Počítačová grafika

4. cvičení
Bézierova plocha, de Casteljau algoritmus konstrukce bodu na okraji a v ploše.

Napojení Bézierových bikubických ploch
→ C^0, C^1, C^2 a C^3 spojitost

Bézierova plocha

- určená sítí $(m+1)\times(n+1)$ řídicích bodů $V_{i,j}$, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$, uspořádaných do mapy plochy $M=\begin{pmatrix} V_{0,0} & \cdots & V_{0,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{m,0} & \cdots & V_{m,n} \end{pmatrix}$
- ve směru parametru u do sloupců a ve směru parametru v do řádků, Bézierova plocha tuto síť aproximuje jediným plátem
- rohy sítě .... $V_{0,0}, V_{0,n}, V_{m,0}, V_{m,n}$

  rameno sítě .... $V_{0,0}V_{0,1}, V_{0,0}V_{1,0}, V_{1,0}V_{1,1}, \dots$

  oko sítě .... $V_{i,j}V_{i,j+1}V_{i+1,j}V_{i+1,j+1}$

  řádkové řídicí polygony .... $V_{i,0} \dots V_{i,n}$ $(i=1,\dots,m)$

  sloupcové řídicí polygony .... $V_{0,j} \dots V_{m,j}$ $(j=1,\dots,n)$

  okrajové řídicí polygony .... $V_{0,0} \dots V_{0,n}, V_{m,0} \dots V_{m,n}, V_{0,0} \dots V_{m,0}, V_{0,n} \dots V_{m,n}$

Bézierova plocha

- vektorová rovnice Bézierovy plochy:

$$P(u,v) = \mathbf{B}(u) \cdot M \cdot \mathbf{B}(v), (u,v) \in \langle 0;1\rangle^2$$

kde $\mathbf{B}(u) = (B_{0,m}(u), B_{1,m}(u), \dots, B_{m,m}(u))$,

$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(v) = (B_{0,n}(v), B_{1,n}(v), \dots, B_{n,n}(v))$ jsou vektory bázových funkcí - Bernsteinových polynomů

- pokud $m = n = 1$ .... bilineární (hyperbolický paraboloid)

  $m = n = 2$ .... bikvadratická

  $m = n = 3$ .... bikubické

  $m = 2, n = 3$ .... kvadraticko-kubická

Bézierova plocha - vlastnosti

- pokud M je nad jednotkovou čtvercovou mřížkou:

  $x(u,v) = m \cdot u \qquad y(u,v) = n \cdot v \quad P(u,v) = (mu, nv, z(u,v))$

- Bézierova plocha interpoluje rohy řídicí sítě a žádnými jinými řídicími body neprochází

- okraje plátu tvořeného Bézierovou plochou jsou Bézierovy křivky

- tečné vektory parametrických u-křivek (resp. v-křivek) v rozích plátu jsou m-násobkem (resp. n-násobkem) krajních ramen okrajových řídicích polygonů ve směru u (resp. ve směru v) → vychází z vlastností Bézierových křivek, tedy pro bikubickou plochu:

  $P^u(0,0) = 3(V_{1,0} - V_{0,0}) \quad P^u(1,0) = 3(V_{3,0} - V_{2,0}) \quad P^u(0,1) = 3(V_{1,3} - V_{0,3})$

  $P^u(1,1) = 3(V_{3,3} - V_{2,3}) \quad P^v(0,0) = 3(V_{0,1} - V_{0,0}) \quad P^v(1,0) = 3(V_{3,1} - V_{3,0})$

  $P^v(0,1) = 3(V_{0,3} - V_{0,2}) \quad P^v(1,1) = 3(V_{3,3} - V_{3,2})$

Bézierova plocha - vlastnosti

- zkruty v rozích plátu tvořeného Bézierovou plochou určenou sítí $(m+1)\times(n+1)$ řídicích bodů, $m,n\leq 3$, lze vyjádřit jako mn-násobek vektorového součtu vektorů určených protilehlými rameny rohových ok sítě
- tedy pro bikubickou plochu:

$$P^{uv}(0,0)=9\left[\left(V_{0,0}-V_{1,0}\right)+\left(V_{1,1}-V_{0,1}\right)\right]=9\left[\left(V_{0,0}-V_{0,1}\right)+\left(V_{1,1}-V_{1,0}\right)\right]$$

