

Numerická matematika – domácí úkol 4

1. Je dána Cauchyova úloha $\vec{y}' = \begin{pmatrix} 2x - y_1^2 + x^2 \\ 2y_1y_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - a) Zapište oblast G v níž jsou splněny podmínky existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy.
 - b) Užitím Collatzovy metody určete přibližně hodnotu řešení v bodě $x = 0.1$ s krokem $h = 0.1$.
2. Je dána Dirichletova okrajová úloha v samoadjungovaném tvaru
$$-(xy')' + (x + 1)y = 4, \quad y(1) = 0, \quad y(5) = 1$$
 - a) Zapište postačující podmínku pro existenci a jednoznačnost řešení okrajové úlohy v samoadjungovaném tvaru a ověřte, zda jsou splněny.
 - b) Užitím Taylorova rozvoje odvoďte náhradu $y''(x)$ pomocí hodnot funkce $y(x), y(x \pm h)$.
 - c) Zapište síťové rovnice pro krok $h = 1$. Proveďte jeden krok Jacobiovy iterační metody, X^0 jako pravou stranu soustavy.
3. Je dána okrajová úloha $-\Delta u = 12xy$ v oblasti tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0, 0], [1.8, 0], [0, 1.5], [1.5, 1.5]$, na hranici je předepsána okrajová podmínka $u(x, y) = x + y$.
 - a) Uveďte o jaký typ rovnice se jedná a pomocí parciálních derivací rozepište symbol Δu . Ověřte, zda pro funkci $u(x, y) = xy(97 - x^2 - y^2)$ platí $-\Delta u = 12xy$.
 - b) Zapište, jak se v regulárním uzlu $P_{i,j}$ nahradí parciální derivace uvedené v části a). Odvoďte rovnici pro náhradu dané rovnice metodou sítí v uzlu $P_{i,j}$.
 - c) Volte krok $h = 0.5$ a síť tak, aby obsahovala bod $[0, 0]$. Sestavte síťové rovnice v uzlech sítě ležících na přímce $y = 1$. V neregulárních uzlech užitě lineární interpolaci.