Počítačová grafika

3. cvičení

Interpolační křivka ze 4 definičních bodů

Ukotvená křivka

Bézierova křivka n-tého stupně

- vektorová rovnice:

$$P(t) = B_{0,n}(t) \cdot V_0 + B_{1,n}(t) \cdot V_1 + \cdots + B_{n,n}(t) \cdot V_n, t \in \langle 0; 1 \rangle$$

$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (t-1)^{n-i}$ jsou Bernsteinovy polynomy stupně n

- Bézierova kubika je určena rovnicí:

$$P(t) = (1-t)^3 \cdot V_0 + 3t(1-t)^2 \cdot V_1 + 3t^2(1-t) \cdot V_2 + t^3 \cdot V_3$$

Napojení Bézierových kubik

- máme 1. kubiku s řídicími body V_0, V_1, V_2 a V_3:
$$P(t) = (1-t)^3 \cdot V_0 + 3t(1-t)^2 \cdot V_1 + 3t^2(1-t) \cdot V_2 + t^3 \cdot V_3$$
- a 2. kubiku s řídicími body W_0, W_1, W_2 a W_3:
$$R(s) = (1-s)^3 \cdot W_0 + 3s(1-s)^2 \cdot W_1 + 3s^2(1-s) \cdot W_2 + s^3 \cdot W_3$$

- pro C^0 spojitost tedy musí platit: $P(1) = R(0)$ → $V_3 = W_0$
- pro C^1 spojitost musí platit: $P'(1) = R'(0)$
$$P'(t) = (-3+6t-3t^2) \cdot V_0 + (3-12t+9t^2) \cdot V_1 + (6t-9t^2) \cdot V_2 + 3t^2 \cdot V_3$$

$$\mathrm{R}'(s) = (-3+6s-3s^2) \cdot W_0 + (3-12s+9s^2) \cdot W_1 + (6s-9s^2) \cdot W_2 + 3s^2 \cdot W_3$$

→ řešením rovnice $P'(1) = R'(0)$, kde platí $V_3 = W_0$ a dostaneme:
$$W_1 = V_3 - V_2 + V_3, \text{ tedy } W_1 = V_3 + \overrightarrow{V_2V_3}$$

Napojení Bézierových kubik

- pro C^2 spojitost musí platit: $P''(1) = R''(0)$

  $P''(t) = (6 - 6t) \cdot V_0 + (-12 + 18t) \cdot V_1 + (6 - 18t) \cdot V_2 + 6t \cdot V_3$

  $R''(s) = (6 - 6s) \cdot W_0 + (-12 + 18s) \cdot W_1 + (6 - 18s) \cdot W_2 + 6s \cdot W_3$

  → řešením rovnici $P''(1) = R''(0)$, kde platí

  $V_3 = W_0$ a $W_1 = V_3 + \overrightarrow{V_2V_3}$

  → dostaneme: $W_2 = V_1 + 4 \cdot (V_3 - V_2)$, tedy $W_1 = V_1 + 4 \cdot \overrightarrow{V_2V_3}$

Napojení Bézierových kubik

Vytvořte C^2 spojitou křivku z Bézierových kubik, pokud jsou dány body, kterými má procházet: $A = [4; 1], B = [2; 6], C = [6; 6], D = [10; 1]$

→ tvoříme ze 3 Bézierových kubik a musí platit pro dvě sousední kubiky: $V_3 = W_0,\ W_1 = V_3 + \overrightarrow{V_2V_3}$ a $W_1 = V_1 + 4 \cdot \overrightarrow{V_2V_3}$

→ pokud jsou segmenty: $P_1(t)\ \ldots\ldots\ldots\ V_0 = A, V_1, V_2, V_3 = B$

$P_2(t)\ \ldots\ldots\ldots\ V_3 = B, V_4, V_5, V_6 = C$

$P_3(t)\ \ldots\ldots\ldots\ V_6 = C, V_7, V_8, V_9 = D$

Napojení Bézierových kubik

→ z podmínek napojení potom dopočteme vztahy mezi řídicími body: $V_4 = 2B - V_2, V_5 = 4B + V_1 - 4V_2, V_7 = 2C - V_5, V_8 = 4C + V_4 - 4V_5$

