

Plošný integrál

Výpočet plošného integrálu skalární funkce a vektorové funkce na jednoduché hladké ploše tvaru (části) grafu funkce dvou proměnných a na ploše, jejíž parametrizace je zadána.

Jednoduché příklady na použití Gaussovy-Ostrogradského věty. Úlohy s geometrickou a fyzikální aplikací.

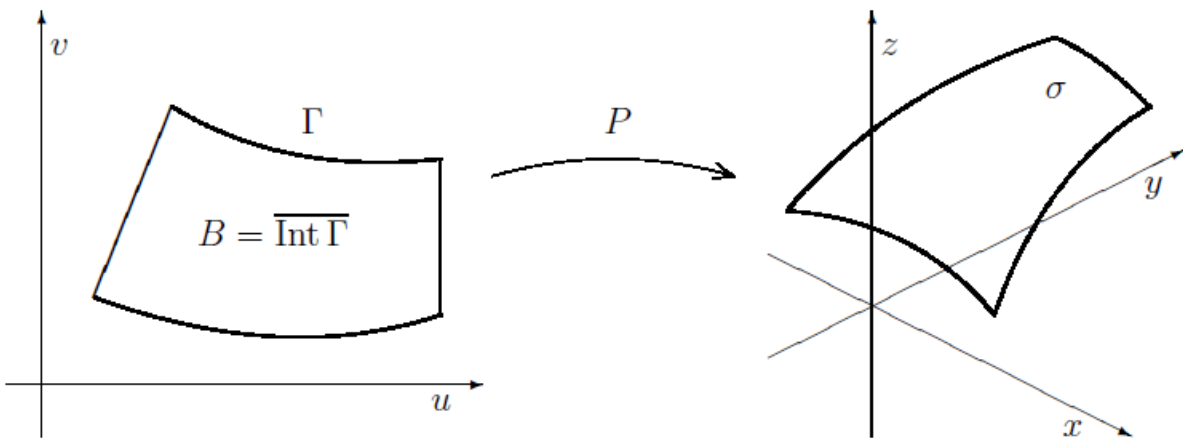


Jednoduchá hladká plocha

Nechť Γ (gama) je uzavřená jednoduchá p.č. hladká křivka v E_2 a $B = \Gamma \cup \text{Int } \Gamma$. Nechť P je spojitě zobrazení B do E_3 . Předpokládejme, že

- a) P je prosté zobrazení na B ,
- b) P má spojitě a omezené parciální derivace P^u a P^v v $B \setminus K$, kde K je nejvýše konečná množina bodů, nacházejících se na hranici Γ množiny B ,
- c) $P^u \times P^v \neq \vec{0}$ v $B \setminus K$.

Množinu všech bodů $P(u, v)$ pro $[u, v] \in B$ (tj. obor hodnot zobrazení P) pak nazýváme jednoduchá hladká plocha v E_k . Zobrazení P nazýváme parametrizace.



Orientace jednoduché hladké plochy, normálový vektor

Předpokládejme, že P je parametrizace jednoduché hladké plochy σ , definovaná v množině $B \subset E_2$. Označme $X = P(u, v)$ pro $[u, v] \in B \setminus K$. Vektory $P^u(u, v)$ a $P^v(u, v)$ jsou v bodě X tečné k ploše σ a díky podmínce výše jsou lineárně nezávislé. Jejich vektorový součin je kolmý k oběma z nich, tudíž je také kolmý k ploše. Dělíme-li vektorový součin jeho velikostí, získáme jednotkový vektor, který je v bodě X kolmý k ploše.

Plochu σ můžeme orientovat tak, že na ploše definujeme normálový vektor $\mathbf{n}$ (tj. jednotkový vektor, kolmý k ploše, který udává orientaci plochy σ) buď rovnicí

$$\mathbf{n} = \frac{P^u(u, v) \times P^v(u, v)}{\|P^u(u, v) \times P^v(u, v)\|} \text{ pro všechna } [u, v] \in B \setminus K, \text{ nebo rovnicí } \mathbf{n} = -\frac{P^u(u, v) \times P^v(u, v)}{\|P^u(u, v) \times P^v(u, v)\|} \text{ pro všechna}$$

$[u, v] \in B \setminus K$. Je-li normálový vektor $\mathbf{n}$ dán první rovnicí, říkáme, že jednoduchá hladká plocha σ je orientovaná souhlasně s parametrizací P . V opačném případě, kdy vektor $\mathbf{n}$ je definován druhou rovnicí, říkáme, že jednoduchá hladká plocha je orientována nesouhlasně s parametrizací P .

