

**Opakovací kurz středoškolské matematiky  
do bakalářského studia na Strojní fakultě ČVUT v Praze**

František Mráz  
Ústav technické matematiky

**I. Mocniny, odmocniny, algebraické výrazy**

Upravte (zjednodušte), případně určete číselnou hodnotu. U výrazů udejte, kdy mají smysl.

1.  $4n^2 \cdot 3(-n^3)(-2n^4)$       2.  $((-2)^{-1})^{-6}$       3.  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-14} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$   
 4.  $\left(\frac{2ab}{25x^2y^2}\right)^{-3} : \left(\frac{4a}{5xy^2}\right)^{-2}$       5.  $\frac{ax+bx}{ax-bx}$       6.  $\frac{x-1}{x^2-x}$   
 7.  $8m - [6m - (2n + 4m)] + 4n$       8.  $3x - 4y - (-5y - 6x) - (7x + 8y)$   
 9.  $(2x + 2)x - (x^2 + 2x + 4)$       10.  $4n^2 - (2n - 3)^2$   
 11.  $\frac{15x + 4y}{12} - \frac{3y - 22x}{9}$       12.  $\left(\frac{1}{b+1} - \frac{2b}{b^2-1}\right) : \frac{b}{1-b}$   
 13.  $(p+q) : \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$       14.  $\left(\frac{x-1}{x-2} - \frac{x}{x-1}\right) \left(x - \frac{3x}{x+1}\right)$   
 15.  $\frac{\frac{15}{32}}{-\frac{6}{8}}$       16.  $\frac{\frac{6x}{yz}}{\frac{8xz}{y}}$       17.      18.  $\left(\frac{-16}{5}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{\frac{64}{25}}{2 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}}$

**Výsledky kapitoly I**

1.  $24n^9$       2. 64      3.  $\left(\frac{4}{3}\right)^4$       4.  $\frac{1250x^4y^2}{ab^3}$ ,  $abxy \neq 0$       5.  $\frac{a+b}{a-b}$ ,  $x \neq 0, a-b \neq 0$   
 6.  $\frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0, x \neq 1$       7.  $6m + 6n$       8.  $2x - 7y$       9.  $x^2 - 4$       10.  $12n - 9$       11.  $\frac{133x}{36}$   
 12.  $\frac{1}{b}$ ,  $b \neq 0, b \neq \pm 1$       13.  $pq$ ,  $p \neq 0, q \neq 0, p+q \neq 0$       14.  $\frac{x}{x^2-1}$ ,  $x \neq \pm 1, x \neq 2$   
 15.  $-\frac{5}{8}$       16.  $\frac{3}{4z^2}$ ,  $xyz \neq 0$       17.  $\frac{b-4}{b-5}$ ,  $b \neq 3, b \neq 5, b \neq 6$       18. 0

**II. Rovnice lineární, kvadratické, kubické, s absolutní hodnotou**

Řešte dané rovnice a proveďte zkoušku.

19.  $3(4-x) - 6(3-2x) = 2x - 27$       20.  $\frac{t}{2} - \frac{t+5}{3} = \frac{t-3}{2} - \frac{t-2}{3}$   
 21.  $\frac{y+5}{10} - \frac{y-4}{8} = 1$       22.  $\frac{25x+6}{15} - (x-1) = \frac{2x}{3} + \frac{7}{5}$   
 23.  $5 + \frac{3}{3u-12} = \frac{5-u}{u-4}$       24.  $|2x-7| + |2-x| = 3$

Řešte dané rovnice a proveďte zkoušku:

25.  $x^2 + 5x = 0$       26.  $(3x+1)(x-\sqrt{5}) = 0$       27.  $(3-\lambda)^2 + 4 = 0$   
 28.  $x^3 - 4x^2 + 5x = 0$       29.  $3x^2 \cdot x - (x^3 + 16) = 0$       30.  $(3-\lambda)(3+\lambda) - 4 = 0$   
 31.  $(1-\lambda)(-1-\lambda) + 5 = 0$       32.  $(2x+3)x - (x^2 + 3x + 9) = 0$

