Počítačová grafika

2. cvičení

Napojení Bézierových křivek

Bézierova křivka n-tého stupně

- vektorová rovnice:

$$P(t) = B_{0,n}(t) \cdot V_0 + B_{1,n}(t) \cdot V_1 + \cdots + B_{n,n}(t) \cdot V_n, t \in \langle 0; 1 \rangle$$

$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (t-1)^{n-i}$ jsou Bernsteinovy polynomy stupně n

- Bézierova kvadrika je určena rovnicí:

$$P(t) = (1-t)^2 \cdot V_0 + 2t(1-t) \cdot V_1 + t^2 \cdot V_2$$

- Bézierova kubika je určena rovnicí:

$$P(t) = (1-t)^3 \cdot V_0 + 3t(1-t)^2 \cdot V_1 + 3t^2(1-t) \cdot V_2 + t^3 \cdot V_3$$

Napojení Bézierových kvadrik

- máme 1. kvadriku s řídicími body V_0, V_1, V_2:

$$P(t) = (1-t)^2 \cdot V_0 + 2t(1-t) \cdot V_1 + t^2 \cdot V_2$$

- a 2. kvadriku s řídicími body W_0, W_1, W_2:

$$R(s) = (1-s)^2 \cdot W_0 + 2s(1-s) \cdot W_1 + s^2 \cdot W_2$$

- pro C^0 spojitost tedy musí platit: $P(1) = R(0)$ → $V_2 = W_0$
- pro C^1 spojitost musí platit: $P'(1) = R'(0)$

$$P'(t) = (-2+2t) \cdot V_0 + (2-4t) \cdot V_1 + 2t \cdot V_2$$
$$\mathrm{R}'(s) = (-2+2s) \cdot W_0 + (2-4s) \cdot W_1 + 2s \cdot W_2$$

→ řešením rovnice $P'(1) = R'(0)$, kde platí $V_3 = W_0$ a dostaneme: $W_1 = V_2 + \overrightarrow{V_1V_2}$

Napojení Bézierových kvadrik

- pro C^2 spojitost musí platit: $P''(1) = R''(0)$

$$P''(t) = 2 \cdot V_0 + (-4) \cdot V_1 + 2 \cdot V_2$$

$$R''(s) = 2 \cdot W_0 + (-4) \cdot W_1 + 2 \cdot W_2$$

→ dostaneme: $W_2 = V_0 + 3 \cdot \overrightarrow{V_1 V_2}$

Napojení Bézierových kubik

- máme 1. kubiku s řídicími body V_0, V_1, V_2 a V_3:

$$P(t) = (1-t)^3 \cdot V_0 + 3t(1-t)^2 \cdot V_1 + 3t^2(1-t) \cdot V_2 + t^3 \cdot V_3$$

- a 2. kubiku s řídicími body W_0, W_1, W_2 a W_3:

$$R(s) = (1-s)^3 \cdot W_0 + 3s(1-s)^2 \cdot W_1 + 3s^2(1-s) \cdot W_2 + s^3 \cdot W_3$$

- pro C^0 spojitost tedy musí platit: $P(1) = R(0) \rightarrow V_3 = W_0$

- pro C^1 spojitost musí platit: $P'(1) = R'(0)$

  $P'(t) = (-3 + 6t - 3t^2) \cdot V_0 + (3 - 12t + 9t^2) \cdot V_1 + (6t - 9t^2) \cdot V_2 + 3t^2 \cdot V_3$

  $R'(s) = (-3 + 6s - 3s^2) \cdot W_0 + (3 - 12s + 9s^2) \cdot W_1 + (6s - 9s^2) \cdot W_2 + 3s^2 \cdot W_3$

  → řešením rovnice $P'(1) = R'(0)$, kde platí $V_3 = W_0$ a dostaneme:

$$W_1 = V_3 - V_2 + V_3, \text{ tedy } W_1 = V_3 + \overrightarrow{V_2V_3}$$

Napojení Bézierových kubik

- máme 1. kubiku s řídicími body V_0, V_1, V_2 a V_3:

$$P(t) = (1-t)^3 \cdot V_0 + 3t(1-t)^2 \cdot V_1 + 3t^2(1-t) \cdot V_2 + t^3 \cdot V_3$$

- a 2. kubiku s řídicími body W_0, W_1, W_2 a W_3:

$$R(s) = (1-s)^3 \cdot W_0 + 3s(1-s)^2 \cdot W_1 + 3s^2(1-s) \cdot W_2 + s^3 \cdot W_3$$