Říkáme, že jednoduchá hladká plocha σ je orientována souhlasně se svým okrajem C , pokud při oběhu po křivce C ve směru její orientace máme tu stranu plochy σ , na kterou míří normálový vektor $\mathbf{n}$, po levé ruce.

Plošný integrál skalární funkce (plošný integrál 1. druhu)

Nechť σ je jednoduchá hladká plocha v E_3 a P je její parametrizace definovaná na množině $B \subset E_2$ do E_3 . Nechť f je funkce, která je definovaná a omezená na ploše σ . Existuje-li dvojný integrál $\iint_B f(P(u, v)) \|P^u(u, v) \times P^v(u, v)\| du dv$, pak o funkci f říkáme, že je integrovatelná na ploše σ . Plošný integrál funkce f na ploše σ pak označujeme $\iint_\sigma f dp$ a definujeme jej rovnicí

$$\iint_\sigma f dp = \iint_B f(P(u, v)) \|P^u(u, v) \times P^v(u, v)\| du dv$$

Integrovatelnost funkce f na jednoduché hladké ploše σ a plošný integrál f na σ jsou definovány pomocí parametrizace P plochy σ . Jednoduchá hladká plocha σ však má nekonečně mnoho různých parametrizací. Lze však dokázat, že jak existence, tak hodnota plošného integrálu f na σ nezávisí na volbě parametrizace plochy σ .

Plošný integrál skalární funkce na jednoduché p.č. hladké ploše

Nechť σ je jednoduchá p.č. hladká plocha v E_3 , která je složena z jednoduchých hladkých ploch $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Nechť f je funkce, která je omezená na ploše σ . Je-li f integrovatelná funkce na každé z ploch $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, pak říkáme, že je integrovatelná na ploše σ . Plošný integrál funkce f na ploše σ pak definujeme rovnicí

$$\iint_{\sigma} f \, dp = \sum_{i=1}^n \iint_{\sigma_i} f \, dp$$

Je-li σ jednoduchá p.č. hladká plocha, pak číslo, které je hodnotou integrálu $\iint_{\sigma} dp$, nazýváme obsahem plochy σ .

Postačující podmínka pro existenci plošného integrálu skalární funkce:

Je-li f spojitá funkce na ploše σ , pak je na σ integrovatelná (tj. plošný integrál $\iint_{\sigma} f \, dp$ existuje).
Resp. Je-li σ jednoduchá p.č. hladká plocha a funkce f je spojitá na každé z hladkých částí plochy σ , pak f je integrovatelná na σ .

Fyzikální aplikace plošného integrálu skalární funkce

- **hmotnost tělesa:** $m = \iiint_{\sigma} \rho(x, y, z) dp$,
- **statický moment:**
vzhledem k rovině xy : $m_{xy} = \iiint_{\sigma} z \cdot \rho(x, y, z) dp$
vzhledem k rovině xz : $m_{xz} = \iiint_{\sigma} y \cdot \rho(x, y, z) dp$
vzhledem k rovině yz : $m_{yz} = \iiint_{\sigma} x \cdot \rho(x, y, z) dp$
- **těžiště:** $x_T = \frac{m_{yz}}{m}$, $y_T = \frac{m_{xz}}{m}$, $z_T = \frac{m_{xy}}{m}$
- **moment setrvačnosti:**
vzhledem k rovině xy : $J_{xy} = \iiint_{\sigma} z^2 \cdot \rho(x, y, z) dp$ || vzhledem k ose x : $J_x = \iiint_{\sigma} (y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dp$
vzhledem k rovině xz : $J_{xz} = \iiint_{\sigma} y^2 \cdot \rho(x, y, z) dp$ || vzhledem k ose y : $J_y = \iiint_{\sigma} (x^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dp$
vzhledem k rovině yz : $J_{yz} = \iiint_{\sigma} x^2 \cdot \rho(x, y, z) dp$ || vzhledem k ose z : $J_z = \iiint_{\sigma} (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z) dp$
vzhledem k počátku O : $J_O = \iiint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dp$

Plošný integrál vektorové funkce (plošný integrál 2. druhu, tok vektorového pole plochou)

Nechť σ je jednoduchá p.č. hladká plocha v E_3 a f je vektorová funkce, která je definovaná a omezená na ploše σ . Říkáme, že vektorová funkce f je integrovatelná na ploše σ , je-li skalární funkce $f \cdot \mathbf{n}$ integrovatelná na σ . Integrál $\iint_B f \cdot \mathbf{n} dp$ nazýváme plošný integrál vektorové funkce f říkáme, že je integrovatelná na ploše σ . Plošný integrál funkce f na ploše σ a označujeme jej kratším způsobem $\iint_\sigma f \cdot d\mathbf{p}$.