$$P^{uv}(0,1)=9\left[\left(V_{0,2}-V_{1,2}\right)+\left(V_{1,3}-V_{0,3}\right)\right]=9\left[\left(V_{0,2}-V_{0,3}\right)+\left(V_{1,3}-V_{1,2}\right)\right]$$

$$P^{uv}(1,0)=9\left[\left(V_{2,0}-V_{3,0}\right)+\left(V_{3,1}-V_{2,1}\right)\right]=9\left[\left(V_{2,0}-V_{2,1}\right)+\left(V_{3,1}-V_{3,0}\right)\right]$$

$$P^{uv}(1,1)=9\left[\left(V_{2,2}-V_{3,2}\right)+\left(V_{3,3}-V_{2,3}\right)\right]=9\left[\left(V_{2,2}-V_{2,3}\right)+\left(V_{3,3}-V_{3,2}\right)\right]$$

- je-li rohové oko sítě řídicích bodů rovnoběžník, je zkrut v tomto resp. rohu nulový → zkrut v rohu plátu udává míru odchylky plochy od tečné roviny v rohu plátu, míru odchylky rohového oka sítě od rovnoběžníku

Bézierova plocha

Je dána mapa M Bézierovy plochy $P(u,v),(u,v) \in \langle 0;1\rangle^2$,

$$M = \begin{pmatrix} (0,0,5) & (0,1,5) & (0,2,2) & (0,3,5) \\ (1,0,2) & (1,1,1) & (1,2,0) & (1,3,2) \\ (2,0,5) & (2,1,2) & (2,2,2) & (2,3,2) \end{pmatrix}.$$

Nalezněte parametrické vyjádření a vektorovou rovnici Bézierovy plochy. Dále nalezněte vektorovou rovnici tečných vektorů $P^u(u,v)$, $P^v(u,v)$ parametrických křivek a zkrutu $P^{uv}(u,v)$. Pro hodnoty parametrů $u,v = 0{,}1$ určete rohy plátu, okraje plátu, tečné vektory parametrických křivek v rozích plátu a zkruty v rozích plátu.

Bézierova plocha

- $P(u,v) = (2u, 3v, -3u^2v + 6u^2 - 12uv^3 + 18uv^2 - 6uv - 6u + 9v^3 - 9v^2 + 5)$
- $P^u(u,v) = (2{,}0, -6uv + 12u - 12v^3 + 18v^2 - 6v - 6)$
- $P^v(u,v) = (0{,}3, -3u^2 - 36uv^2 + 36uv - 6u + 27v^2 - 18v)$
- $P^{uv}(u,v) = (0{,}0, -6u - 36v^2 + 36v - 6)$
- rohy plátu: $P(0{,}0) = (0{,}0{,}5), P(0{,}0) = (0{,}3{,}5), P(0{,}0) = (2{,}0{,}5), P(0{,}0) = (2{,}3{,}2)$
- okraje plátu: $P(u,0) = (2u, 0, 6u^2 - 6u + 5), P(u,1) = (2u, 3, 3u^2 - 6u + 5),$

