

# Počítačová grafika

## 6. cvičení

Coonsova bilineární plocha, přímková  
přechodová plocha a plocha hyperbolického  
paraboloidu – vektorová rovnice plochy, okrajů,  
tečných vektorů, zkrutu, určení souřadnic rohů,  
tečných vektorů a zkrutů v rozích, náčrt plochy.

# Coonsova bilineární plocha

- interpolační plocha tvořená jediným plátem, který interpoluje čtyři zadané okraje se společnými krajními body v rozích plátu
- Nechť jsou dány okraje  $P_0(u), P_1(u), P_0(v), P_1(v)$ , které mají společné krajní body v rozích plátu  $P_{0,0}, P_{0,1}, P_{1,0}, P_{1,1}$ . Vektorová rovnice Coonsovy bilineární plochy je

$$P(u, v) = (1 - u, 1, u) \cdot \begin{pmatrix} -P_{0,0} & P_0(v) & -P_{0,1} \\ P_0(u) & 0 & P_1(u) \\ -P_{1,0} & P_1(v) & -P_{1,1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - v \\ 1 \\ v \end{pmatrix}, (u, v) \in \langle 0, 1 \rangle^2$$

# Vlastnosti Coonsovy bilineární plochy

- interpoluje všechny čtyři zadané okraje
- interpoluje rohy plátu
- přímková přechodová plocha určená okraji ve směru  $u$  (resp.  $v$ ) je totožná s Coonsovou bilineární plochou, jejíž zadané okraje ve směru  $v$  (resp.  $u$ ) jsou úsečky
- plocha hyperbolického paraboloidu je totožná s Coonsovou bilineární plochou, jejíž všechny čtyři zadané okraje jsou úsečky
- pouze pro rovinné okrajové křivky a rohy plátu umístíme vždy nad vrcholy jednotkového čtverce v rovině  $(x, y)$  lze vyjádřit rovnici plochy ve tvaru

$$P(u, v) = (x, y, z(x, y))$$

# Vlastnosti Coonsovy bilineární plochy

- pokud  $S(u, v) = (1 - v) \cdot P_0(u) + v \cdot P_1(u)$  je přímkovou přechodovou plochu určenou okraji Coonsovy bilineární plochy ve směru  $u$
- pokud  $T(u, v) = (1 - u) \cdot P_0(v) + u \cdot P_1(v)$  je přímkovou přechodovou plochu určenou okraji Coonsovy bilineární plochy ve směru  $v$
- pokud  $R(u, v) = (1 - u) \cdot (1 - v) \cdot P_{0,0} + (1 - u) \cdot v \cdot P_{0,1} + u \cdot (1 - v) \cdot P_{1,0} + u \cdot v \cdot P_{1,1}$  je plocha hyperbolického paraboloidu určená rohy Coonsovy bilineární plochy

→ Vektorová rovnice Coonsovy bilineární plochy je

$$P(u, v) = S(u, v) + T(u, v) - R(u, v)$$

# Vlastnosti Coonsovy bilineární plochy

- pro Coonsovu bilineární plochu  $P(u, v)$  určenou okrajovými Bézierovými kubikami, jejichž řídicí polygony jsou  $P_0(u) : V_{0,0}, V_{1,0}, V_{2,0}, V_{3,0}$ ,  $P_1(u) : V_{0,3}, V_{1,3}, V_{2,3}, V_{3,3}$ ,  $P_0(v) : V_{0,0}, V_{0,1}, V_{0,2}, V_{0,3}$ ,  $P_1(v) : V_{3,0}, V_{3,1}, V_{3,2}, V_{3,3} \rightarrow$  Coonsova bilineární plocha je totožná s Bézierovou bikubickou plochou určenou sítí řídicích bodů, pro jejíž vnitřní body platí:

$$V_{1,1} = V_{0,0} + \frac{1}{3} \cdot P^u(0,0) + \frac{1}{3} \cdot P^v(0,0) + \frac{1}{9} \cdot P^{uv}(0,0)$$

$$V_{1,2} = V_{0,3} + \frac{1}{3} \cdot P^u(0,1) - \frac{1}{3} \cdot P^v(0,1) - \frac{1}{9} \cdot P^{uv}(0,1)$$

$$V_{2,1} = V_{3,0} - \frac{1}{3} \cdot P^u(1,0) + \frac{1}{3} \cdot P^v(1,0) - \frac{1}{9} \cdot P^{uv}(1,0)$$

$$V_{2,2} = V_{3,3} - \frac{1}{3} \cdot P^u(1,1) - \frac{1}{3} \cdot P^v(1,1) + \frac{1}{9} \cdot P^{uv}(1,1)$$

