechání řádku, který je násobkem nějakého jiného řádku)

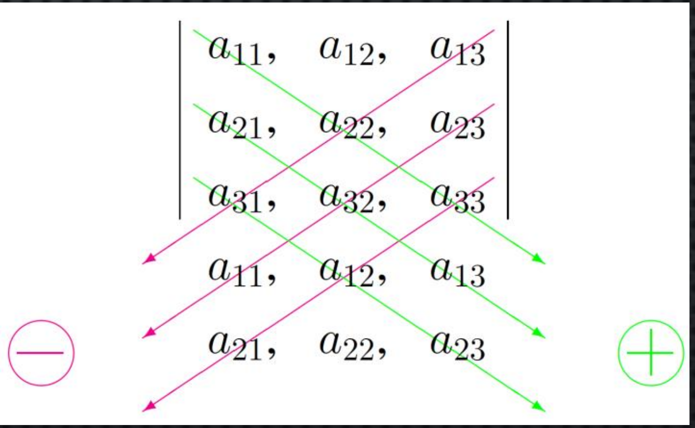
Postup, jak pomocí ekvivalentních úprav převést libovolnou matici na horní trojúhelníkovou matici (s nenulovými prvky na hlavní diagonále), se nazývá Gaussův algoritmus.

MATICE

- **Definice (determinant):**
  Nechť" A je čtvercová matice. Determinantem matice A nazýváme ˇčíslo, které označujeme $detA$ a které lze matici A přiradit podle těchto pravidel:
- a) Je-li $A = (a)$ čtvercová matice typu 1×1, pak $detA\ =\ a$.
- b) Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová matice typu $n \times n$ (pro $n > 1$), vybereme libovolný
- řádek matice A (označíme jej jako i–tý) a položíme $detA\ =\ a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$, kde A_{ij} je tzv. doplněk prvku a_{ij} v matici A. Tento doplněk je roven $(-1)^{i+j} \cdot A_{ij}^{*}$, kde A_{ij}^{*} je determinant čtvercové matice typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z matice A vynecháním i–tého řádku a j–tého sloupce.

MATICE

- Součtu $detA = (-1)^{i+1} \cdot A_{i1}^{*} a_{i1} + (-1)^{i+2} \cdot A_{i2}^{*} a_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} \cdot A_{in}^{*} a_{in}$ říkáme rozvoj determinantu podle i–tého řádku.
- Tedy pro pro čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ typu 2×2 platí: $detA = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- Determinant lze dokonce rozvíjet i podle libovolného sloupce, výsledek je opět stejný.
- **Sarussovo pravidlo:**
  Při vypočtu determinantů matic typu 3×3 lze kromě rozvoje podle některého řádku či sloupce použít ještě tzv. Sarussovo pravidlo:



  $detA = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$.
  * $|detA|$ je obsah rovnoběžnostěnu (dané dimenze)

DETERMINANT - VLASTNOSTI

- Obsahuje-li některý řádek (nebo sloupec) matice A samé nuly, je $detA = 0$
- $detA = detA^T$
- Vyměníme-li v matici A navzájem dva řádky (nebo sloupce), pak determinant změní znaménko (tj. determinant nové matice roven $-detA$).
- Jsou-li dva řádky (nebo sloupce) v matici A stejné, je $detA = 0$.
- Vynásobíme-li některý řádek (nebo sloupec) matice A číslem λ, je determinant nové matice roven $\lambda \cdot detA$.
- Je-li některý řádek (respektive sloupec) matice A násobkem jiného řádku (respektive sloupce), je $detA = 0$.
- Je-li některý řádek (respektive sloupec) matice A lineární kombinací ostatních řádků (respektive sloupců), je $detA = 0$.
- Determinant se nezmění, přičteme-li k libovolnému řádku (respektive sloupci) lineární kombinaci ostatních řádků (respektive sloupců).
- Jsou-li A a B čtvercové matice stejného typu, je $\det(A \cdot B) = detA \cdot detB$.

MATICE

- **Definice (regulární a singulární matice):**
Čtvercovou matici typu $n \times n$, která´ má maximální možnou hodnost (tj. n) nazýváme regulární maticí. Čtvercovou matici, která není regulární, nazýváme singulární maticí.
- **Definice (inverzní matice):**
Předpokládejme, že A a E jsou čtvercové matice typu $n \times n$, přičemž E je jednotková matice. Čtvercovou matici A^{-1} typu $n \times n$ nazýváme inverzní maticí k matici A, jestliže platí $A \cdot A^{-1} = E$.
- **Věta:**
Nechť A je čtvercová matice. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:
- a) Matice A je regulární.
- b) $detA \neq 0$.
- c) Inverzní matice A^{-1} k matici A existuje.