a víme, že $V_0 = A, V_3 = B, V_6 = C, V_9 = D$

→ řešením soustavy dostaneme:

$$V_5 = \frac{16}{15}C + \frac{4}{15}B - \frac{1}{15}V_1 - \frac{4}{15}V_8 \qquad V_2 = \frac{14}{15}B - \frac{4}{15}C + \frac{4}{15}V_1 + \frac{1}{15}V_8$$

$$V_4 = -\frac{1}{15}V_8 + \frac{4}{15}C + \frac{16}{15}B - \frac{4}{15}V_1 \qquad V_7 = \frac{14}{15}C - \frac{4}{15}B + \frac{1}{15}V_1 + \frac{4}{15}V_8$$

Napojení Bézierových kubik

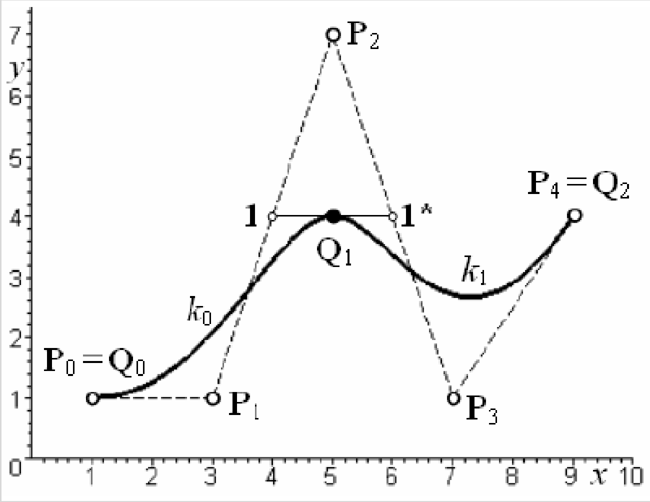
→ tedy ze souřadnic dostáváme:

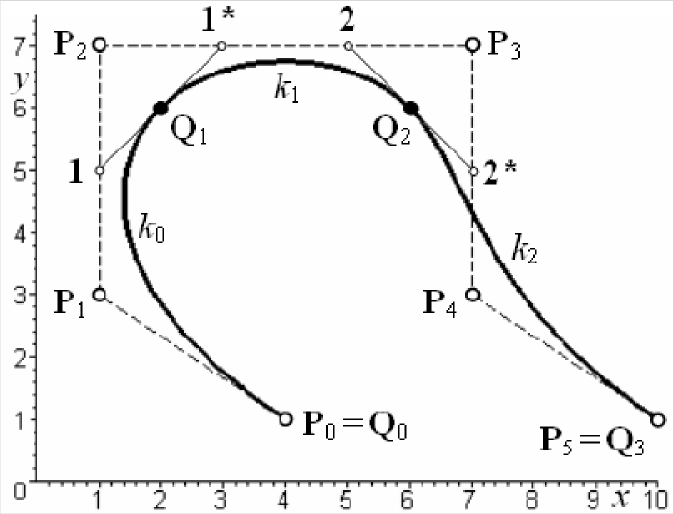
$V_2 = [1; 5]$ $V_4 = [3; 7]$ $V_5 = [5; 7]$ $V_7 = [7; 5]$

$V_1 = [1; 3]$ $V_8 = [7; 3]$

Ukotvená křivka
(= Uniformní ukotvená B-spline křivka 3. stupně)