Plošný integrál vektorové funkce (= vektorového pole) f vyjadřuje tok vektorového pole f uvažovanou plochou. Tento integrál se často nazývá plošný integrál 2. druhu.

Normálový vektor $\mathbf{n}$ nemusí existovat v těch bodech jednoduché p.č. hladké plochy σ , ve kterých se stýkají jednotlivé hladké plochy, ze kterých je p.č. hladká plocha σ složena. Takové body tvoří nejvýše konečně mnoho jednoduchých p.č. hladkých křivek a existence ani hodnota plošného integrálu na chování integrované funkce (pokud tato je omezená) na konečně mnoha křivkách nezávisí.

Plošný integrál vektorové funkce na jednoduché p.č. hladké ploše

Je-li vektorová funkce f integrovatelná na ploše σ , pak je integrovatelná i na ploše $-\sigma$ a

$$\iint_{-\sigma} f \cdot d\mathbf{p} = - \iint_{\sigma} f \cdot d\mathbf{p}.$$

Plošný integrál vektorové funkce $f = (U, V, W)$ na jednoduché hladké ploše σ můžeme vypočítat pomocí parametrizace plochy σ . Předpokládejme, že P je taková parametrizace, definovaná na množině $B \subset E_2$. Předpokládejme dále, že plocha σ je orientovaná souhlasně s parametrizací P . Normálový vektor v každém bodě $P(u, v)$ plochy σ , který odpovídá $[u, v] \in B \setminus K$ (tedy až na některé body na okraji plochy σ), lze vyjádřit: $\mathbf{n} = \frac{P^u \times P^v}{\|P^u \times P^v\|}$. Potom platí:

$$\iint_{\sigma} f \cdot d\mathbf{p} = \iint_B f(P(u, v)) \cdot (P^u(u, v) \times P^v(u, v)) d\mathbf{p}$$

Divergence a rotace vektorového pole

Symbolem ∇ označujeme vektorový operátor, nazývaný operátor *nabla*, jehož souřadnicemi jsou postupně parciální derivace podle x, y a z : $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$.

* například $\text{grad} \varphi = \nabla \varphi = (\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z})$

Nechť $\mathbf{f} = (U, V, W)$ je vektorové pole v oblasti $D \subset E_3$. Divergencí $\mathbf{f}$ nazýváme skalární pole, které označujeme $\text{div } \mathbf{f}$ a které definujeme rovnicí

$$\text{div } \mathbf{f} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$$

(ve všech bodech $[x, y, z] \in D$, ve kterých má pravá strana smysl).

* Pomocí operátoru *nabla* můžeme divergenci zapsat: $\text{div } \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f}$.

* V bodech, ve kterých je $\text{div } \mathbf{f} > 0$, má tudíž pole $\mathbf{f}$ zdroje kladné intenzity (tzv. zřídla).

Naopak, v bodech, ve kterých je $\text{div } \mathbf{f} < 0$, má pole $\mathbf{f}$ zdroje záporné intenzity (tzv. propady nebo nory).

Divergence a rotace vektorového pole

Nechť $\mathbf{f} = (U, V, W)$ je vektorové pole v oblasti $D \subset E_3$. Rotací $\mathbf{f}$ nazýváme vektorové pole, které označujeme $\text{rot } \mathbf{f}$ a které definujeme rovnicí

$$\text{rot } \mathbf{f} = \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

(ve všech bodech $[x, y, z] \in D$, ve kterých má pravá strana smysl).

- * Pomocí operátoru nabla lze rotaci vyjádřit: $\text{rot } \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U & V & W \end{vmatrix}$
- $\text{rot } \mathbf{f}(A)$ je vektor, jehož skalární součin s jakýmkoliv jednotkovým vektorem $\mathbf{n}$ vyjadřuje míru vířivosti pole $\mathbf{f}$ v rovině, kolmé k $\mathbf{n}$
- pole $\mathbf{f}$ má v bodě A největší vířivost v rovině, která je na vektor $\text{rot } \mathbf{f}(A)$ kolmá

Gaussova-Ostrogradského věta

Předpokládejme, že

- a) vektorová funkce f má spojitě parciální derivace v oblasti $D \subset E_3$,
- b) σ je uzavřená p.č. hladká plocha v D , orientovaná směrem vně a taková, že $\text{Int } \sigma \subset D$.

Pak platí:

$$\iint_{\sigma} f \cdot d\mathbf{p} = \iiint_{\text{Int } \sigma} \text{div } \mathbf{f} dx dy dz$$