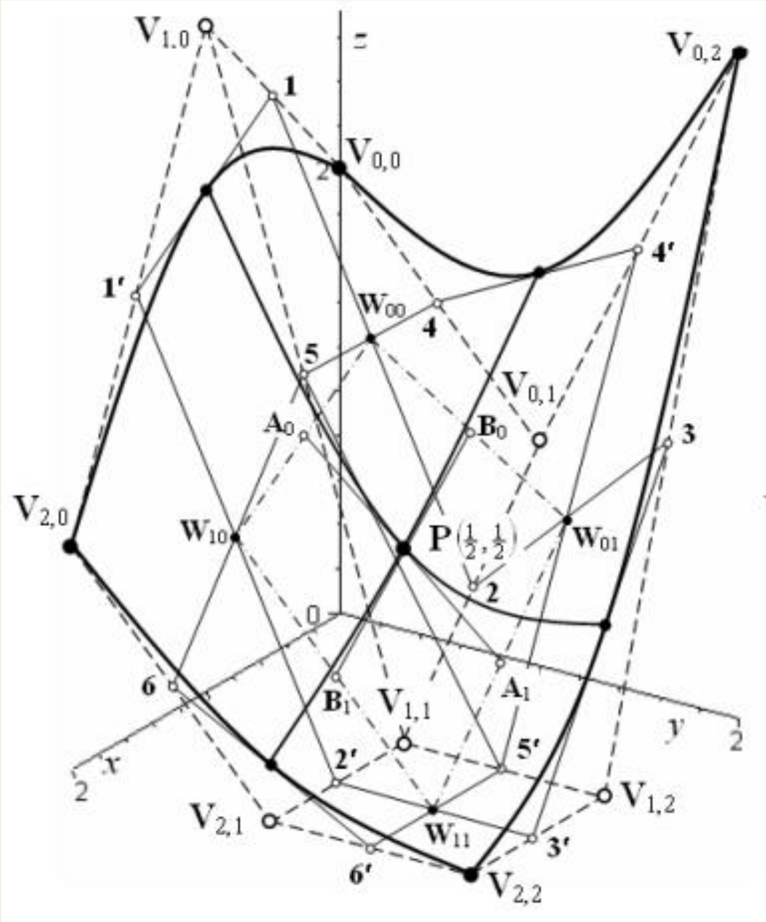
  $P(0,v) = (0{,}3v, 9v^3 - 9v^2 + 5), P(1,v) = (2{,}3v, -3v^3 + 9v^2 - 9v + 5)$

Bézierova plocha

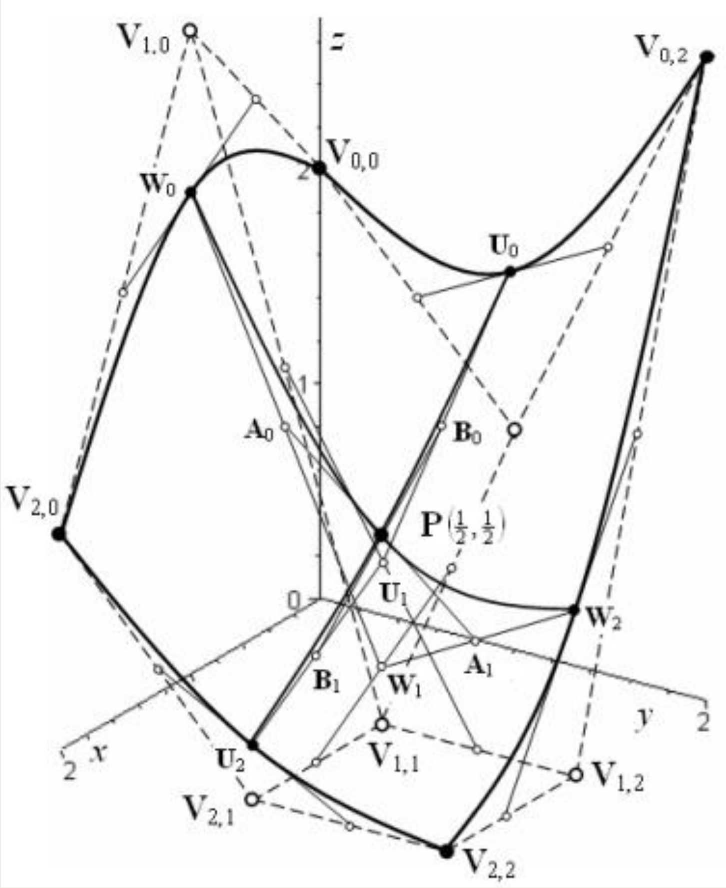
- tečné vektory parametrických u-křivek: $P^u(0,0) = (2,0,-6), P^u(0,1) = (2,0,-6),$ $P^u(1,0) = (2,0,6), P^u(1,1) = (2,0,0)$
- tečné vektory parametrických v-křivek: $P^v(0,0) = (0,3,0), P^v(0,1) = (0,3,9),$ $P^v(1,0) = (0,3,-9), P^v(1,1) = (0,3,0)$
- vektory zkrutu: $P^{uv}(0,0) = (0,0,-6), P^{uv}(0,1) = (0,0,-6), P^{uv}(1,0) = (0,0,-12),$ $P^{uv}(1,1) = (0,0,-12)$