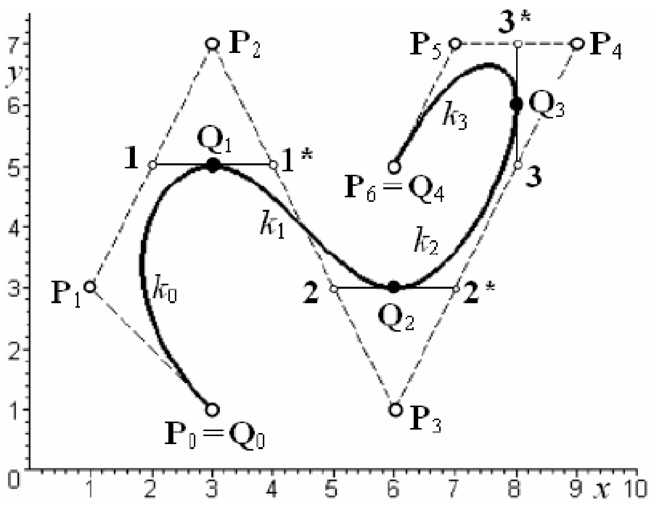
- podle počtu řídicích bodů:
  1. **4 body → tvořena jediným segmentem** (tj. Bézierovou kubikou, jejíž řídicí polygon je shodný s řídicím polygonem ukotvené křivky $P_0P_1P_2P_3$
  2. **5 bodů →** ze dvou segmentů k_0 a k_1, oba segmenty jsou Bézierovy kubiky
  3. **6 bodů →** ze tří segmentů k_0, k_1 a k_2, všechny tři segmenty jsou Bézierovy kubiky

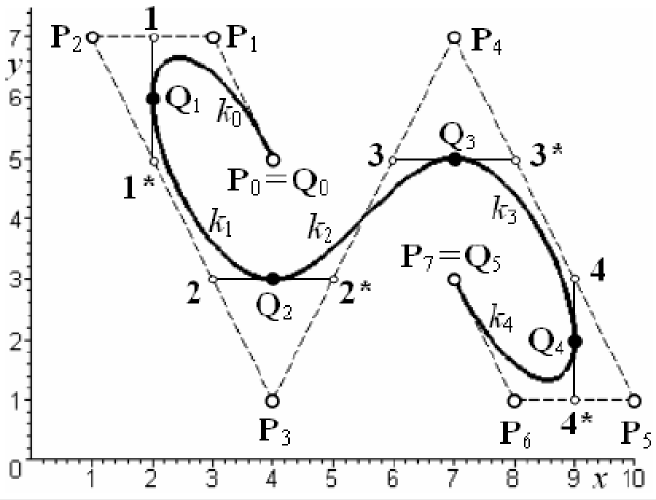




Ukotvená křivka
(= Uniformní ukotvená B-spline křivka 3. stupně)

4. **7 bodů →** ze čtyř segmentů k_0, k_1, k_2 a k_3, všechny čtyři segmenty jsou Bézierovy kubiky
5. **8 bodů →** z pěti segmentů k_0, k_1, k_2, k_3 a k_4, všechny segmenty jsou Bézierovy kubiky, prostřední segment k_2 je zároveň Coonsova kubika, jejíž řídicí polygon je $P_2P_3P_4P_5$





Konstrukce krajních bodů jednotlivých segmentů ukotvené křivky

Pro $n > 7$ je konstrukce krajních bodů jednotlivých segmentů ukotvené křivky následující:

1. Počáteční bod Q_0 je totožný s počátečním bodem P_0 řídicího polygonu ukotvené křivky.
2. Koncový bod Q_{n-2} je totožný s posledním bodem P_n řídicího polygonu ukotvené křivky.
3. První, resp. poslední rameno řídicího polygonu ukotvené křivky nedělíme vůbec.
4. Druhé, resp. předposlední rameno řídicího polygonu ukotvené křivky dělíme napůl → dostaneme bod 1, resp. $(n-3)^*$.
5. Zbývající vnitřní ramena řídicího polygonu ukotvené křivky dělíme na třetiny → dostaneme body 1^*, 2, 2^*, 3, 3^*, ...
6. Sestrojíme úsečky 11^*, 22^*, ...
7. Krajní bod Q_1, Q_2 , ... leží ve středu úsečky 11^*, 22^*, ...

Napojení ukotvených křivek

- vychází z napojení Bézierových křivek jako krajních segmentů → lze zajistit C^2 spojité napojení

  → $P_n = R_0$ …… C^0 spojité napojení

  → $P_n - P_{n-1} = R_1 - R_0$ …… C^1 spojité napojení

  → $S_1 - S_0 = 4(P_n - P_{n-1})$ …… C^2 spojité napojení

  S_0 je střed předposledního ramene $P_{n-2}P_{n-1}$ řídicího polygonu ukotvené křivky k a bod S_1 je střed druhého ramene R_1R_2 řídicího polygonu ukotvené křivky l