MATICE

- **Výpočet inverzní matice (pokud existuje):**
  1) Lze užít vzorec $A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$,kde A_{ij} jsou doplňky prvků a_{ij} v matici A.
  2) Pro větší matice je užití výše uvedeného vzorce velmi pracné, vzhledem k pracnosti výpočtů hodnot $A_{11}, A_{12}, \dots$ K výpočtu inverzní matice A^{-1} k regulární čtvercové matici A lze ale použít i jinou, méně pracnou metodu, založenou na podobném postupu jako je Gaussův algoritmus a také jednotkové matici.
- **Věta:**
  Jsou-li A a B regulární matice téhož typu, je matice $A \cdot B$ rovněž regulární. Platí: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

MATICE A SOUSTAVA ROVNIC

- **Věta:**
  Je-li A regulární matice, pak A^{-1} je také regulární matice a platí:
  a) $(A^{-1})^{-1} = A$ b) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.
- **Věta (o jednoznačnosti inverzní matice):**
  Pokud ke čtvercové matici A existuje inverzní matice A^{-1}, pak tato je určena jednoznačně.
- Homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení, tj. řešení nulové $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ (tzv. triviální řešení).
- **Věta:**
  Množina všech řešení homogenní soustavy $A \cdot X = O$ je podprostorem n–rozměrného aritmetického prostoru $\mathbb{R}^n$. Dimenze tohoto podprostoru je $n - h(A)$.

MATICE A SOUSTAVA ROVNIC

- **Věta (Frobeniova):**
  Soustava lineárních algebraických rovnic $A \cdot X = B$ (pro n neznámých) má řešení právě tehdy, je-li $h(A) = h(A|B)$.
  Je-li $h(A) = h(A|B) = n$, má soustava jediné řešení.
  Je-li $h(A) = h(A|B) < n$, má soustava nekonečně mnoho řešení.

  Pokud máme soustavu n rovnic pro n neznámých a matice soustavy A je regulární, existuje jediné řešení.
  V tomto speciálním případě lze k vyjádření řešení použíti tzv. ***Cramerovo pravidlo***:
  $x_i = \frac{detA_i}{detA}$, kde $detA_i$ je determinant čtvercové matice, která vznikne z matice A po nahrazení i–tého sloupce sloupcem pravých stran.

VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY ČTVERCOVÝCH MATIC

- **Definice (vlastní číslo, vlastní vektor):**
  Komplexní číslo λ nazýváme vlastním číslem čtvercové matice A existuje-li nenulový vektor X takový, že $A \cdot X = \lambda \cdot X$.
  Vektor X se nazývá vlastním vektorem matice A odpovídajícím vlastnímu číslu λ.

  Vlastní vektor není určen jednoznačně (nebo-li až na násobek), vždy je jich nekonečně mnoho.

  Vlastní čísla získáme řešením ***charakteristické rovnice***: $\det(A - \lambda E) = 0$. K nim příslušné vlastní vektory vypočítáme z rovnice$(A - \lambda E) \cdot X = 0$

VLASTNOSTI VLASTNÍCH ČÍSEL A VLASTNÍCH VEKTORŮ

- Vlastní vektory X_1, X_2 matice A, odpovídající různým vlastním číslům λ_1, λ_2 jsou lineárně nezávislé.
- Matice A má vlastní číslo 0 právě když je singulární.
- Je-li λ vlastním číslem matice A a X je příslušným vlastním vektor, pak $\bar{\lambda}$ je také vlastním číslem matice A a $\bar{X}$ je příslušným vlastním vektorem.
- Je-li λ vlastním číslem matice A a X je příslušný vlastní vektor, pak λ^2 je vlastním číslem matice A a X je opět příslušným vlastním vektorem.
- Existuje-li inverzní matice A^{-1}, je λ vlastním číslem matice A právě když $\frac{1}{\lambda}$ je vlastním číslem matice A^{-1}. Odpovídající vlastní vektory jsou v tomto případě stejné.
- Je-li A symetrická čtvercová matice, pak všechny její vlastní čísla jsou reálná. Vlastní vektory, odpovídající různým vlastním číslům, jsou v tomto případě kolmé.

NÁSLEDUJÍCÍ VÝROKY JSOU EKVIVALENTNÍ PRO A $(n \times n)$

- Matice A je regulární.
- $detA \neq 0$.
- Inverzní matice A^{-1} existuje.
- Matice A má hodnost n.
- Řádky matice A jsou lineárně nezávislé.
- Sloupce matice A jsou lineárně nezávislé.
- Homogenní soustava lineárních algebraických rovnic $A \cdot X = O$ má jediné (a to nulové) řešení.
- Obecná (tj. homogenní nebo nehomogenní) soustava lineárních algebraických rovnic $A \cdot X = B$ má jediné řešení.
- 0 není vlastním číslem matice A.