deCasteljau algoritmus pro plochy

- postupná lineární interpolace mezi čtyřmi body
  1. zvolíme $(\alpha, \beta) \in \langle 0; 1 \rangle^2$
  2. ramena sítě ve směru u rozdělíme v poměru $\alpha: (1-\alpha)$, obdržíme body $1, 1', 2, 2', 3, 3'$
  3. ramena sítě ve směru v rozdělíme v poměru $\beta: (1-\beta)$, obdržíme body $4, 4', 5, 5', 6, 6'$
  4. rohy nového oka redukované sítě leží v následujících průsečících: $W_{0,0} = 12 \cap 45$, $W_{0,1} = 23 \cap 4'5'$, $W_{1,0} = 1'2' \cap 56$, $W_{1,1} = 2'3' \cap 5'6'$
  5. kroky 2).až 4. opakujeme vždy pro redukovanou síť řídicích bodů a končíme, jakmile dostaneme jediné oko (při čtvercové mapě), resp. jediné rameno řídicího polygonu (při obdélníkové mapě)
  6. v případě čtvercové mapy leží bod Bézierovy plochy $P(\alpha, \beta)$ v průsečíku úseček spojujících dělicí body posledního oka



deCasteljau algoritmus pro křivky



1. zvolíme $(\alpha, \beta) \in \langle 0; 1\rangle^2$
2. pro $u = \alpha$ zkonstruujeme de Casteljau algoritmem body na Bézierových křivkách určených řídicími polygony ve směru u → body W_0, W_1, W_2
3. pro $v = \beta$ zkonstruujeme de Casteljau algoritmem body na Bézierových křivce určené řídicím polygonem $W_0 W_1 W_2$, tento bod je bodem Bézierovy plochy pro $u = \alpha$, $v = \beta$, poslední rameno určuje tečnu parametrické v-křivky v bodě $P(\alpha, \beta)$
4. pro $v = \beta$ zkonstruujeme de Casteljau algoritmem body na Bézierových křivkách určených řídicími polygony ve směru v → body U_0, U_1, U_2
5. pro $u = \alpha$ zkonstruujeme de Casteljau algoritmem body na Bézierových křivce určené řídicím polygonem $U_0 U_1 U_2$, tento bod je bodem Bézierovy plochy pro $u = \alpha$, $v = \beta$, poslední rameno určuje tečnu parametrické u-křivky v bodě $P(\alpha, \beta)$

Napojení Bézierových bikubických ploch

- vychází z napojení Bézierových křivek v daném směru
→ spojitost napojení dvou Bézierových ploch ve směru v (resp. u) je dána spojitostí napojení Bézierových křivek určených řádkovými (resp. sloupcovými) řídicími polygony
- splňují-li řídicí body mapy napojované plochy s C^2 spojitostí danou polohu
→ je automaticky zajištěna totožnost zkrutů podél společného okraje
- pro C^0 spojitost: $P(1) = R(0)$ → $V_2 = W_0$
- pro C^1 spojitost: $P'(1) = R'(0)$ → $W_1 = V_2 + \overrightarrow{V_1V_2}$
- pro C^2 spojitost: $P''(1) = R''(0)$ → $W_2 = V_1 + 4 \cdot \overrightarrow{V_2V_3}$
- pro C^3 spojitost: $P'''(1) = R'''(0)$ → $W_3 = V_3 + \overrightarrow{V_0V_3} + 6 \cdot \overrightarrow{V_2V_3} - 6 \cdot \overrightarrow{V_1V_2}$

Napojení Bézierových bikubických ploch

Je dána mapa M Bézierovy plochy $P(u,v),(u,v) \in \langle 0;1\rangle^2$,

$$M = \begin{pmatrix} (0,0,0) & (0,5,5) & (0,10,5) & (0,15,0) \\ (5,0,5) & (5,5,10) & (5,10,10) & (5,15,5) \\ (10,0,5) & (10,5,10) & (10,10,10) & (10,15,5) \\ (15,0,0) & (15,5,5) & (15,10,5) & (15,15,0) \end{pmatrix}.$$

Na okraj $P_0(u)$ napojte s C^0 spojitostí další Bézierovu plochu, dále na okraj $P_0(v)$ s C^1 spojitostí, na okraj $P_1(u)$ s C^2 spojitostí, a na okraj $P_1(v)$ s C^3 spojitostí, pokud není ze spojitosti jasné, volte $z = 0$.

* v Rhinu zobrazíme Coonsovu bilineární plochu shodnou s vypočtenou Bézierovou bikubickou plochou