**Výsledky kapitoly II**

19.  $x = -3$       20. Nemá řešení      21.  $y = 0$       22.  $x \in \mathbb{R}$       23. Nemá řešení, neboť  $4 \notin D$   
 24.  $x_1 = 2, x_2 = 4$       25.  $x_1 = 0, x_2 = -5$       26.  $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \sqrt{5}$       27.  $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$   
 28.  $x_1 = 0, x_{2,3} = 2 \pm i$       29.  $x = 2$       30.  $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$       31.  $\lambda_{1,2} = \pm 2i$       32.  $x_{1,2} = \pm 3$

### III. Funkce

Předpokládá se znalost definičních oborů, grafů a základních vlastností "elementárních" funkcí ( funkce mocninná, lineární, kvadratická, absolutní hodnota, lineární lomená, odmocnina, exponenciální, logaritmická, goniometrické)

Určete definiční obor dané funkce  $y = f(x)$ :

$$\begin{array}{llll} \mathbf{33.} & y = 3x - 5 & \mathbf{34.} & y = 4x^7 - 5x^3 + \frac{3}{2}x - 8 & \mathbf{35.} & y = \frac{x^3 - 8}{x} & \mathbf{36.} & y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} \\ \mathbf{37.} & y = \frac{2x - 3}{x^2 + 2x - 3} & \mathbf{38.} & y = \sqrt{5 - 3x} & \mathbf{39.} & y = \frac{x - 2}{\sqrt{x + 5}} & \mathbf{40.} & y = \frac{3x}{\sqrt{2 - x^2}} \\ \mathbf{41.} & y = 100x^{-7} & \mathbf{42.} & y = (x + 2)^{1/x} & \mathbf{43.} & y = \sqrt{1 - |x|} & \mathbf{44.} & y = \sqrt{\sin x} \\ \mathbf{45.} & y = \ln(x^2 - 1) & \mathbf{46.} & y = \ln(x^2 + 2x + 3) & \mathbf{47.} & y = \frac{x}{\ln x} \end{array}$$

Určete hodnoty logaritmické funkce:

$$\mathbf{48.} \ln 1 \quad \mathbf{49.} \ln 0 \quad \mathbf{50.} \ln \quad \mathbf{51.} \ln \sqrt[3]{\quad} \quad \mathbf{52.} \ln \left( \frac{1}{2} \right) \quad \mathbf{53.} \ln(-2)$$

Určete logaritmus daného výrazu při daném základu  $z$

$$\mathbf{54.} V = \frac{1}{3} \pi r^2 v, z = 5 \quad \mathbf{55.} y = \sqrt[3]{\frac{b^2}{4}}, z = 4 \quad \mathbf{56.} T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}, z = e \quad \mathbf{57.} y = \frac{a^2}{x\sqrt{y}}, z = a$$

Určete výraz  $V$ , je-li dán jeho logaritmus

$$\begin{array}{ll} \mathbf{58.} & \ln V = \ln 4 - \ln 3 + \ln \pi + 3 \ln r \quad \mathbf{59.} \log_2 V = 3 \log_2 x + (n + 3) \log_2 y - 3 \\ \mathbf{60.} & \log_a V = \frac{3}{4} \log_a(x + 2) - 2 \log_a y \quad \mathbf{61.} \log_5 V = 2 \log_5(x - 2) + 3 \log_5(x + 2) - 2 \log_5(x^2 - 4) \end{array}$$