# Pláty z Coonsovy bilineární plochy

- automaticky zajišťuje pouze  $C^0$  spojitost podél napojovaného okraje
- spojíme-li dvě Bézierovy kubiky do jediné křivky na každém okraji, můžeme tyto segmentované křivky považovat za okraje nového plátu z Coonsovy bilineární plochy

# Plocha hyperbolického paraboloidu

- interpolační plocha tvořená jediným plátem, který je lineární interpolací mezi čtyřmi zadanými body - rohy plátu
- Necht' jsou dány rohy plátu  $P_0(u), P_1(u), P_0(v), P_1(v)$ . Potom je plocha hyperbolického paraboloidu tvořena jediným plátem, jehož vektorová rovnice je následující

$$P(u, v) = (1 - u) \cdot (1 - v) \cdot P_{0,0} + (1 - u) \cdot v \cdot P_{0,1} + u \cdot (1 - v) \cdot P_{1,0} + u \cdot v \cdot P_{1,1}, (u, v) \in \langle 0, 1 \rangle^2$$

Bázové funkce jsou dvouparametrické polynomy, které dostaneme vynásobením jednoparametrických lineárních polynomů.

# Vlastnosti hyperbolického paraboloidu

- interpoluje všechny čtyři zadané okraje
- parametrické křivky obou soustav jsou úsečky, proto jsou i všechny čtyři okraje úsečky
- plocha hyperbolického paraboloidu je totožná s přímkovou přechodovou plochou, jsou-li zadané okraje přímkové přechodové plochy úsečky
- plátování - nehodí k vytváření segmentovaných ploch složitějšího tvaru zadaných sítí definičních bodů, neboť v obou směrech umožňuje pouze  $C^0$  spojitě plátování

# Přímková přechodová plocha

- Nechť jsou dány okraje ve směru  $u$ , které jsou tvořeny jednosegmentovými křivkami  $P_0(u), P_1(u)$ . Potom je přímková přechodová plocha určená okraji ve směru  $u$  tvořena jediným plátem s vektorovou rovnicí  $P(u, v) = (1 - v) \cdot P_0(u) + v \cdot P_1(u)$ ,  $(u, v) \in \langle 0, 1 \rangle^2$ . Zadané okraje jsou funkcí  $u$ , proto jsou bazové funkce jednoparametrické lineární polynomy proměnné  $v : 1 - v$  a  $v$ .
- Podobně, nechť jsou dány okraje ve směru  $v$ , které jsou tvořeny jednosegmentovými křivkami  $P_0(v), P_1(v)$ . Potom je přímková přechodová plocha určená okraji ve směru  $v$  tvořena jediným plátem s vektorovou rovnicí  $P(u, v) = (1 - u) \cdot P_0(v) + u \cdot P_1(v)$ ,  $(u, v) \in \langle 0, 1 \rangle^2$ . Zadané okraje jsou funkcí  $v$ , proto jsou bazové funkce jednoparametrické lineární polynomy proměnné  $u : 1 - u$  a  $u$ .

