Repetitorium středoškolské matematiky

Analytika – vektory, přímka, kuželosečky

Vektor

- co je to vektor?

Vektor

- co je to vektor?
  - *matematicky*: množina stejně orientovaných, stejně velkých, rovnoběžných úseček

Vektor

- co je to vektor?
  - *matematicky*: množina stejně orientovaných, stejně velkých, rovnoběžných úseček
  - *geometricky*: úsečka s umístěním a orientací (= orientovaná úsečka)

Vektor

- co je to vektor?
  - *matematicky*: množina stejně orientovaných, stejně velkých, rovnoběžných úseček
  - *geometricky*: úsečka s umístěním a orientací (= orientovaná úsečka)

$\longrightarrow$ polohový vektor = rádiusvektor = průvodič: zvolíme pevný bod P (např. počátek), každému bodu X v souřadnicové soustavě lze tedy přiřadit orientovanou úsečku PX

$\longrightarrow$ vázaný vektor: umístění volného vektoru $\vec{a}$ do daného bodu A

Vektor

- velikost vektoru $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$:
  $|\vec{u}| = |AB| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$, pro vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, pro vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ v rovině analogicky

Vektor

- velikost vektoru $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$:
  $|\vec{u}| = |AB| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$, pro vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, pro vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ v rovině analogicky
- normovaný vektor $\vec{u}$ je $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ a jedná se o vektor jednotkové délky

Vektor

- velikost vektoru $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$:
  $|\vec{u}| = |AB| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$, pro vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, pro vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ v rovině analogicky
- normovaný vektor $\vec{u}$ je $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ a jedná se o vektor jednotkové délky
- skalární součin vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:
  $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$, analogicky pro vektory v rovině

Vektor

- úhel mezi vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$:

  pro $|\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})| = \varphi$ platí: $\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$ (lze získat z definice skalárního součinu)

  $\rightarrow$ pro odchylku φ dvou přímek platí $\cos\varphi = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$, jelikož se bere menší z úhlů

Vektor

- vektorový součin vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2, u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3, u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1)$$

Vektor

- vektorový součin vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$:

  $\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2, u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3, u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1)$

  $\longrightarrow$ lze odvodit z determinantu matice:

  $\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$, kde koeficient u i určuje první složku vektoru součinu, koeficient u j druhou složku a k třetí složku

Vektor

- vektorový součin vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$:
  $\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2, u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3, u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1)$
  $\longrightarrow$ lze odvodit z determinantu matice:
  $\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$, kde koeficient u i určuje první složku vektoru součinu, koeficient u j druhou složku a k třetí složku

  $\longrightarrow$ lze také definovat jako obsah rovnoběžníku a vypočítat takto:
  $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \varphi$

Vektor

- smíšený součin vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$:

  $$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2, u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3, u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1) \cdot \vec{w}$$

  $\rightarrow$ velikost tohoto součinu definuje objem rovnoběžnostěnu

Přímka

- obecná rovnice přímky:
  $ax + by + c = 0$, kde normálový vektor (tj. kolmý k přímce) k přímce má složky $\vec{n} = (a, b)$
- parametrická rovnice přímky:
  $X = A + t \cdot \vec{u}, t \in \mathbb{R}$, kde přímka prochází bodem A a je určena vektorem $\vec{u}$ a parametr $t \in \mathbb{R}$ určuje část přímky (tj. celou, polopřímku, úsečku)

  v rozšířeném tvaru: $\begin{cases} x = x_A + t \cdot u_1 \\ y = y_A + t \cdot u_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Přímka

- směrnicový tvar rovnice přímky:

  $y = kx + q$, kde $k = \mathrm{tg}\varphi$ je směrnice přímky (tj. úhel φ mezi ní a kladnou části osy x) a q určuje průsečík přímky s osou y

- úsekový tvar rovnice přímky:

  $\frac{x}{p} + \frac{y}{r} = 1$, kde p určuje průsečík přímky s osou x a r určuje průsečík přímky s osou y (tj. úseky na osách)

Kuželosečky - kružnice

- kružnice (středový tvar):

  $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$, kde střed kružnice je $S=[m,n]$ a poloměr kružnice je r

- obecná rovnice kružnice:

  $x^2+y^2-2mx-2ny+p=0$, kde $p=m^2+n^2-r^2$

  ALE ne každá rovnice v tomto tvaru je rovnicí kružnice

  $\rightarrow$ o kružnici se jedná jen v případě, že $p \geq m^2+n^2$

  rovnici $p=m^2+n^2$ splňují pouze souřadnice jediného bodu, tj. středu kružnice

Kuželosečky - elipsa

- elipsa (středová rovnice):

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0$$ jsou velikosti poloos elipsy a střed elipsy je $S = [m, n]$

- obecná rovnice elipsy:

$$px^2 + qy^2 + 2rx + 2sy + t \ = \ 0$$

kde $p, q, r, s, t \in \mathbb{R}, p \cdot q > 0$

- definice elipsy pomocí ohnisek E, F:

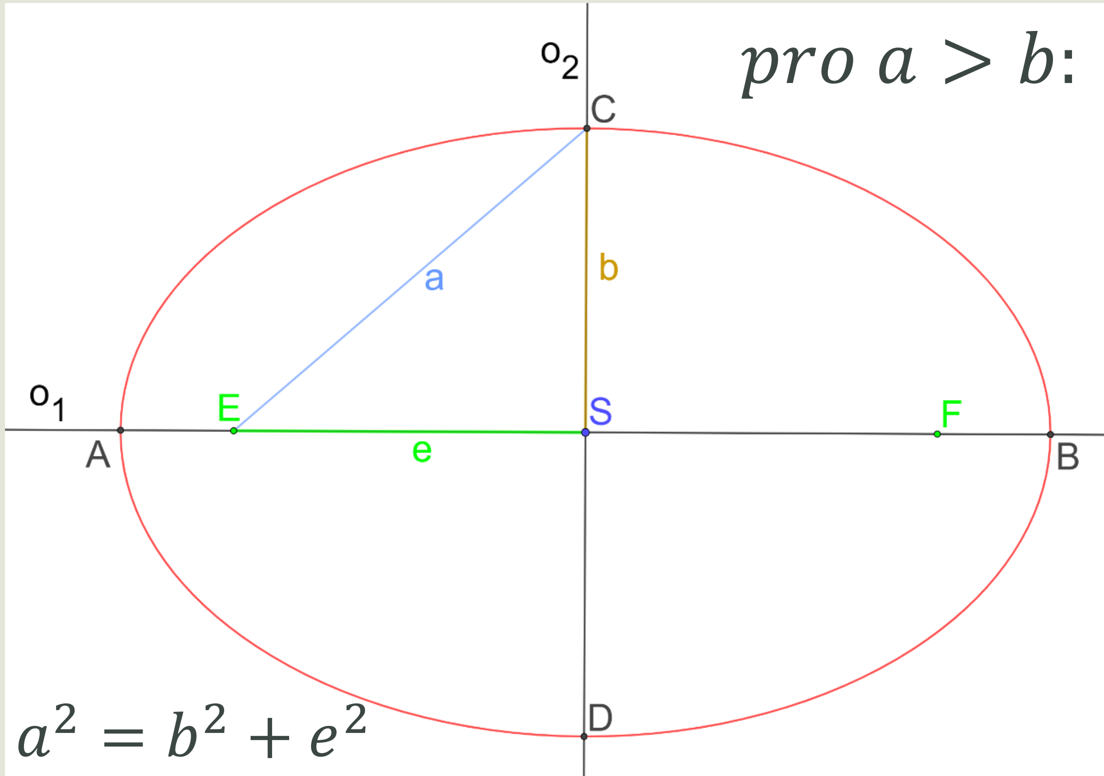
$$|EX| + |FX| = 2a$$

- e = excentricita, výstřednost

A, B = hlavní vrcholy, o_1 = hlavní osa

C, D = vedlejší vrcholy, o_2 = vedlejší osa

$pro\ a > b$:



$a^2 = b^2 + e^2$

Kuželosečky - hyperbola

- hyperbola (středová rovnice):

  $$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = \pm 1,$$ kde $a, b > 0$ jsou velikosti poloos

  hyperboly a střed hyperboly je $S = [m, n]$

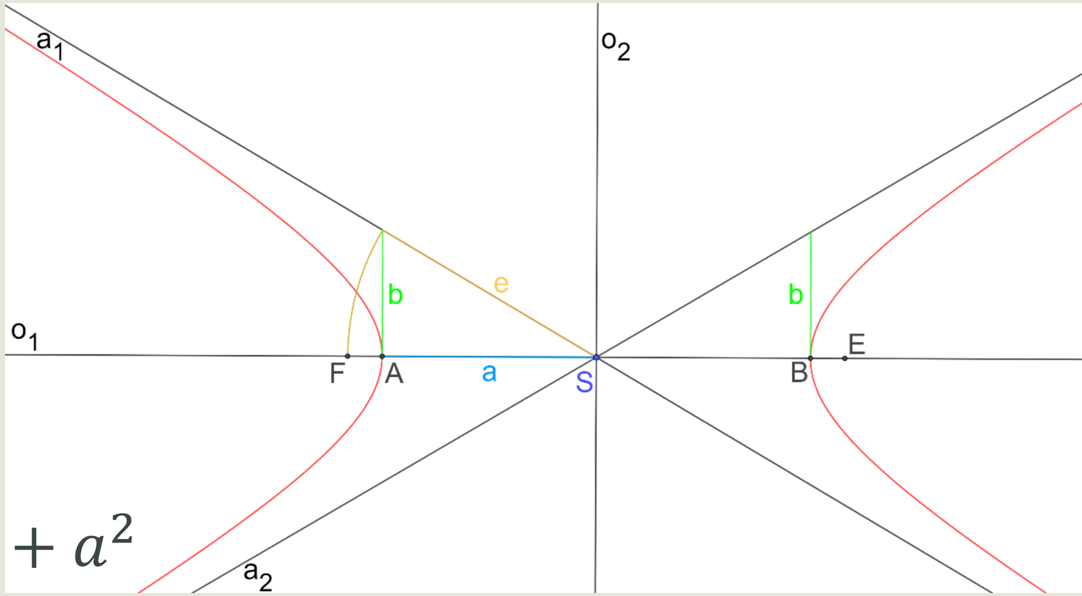
- definice hyperboly pomocí ohnisek E, F:

  $$\big||EX| - |FX|\big| = 2a$$

- asymptoty a_1, a_2 hyperboly mají rovnici:

  $$y = \pm \frac{b}{a}(x - m) + n$$

pro $+1$ v rovnici:



$$e^2 = b^2 + a^2$$

Kuželosečky - parabola

- parabola (vrcholová rovnice):
  $(x-m)^2 = \pm 2p(y-n)$,
  resp. $(y-n)^2 = \pm 2p(x-m)$, kde p je parametr paraboly a vrchol paraboly je $V = [m, n]$
- definice paraboly pomocí ohniska F a řídicí přímky q:
  $|FX| = d(q, X)$, kde q je řídicí přímka paraboly a platí $|FV| = d(q, V) = \frac{p}{2}$