### Výsledky kapitoly III

$$\begin{array}{llllll} \mathbf{33.} & x \in \mathbb{R} & \mathbf{34.} & x \in \mathbb{R} & \mathbf{35.} & x \in \mathbb{R} - \{0\} & \mathbf{36.} & x \in \mathbb{R} & \mathbf{37.} & x \in \mathbb{R} - \{1, -3\} & \mathbf{38.} & x \in (-\infty, 5/3) \\ \mathbf{39.} & x \in (-5, +\infty) & \mathbf{40.} & x \in (-\sqrt{2}, +\sqrt{2}) & \mathbf{41.} & x \in \mathbb{R} & \mathbf{42.} & x \in \mathbb{R} - \{0\} & \mathbf{43.} & x \in (-1, 1) \\ \mathbf{44.} & \text{sjednocení intervalů } \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z} & \mathbf{45.} & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) & \mathbf{46.} & x \in \mathbb{R} \\ \mathbf{47.} & x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) & \mathbf{48.} & 0 & \mathbf{49.} & \text{není definován} & \mathbf{50.} & 1 & \mathbf{51.} & 1/3 & \mathbf{52.} & -2 & \mathbf{53.} & \text{není definován} \\ \mathbf{54.} & \log_5 V = \log_5 \pi + 2 \log_5 r + \log_5 v - \log_5 3 & \mathbf{55.} & \log_4 y = \frac{2}{3} \log_4 b - \frac{1}{3} \\ \mathbf{56.} & \ln T = \ln 2 + \ln \pi + \frac{1}{2}(\ln l - \ln 2 - \ln g) & \mathbf{57.} & \log_a y = 2 - \log_a x - \frac{1}{2} \log_a y \\ \mathbf{58.} & V = \frac{4}{3} \pi r^3 & \mathbf{59.} & V = \frac{x^3 y^{n+3}}{8} & \mathbf{60.} & V = \sqrt[4]{(x+2)^3/y^2} & \mathbf{61.} & V = \frac{(x-2)^2(x+2)^3}{(x^2-4)^2} = x+2 \end{array}$$

### IV. Rovnice exponenciální, logaritmické, s odmocninami

Řešte dané rovnice a proveďte zkoušku.

$$\begin{array}{llllll} \mathbf{62.} & 3^x = 81 & \mathbf{63.} & \left( \frac{1}{4} \right)^x = 16 & \mathbf{64.} & 2^x = -8 & \mathbf{65.} & 2011^x = 1 & \mathbf{66.} & x = \frac{1}{-} \\ \mathbf{67.} & \sqrt{128} = 8^x & \mathbf{68.} & \left( \frac{3}{2} \right)^x = \frac{8}{27} & \mathbf{69.} & 5^{x^2-2} \cdot 5^{3x+4} = 1 & \mathbf{70.} & x^{2x} + 3x^x - 4^x = 0 \\ \mathbf{71.} & (5x - 1)^x + 5^x = 0 & \mathbf{72.} & \frac{1}{x} + x^{\frac{1}{x}} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = 0 \\ \mathbf{73.} & \ln x = 0 & \mathbf{74.} & \ln x = 1 & \mathbf{75.} & \ln x = 3 & \mathbf{76.} & \ln x + 1 = 0 & \mathbf{77.} & \ln(\sqrt{x}) = -2 \\ \mathbf{78.} & \ln(x + 1) = 0 & \mathbf{79.} & 2 \ln x - 1 = 0 & \mathbf{80.} & 2x + 3x \ln x = 0 & \mathbf{81.} & \ln(x^2 - 3) = 0 \\ \mathbf{82.} & \frac{\sqrt{x}}{2} - 1 = 0 & \mathbf{83.} & \sqrt{3x + 4} = x & \mathbf{84.} & \frac{1}{\sqrt{2x - 3}} - 1 = 0 & \mathbf{85.} & \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x + 5}} = \frac{1}{3} \end{array}$$

## Výsledky kapitoly IV

62.  $x = 4$  63.  $x = -2$  64. nemá řešení 65.  $x = 0$  66.  $x = -1$  67.  $x = 7/6$   
68.  $x = -3$  69.  $x_1 = -1, x_2 = -2$  70.  $x_1 = 1, x_2 = -4$  71.  $x = -\frac{4}{5}$  72.  $x = 1$   
73.  $x = 1$  74.  $x = 75$  75.  $x = 3$  76.  $x = -1 = 1/$  77.  $x = \frac{1}{4}$  78.  $x = 0$   
79.  $x = \sqrt{\quad}$  80.  $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  81.  $x = \pm 2$  82.  $x = 4$  83.  $x = 4$ , ( $x = -1$  nevyhovuje)  
84.  $x = 2$  85.  $x_1 = 1, x_2 = -4$

## V. Nerovnice lineární, kvadratické, s absolutní hodnotou

Řešte dané nerovnice:

86.  $2 - 3x \geq 4$  87.  $\frac{4x - 3}{5} < \frac{3x - 4}{2} - \frac{2x - 5}{3}$  88.  $x^3 - 1 > 0$   
89.  $x^2 - 4 \geq 0$  90.  $x^2 + \frac{7}{2}x - 2 \geq 0$  91.  $2x^2 + 5x < 0$   
92.  $x^2 - 2x + 5 < 0$  93.  $x^2 + 1 > 0$  94.  $|x - 3| < 2$   
95.  $|x - 3| < 0$  96.  $|3x + 2| \leq 1$  97.  $|x - 1| < |x - 3|$   
98.  $\left| \frac{x + 1}{x - 1} \right| \leq 1$  99.  $\frac{3}{x - 3} < 0$  100.  $\frac{x + 2}{2x - 1} \leq 1$

## Výsledky kapitoly V

86.  $x \in (-\infty, -2/3)$  87.  $x \in (-8, +\infty)$  88.  $x \in (1, +\infty)$  89.  $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$   
90.  $x \in (-\infty, -4) \cup (1/2, +\infty)$  91.  $x \in (-5/2, 0)$  92.  $\emptyset$  93.  $x \in \mathbb{R}$  94.  $x \in (1, 5)$   
95.  $\emptyset$  96.  $x \in (-1, -1/3)$  97.  $x \in (-\infty, 2)$  98.  $x \in (-\infty, 0)$  99.  $x \in (-\infty, 3)$   
100.  $x \in (-\infty, 1/2) \cup (3, +\infty)$

## VI. Nerovnice exponenciální a logaritmické

Řešte dané nerovnice:

101.  $5^x \leq 625$  102.  $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{125}{27}$  103.  $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 8$  104.  $x + x^x > 0$   
105.  $\ln x < 0$  106.  $\ln x \geq 1$  107.  $\ln(x + 4) \leq 0$  108.  $x \ln x + 2x \geq 0$

## Výsledky kapitoly VI

101.  $x \in (-\infty, 4)$  102.  $x \in (-3, +\infty)$  103.  $x \in (-\infty, -3)$  104.  $x \in (-1, +\infty)$   
105.  $x \in (0, 1)$  106.  $x \in (, +\infty)$  107.  $x \in (-4, -3)$  108.  $x \in (1/2, +\infty)$

## VII. Goniometrické funkce

Upravte (zjednodušte) dané výrazy. Určete, pro jaká  $x$  mají smysl.

109.  $\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$  110.  $x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  111.  $\frac{1}{1 + 2^x} + \frac{1}{1 + 2^{-x}}$

Najděte řešení daných goniometrických rovnic:

112.  $\sin^2 x - \sin x = 0$  113.  $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$  114.  $\sin 2x = x$

## Výsledky kapitoly VII

109.  $1 - \sin x, x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  110.  $\frac{1}{\sin x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$  111.  $1, x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$   
112.  $x = k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  113.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  114.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

## VIII. Komplexní čísla

Upravte na tvar  $a + bi$ :

115.  $3^3$  116.  $4^4$  117.  $5^{-6}$  118.  $(3 + 7)$  119.  $(2 + 3)(3 - 4)$   
120.  $(3 - 2)^2$  121.  $(-2 + 3)(-2 - 3)$  122.  $(2 - 3)(1 + 4) - (2 + 3)(1 - 4)$

Určete absolutní hodnotu (velikost) komplexního čísla:

123.  $z = 3 + 4i$  124.  $z = 4 - 3i$  125.  $z = -3$  126.  $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$   
127.  $z = -1 + \frac{1}{2}i$  128.  $z = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}i$  129.  $z = \cos x + \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

## Výsledky kapitoly VIII

115.  $-$  116.  $1$  117.  $+1$  118.  $3 - 7$  119.  $18 +$  120.  $5 - 12$  121.  $13$  122.  $10$   
123.  $|z| = 5$  124.  $|z| = 5$  125.  $|z| = 3$  126.  $|z| = 1$  127.  $z = \frac{\sqrt{5}}{2}$  128.  $|z| = 1$  129.  $|z| = 1$

## IX. Analytická geometrie v rovině

130. Napište parametrický, obecný a směrnicový tvar rovnice přímky, která prochází body  $A = [5, 2]$ ,  $B = [9, 4]$ . Načrtněte obrázek.