# Vlastnosti přímkové přechodové plochy

- interpoluje zadané okraje
- Okraje ve směru  $v$  přímkové přechodové plochy určené okraji ve směru  $u$  jsou úsečky.
- Okraje ve směru  $u$  přímkové přechodové plochy určené okraji ve směru  $v$  jsou úsečky.
- plátování - pomocí plátů z přímkové přechodové plochy určené okraji ve směru  $u$  (resp.  $v$ ) lze zajistit pouze  $C^0$  spojitě plátování ve směru  $v$  (resp.  $u$ ), spojitost plátování ve směru  $u$  (resp.  $v$ ) je závislá na typu souřadnicových funkcí daných okrajů ve směru  $u$  (resp.  $v$ )

# Coonsova bilineární plocha - příklad 1

- Coonsova bilineární plocha je dána okraji:

$$P_0(u) = (2u, 0, -u^2 + 2), P_1(u) = (2u, 2, 2u^2 - 4u + 2)$$

$$P_0(v) = (0, 2v, 4v^2 - 4v + 2), P_1(v) = (2, 2v, v^2 - 2v + 1)$$

Nalezněte parametrické vyjádření a vektorovou rovnici Coonsovy bilineární plochy, vektorovou rovnici tečných vektorů, parametrických křivek a zkrutu, rohy plátu, okraje plátu, tečné vektory parametrických křivek v rozích plátu a zkruty v rozích plátu.

# Coonsova bilineární plocha - příklad 1

- $P_0(u) = (2u, 0, -u^2 + 2), P_1(u) = (2u, 2, 2u^2 - 4u + 2)$   
 $P_0(v) = (0, 2v, 4v^2 - 4v + 2), P_1(v) = (2, 2v, v^2 - 2v + 1)$   
 $\rightarrow x(u, v) = 2u \qquad y(u, v) = 2v$   
 $z(u, v) = 3u^2v - u^2 - 3uv^2 - uv + 4v^2 - 4v + 2$   
 $\rightarrow P(0,0) = (0,0,2), P(0,1) = (0,2,2), P(1,0) = (2,0,1), P(1,1) = (2,2,0)$   
 $\rightarrow P(u, 0) = (2u, 0, -u^2 + 2), P(u, 1) = (2u, 2, 2u^2 - 4u + 2)$   
 $P(0, v) = (0, 2v, 4v^2 - 4v + 2), P(1, v) = (2, 2v, v^2 - 2u + 1)$   
 $\rightarrow P^u(u, v) = (2, 0, 6uv - 2u - 3v^2 - v)$   
 $P^v(u, v) = (2, 0, 3u^2 - 6uv - u + 8v - 4)$

# Coonsova bilineární plocha - příklad 1

$$\rightarrow P^u(0,0) = (2,0,0), P^u(0,1) = (2,0,-4), P^u(1,0) = (2,0,-2),$$

$$P^u(1,1) = (2,0,0)$$

$$\rightarrow P^v(0,0) = (0,2,-4), P^v(0,1) = (0,2,4), P^v(1,0) = (0,2,-2),$$

$$P^v(1,1) = (0,2,0)$$

$$\rightarrow P^{uv}(u,v) = (0,0,6u - 6v - 1)$$

$$\rightarrow P^{uv}(0,0) = (0,0,-1), P^{uv}(0,1) = (0,0,-7), P^{uv}(1,0) = (0,0,5),$$

$$P^{uv}(1,1) = (0,0,-1)$$

# Coonsova bilineární plocha - příklad 2

- Coonsova bilineární plocha je určena okrajovými Bézierovými kubikami dané řídícími polygony  $V_{0,0} = (0,0,15)$ ,  $V_{0,1} = (0,5,0)$ ,  $V_{0,2} = (0,10,15)$ ,  $V_{0,3} = (0,15,0)$ ,  $V_{1,0} = (5,0,10)$ ,  $V_{2,0} = (10,0,20)$ ,  $V_{3,0} = (15,0,0)$ ,  $V_{3,1} = (15,5,0)$ ,  $V_{3,2} = (15,10,0)$ ,  $V_{3,3} = (15,15,0)$ ,  $V_{1,3} = (5,15,0)$ ,  $V_{2,3} = (10,15,0)$

Nalezněte vektorové rovnice okrajů a Coonsovy bilineární plochy (pomocí přímkových přechodových ploch a hyperbolického paraboloidu). Dále určete bod  $P\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$  a rovnice parametrických křivek v tomto bodě.