- pro C^0 spojitost tedy musí platit: $P(1) = R(0) \rightarrow V_3 = W_0$

- pro C^1 spojitost musí platit: $P'(1) = R'(0)$

$$P'(t) = (-3 + 6t - 3t^2) \cdot V_0 + (3 - 12t + 9t^2) \cdot V_1 + (6t - 9t^2) \cdot V_2 + 3t^2 \cdot V_3$$

$$R'(s) = (-3 + 6s - 3s^2) \cdot W_0 + (3 - 12s + 9s^2) \cdot W_1 + (6s - 9s^2) \cdot W_2 + 3s^2 \cdot W_3$$

→ řešením rovnice $P'(1) = R'(0)$, kde platí $V_3 = W_0$ a dostaneme:

$$W_1 = V_3 - V_2 + V_3, \text{ tedy } W_1 = V_3 + \overrightarrow{V_2V_3}$$

Napojení Bézierových kubik

- pro C^2 spojitost musí platit: $P''(1) = R''(0)$

$P''(t) = (6 - 6t) \cdot V_0 + (-12 + 18t) \cdot V_1 + (6 - 18t) \cdot V_2 + 6t \cdot V_3$

$R''(s) = (6 - 6s) \cdot W_0 + (-12 + 18s) \cdot W_1 + (6 - 18s) \cdot W_2 + 6s \cdot W_3$

→ řešením rovnici $P''(1) = R''(0)$, kde platí $V_3 = W_0$ a $W_1 = V_3 + \overrightarrow{V_2V_3}$

→ dostaneme: $W_2 = V_1 + 4 \cdot (V_3 - V_2)$, tedy $W_1 = V_1 + 4 \cdot \overrightarrow{V_2V_3}$

Napojení Bézierových kubik

Ověřte spojitost napojení Bézierových kubik určených jako Fergusonovy kubiky:

$A = [0; 0], B = [6; 0], \vec{a} = (9; 9), \vec{b} = (0; -9)$ a $B = [6; 0], C = [0; 0], \vec{b} = (0; -9),$
$\vec{c} = (-9; 9)$

→ řídicí body Bézierových kubik jsou:

$$V_0 = [0; 0], V_1 = [3; 3], V_2 = [6; 3], V_3 = [6; 0]$$

$$W_0 = [6; 0], W_1 = [6; -3], W_2 = [3; -3], W_3 = [0; 0]$$

$P(t) = (-3t^3 + 9t; -18t^3 + 27t^2 - 9t)$

$R(s) = (3s^3 - 9s^2 + 6; 9s^2 - 9s)$

→ z derivací ověříme C^1 a C^2 spojitosti, nakreslíme ověříme v Rhinu

Napojení Bézierových křivek

Před Bézierovu kubiku napojte C^2 spojitě Bézierovu kvadriku, pokud jsou dány řídicí body kubiky: $V_0 = [0; 0], V_1 = [1; 0], V_2 = [1; 1], V_3 = [0; 1]$. Vyřešte početně.

→ vypočteme nejprve rovnici kubiky a její derivace:

$$P(t) = (-3t^2 + 3t; -2t^3 + 3t^2)$$

$$P'(t) = (-6t + 3; -6t^2 + 6t)$$

$$P''(t) = (-6; -12t + 6)$$

$$P'(0) = (3; 0)$$

$$P''(0) = (-6; 6)$$

Napojení Bézierových křivek

→ pro kvadriku bude platit:

$$R(t) = (1-t)^2 \cdot W_0 + 2t(1-t) \cdot W_1 + t^2 \cdot W_2$$

→ tedy dostáváme body:

$$W_2 = V_0 \qquad W_1 = \left[-\frac{3}{2}; 0\right] \qquad W_0 = [-6; 3]$$

Zobrazíme v Rhinu a ověříme spojitost pomocí grafu.

Napojení Bézierových křivek

Odvoďte podmínky řídicích bodů pro dvě C^3 spojitě napojené Bézierovy kubiky.

$W_0 = V_3, W_1 = V_3 + \overrightarrow{V_2V_3}, W_2 = V_1 + 4 \cdot \overrightarrow{V_2V_3}$

→ 3. derivace: $P'''(t) = -6 \cdot V_0 + 18 \cdot V_1 - 18 \cdot V_2 + 6 \cdot V_3$

→ tedy poslední řídicí bod bude například v takovémto geometricky reprezentovaném formátu: $W_3 = V_3 + \overrightarrow{V_0V_3} + 6 \cdot \overrightarrow{V_2V_3} - 6 \cdot \overrightarrow{V_1V_2}$