Určete a načrtněte kuželosečky, které jsou dány následujícími rovnicemi.

131.  $x = y^2 - 3$  132.  $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 2 = 0$   
133.  $x^2 + y^2 + 6y - 3 = 0$  134.  $x^2 - 4y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$

Načrtněte rovinný obrazec D, který je omezen danými křivkami nebo je zadán nerovnicemi:

135.  $x + y \leq 1$ ,  $x + 1 \geq y \geq 0$  136.  $y \geq 0$ ,  $y \leq 2 - x$ ,  $x \geq y^2$   
137.  $2x + 2y = 5$ ,  $xy = 1$  138.  $x^2 + y^2 \leq 4x$ ,  $y \geq 0$

## Výsledky kapitoly IX

130.  $x = 5 + 4t$ ,  $y = 2 + 2t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;  $x - 2y - 1 = 0$ ;  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

131. parabola, osa v ose  $x$ , vrchol  $V = [-3, 0]$ , otevřená doprava

132. elipsa  $S = [2, -1]$ ,  $a = 2$ ,  $b = \sqrt{2}$  133. kružnice  $S = [0, -3]$ ,  $r = \sqrt{12}$

134. hyperbola  $S = [3, 1]$ ,  $a = 4$ ,  $b = 2$  135. rovnoramenný trojúhelník nad osou  $x$ , souměrný podle osy  $y$

136. "křivočarý" trojúhelník v prvním kvadrantu ohraničený dvěma úsečkami a částí paraboly

137. obrazec ohraničen v prvním kvadrantu úsečkou a rovnoosou hyperbolou

138. posunutý půlkruh v prvním kvadrantu,  $S = [2, 0]$

## X. Aritmetická posloupnost, geometrická posloupnost

Při zadaných údajích v aritmetické posloupnosti určete požadované hodnoty:

139.  $a_1 = 6$ ,  $s_{10} = 195$ ,  $d = ?$ ,  $a_5 = ?$  140.  $a_1 + a_5 = 16$ ,  $a_3 + a_4 = 19$ ,  $d = ?$ ,  $s_5 = ?$   
141.  $s_5 = s_6 = 60$ ,  $d = ?$ ,  $a_1 = ?$  142.  $a_2 = 4$ ,  $a_6 = -2$ ,  $d = ?$ ,  $a_{10} = ?$

Při zadaných údajích v geometrické posloupnosti určete požadované hodnoty:

143.  $q = 2$ ,  $a_5 = 24$ ,  $a_1 = ?$ ,  $s_4 = ?$  144.  $a_1 = 3$ ,  $a_4 = 24$ ,  $q = ?$ ,  $a_5 = ?$   
145.  $a_4 = -8/3$ ,  $a_6 = -32/3$ ,  $q = ?$ ,  $a_1 = ?$  146.  $a_1 = 512$ ,  $q = 1/2$ ,  $a_n = 4$ ,  $n = ?$ ,  $s_n = ?$

## Výsledky kapitoly X

140.  $d = 3$ ,  $a_5 = 18$  141.  $d = 3$ ,  $s_5 = 40$  142.  $a_1 = 20$ ,  $d = -4$  143.  $d = -3/2$ ,  $a_{10} = -8$

144.  $a_1 = 3/2$ ,  $s_4 = 45/2$  145.  $q = 2$ ,  $a_5 = 48$  146.  $q = 2$ ,  $a_1 = -1/3$  nebo  $q = -2$ ,  $a_1 = 1/3$

147.  $n = 8$ ,  $s_8 = 1020$

## Literatura:

- [1] J. Černý a kol.: **Matematika - přijímací zkoušky na ČVUT**. Nakladatelství ČVUT Praha, 2007  
[2] J. Petáková: **Matematika - Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na VŠ**. Prometheus, Praha 1997

- [3] J.Neustupa: **Matematika I.** Skriptum Strojní fakulty. Nakladatelství ČVUT, Praha 2017 (též starší vydání 2010,...)
- [4] L.Samková: **Sbírka příkladů z matematiky.** Fak. architektury, Nakladatelství ČVUT, Praha 2002
- [5] J.Polák: **Přehled středoškolské matematiky.** Prometheus, Praha 2016