## Coonsova bilineární plocha - příklad 2

- $V_{0,0} = (0,0,15), V_{0,1} = (0,5,0), V_{0,2} = (0,10,15), V_{0,3} = (0,15,0),$   
 $V_{1,0} = (5,0,10), V_{2,0} = (10,0,20), V_{3,0} = (15,0,0), V_{3,1} = (15,5,0),$   
 $V_{3,2} = (15,10,0), V_{3,3} = (15,15,0), V_{1,3} = (5,15,0), V_{2,3} = (10,15,0)$

$$\rightarrow P_0(u) = (15 \cdot u, 0, -45 \cdot u^3 + 45 \cdot u^2 - 15 \cdot u + 15)$$

$$P_1(u) = (15 \cdot u, 15, 0)$$

$$P_1(v) = (15, 15 \cdot v, 0)$$

$$P_0(v) = (0, 15 \cdot v, -60 \cdot v^3 + 90 \cdot v^2 - 45 \cdot v + 15)$$

# Coonsova bilineární plocha - příklad 2

přímková přechodová plocha daná okraji ve směru  $u$ :

$$\rightarrow R_0(u) = (15 \cdot u, 0, -45 \cdot u^3 + 45 \cdot u^2 - 15 \cdot u + 15),$$

$$R_1(u) = (15 \cdot u, 15, 0), R_0(v) = (0, 15 \cdot v, 15 - 15 \cdot v),$$

$$R_1(v) = (15, 15 \cdot v, 0)$$

$$\rightarrow R(u, v) = (15 \cdot u, 15 \cdot v, 15 \cdot uv - 15 \cdot v - 15 \cdot u - 45 \cdot u^2v + 45 \cdot u^3v + 45 \cdot u^2 - 45 \cdot u^3 + 15)$$

# Coonsova bilineární plocha - příklad 2

přímková přechodová plocha daná okraji ve směru  $v$ :

$$\rightarrow S_0(u) = (15 \cdot u, 0, -45 \cdot u^3 + 45 \cdot u^2 - 15 \cdot u + 15),$$

$$S_1(u) = (15 \cdot u, 15, 0), S_0(v) = (0, 15 \cdot v, 15 - 15 \cdot v),$$

$$S_1(v) = (15, 15 \cdot v, 0)$$

$$\rightarrow S(u, v) = (15 \cdot u, 15 \cdot v, 45 \cdot uv - 45 \cdot v - 15 \cdot u - 90 \cdot uv^2 + 60 \cdot uv^3 + 90 \cdot v^2 - 60 \cdot v^3 + 15)$$

# Coonsova bilineární plocha - příklad 2

plocha hyperbolického paraboloidu:

$$\rightarrow T_0(u) = (15 \cdot u, 0, 15 - 15 \cdot u), T_1(u) = (15 \cdot u, 15, 0),$$

$$T_0(v) = (0, 15 \cdot v, 15 - 15 \cdot v), T_1(v) = (15, 15 \cdot v, 0)$$

$$\rightarrow T(u, v) = (15 \cdot u, 15 \cdot v, 15 \cdot uv - 15 \cdot v - 15 \cdot u + 15)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow P(u, v) = R(u, v) + S(u, v) - T(u, v) = & (15 \cdot u, 15 \cdot v, 45 \cdot u^3v - 45 \cdot u^3 - \\ & - 45 \cdot u^2v + 45 \cdot u^2 + 60 \cdot uv^3 - 90 \cdot uv^2 + 45 \cdot uv - 15 \cdot u - 60 \cdot v^3 + \\ & + 90 \cdot v^2 - 45 \cdot v + 15) \end{aligned}$$

# Coonsova bilineární plocha - příklad 2

rovnice parametrických křivek v bodě  $P\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ :

$$\rightarrow P\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left[5, 10, \frac{160}{27}\right]$$

$$\rightarrow P\left(u, \frac{2}{3}\right) = \left(15 \cdot u, 10, -15 \cdot u^3 + 15 \cdot u^2 - \frac{65}{9}u + \frac{65}{9}\right)$$

$$P\left(\frac{1}{3}, v\right) = \left(5, 15 \cdot v, -40 \cdot v^3 + 60 \cdot v^2 - \frac{100}{3}v + \frac{40}{3}\right)$$