Repetitorium středoškolské matematiky

Funkce – co je to, inverzní a goniometrické funkce

Funkce

- funkce $y = f(x)$ je zobrazení jedné reálné proměnné, tj. množiny $M \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tedy $f: x \in M \to y = f(x) \in \mathbb{R}$ (x je vzor/nezávisle proměnná a y je obraz/závisle proměnná)

Funkce

- funkce $y = f(x)$ je zobrazení jedné reálné proměnné, tj. množiny $M \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tedy $f: x \in M \rightarrow y = f(x) \in \mathbb{R}$ (x je vzor/nezávisle proměnná a y je obraz/závisle proměnná)

  $\longrightarrow$ každému vzoru je přiřazen nanejvýš 1 obraz

Funkce

- funkce $y = f(x)$ je zobrazení jedné reálné proměnné, tj. množiny $M \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tedy $f: x \in M \to y = f(x) \in \mathbb{R}$ (x je vzor/nezávisle proměnná a y je obraz/závisle proměnná)

  $\longrightarrow$ každému vzoru je přiřazen nanejvýš 1 obraz

  $\longrightarrow$ M = definiční obor $D(f) = D_f$

  $H(f)$ = obor hodnot (tj. množina všech obrazů)

Funkce

- funkce $y = f(x)$ je zobrazení jedné reálné proměnné, tj. množiny $M \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tedy $f\colon x \in M \to y = f(x) \in \mathbb{R}$ (x je vzor/nezávisle proměnná a y je obraz/závisle proměnná)

  $\longrightarrow$ každému vzoru je přiřazen nanejvýš 1 obraz

  $\longrightarrow$ M = definiční obor $D(f) = D_f$

  $H(f)$ = obor hodnot (tj. množina všech obrazů)

- prostá funkce = funkce, pro jejíž dva různé vzory jsou i jejich obrazy různé

  $\longrightarrow$ rostoucí či klesající funkce (ryze monotónní)

Funkce

- funkce $y = f(x)$ je:

  sudá, pokud pro každé $x \in D(f)$ platí $f(-x) = f(x)$

  lichá, pokud pro každé $x \in D(f)$ platí $f(-x) = -f(x)$

  $\longrightarrow$ sudá funkce je symetrická podle osy y

  $\longrightarrow$ lichá funkce je symetrická podle počátku

- funkce $y = f(x)$ je monotónní, pokud je:

  neklesající, pokud pro libovolná $x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$ nebo

  nerostoucí, pokud pro libovolná $x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$

Funkce

- funkce $y = f(x)$ je ryze monotónní, pokud je:

  rostoucí, pokud pro libovolná $x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$ nebo

  klesající, pokud pro libovolná $x_1, x_2 \in D(f), x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$

- dále jsou funkce ohraničené (shora, zdola) či periodické

Inverzní funkce

- inverzní funkce k funkci $y = f(x)$ je funkce $x = f_{-1}(y)$ pouze na té části $D(f)$, kde je f prostá

  $\longrightarrow$ tedy platí $f\left(f_{-1}(y)\right) = y$ a $f_{-1}\left(f(x)\right) = x$

- navzájem inverzní funkce:

  logaritmická ($\longrightarrow$ dekadický/přirozený logaritmus) a exponenciální

  $$y = \log_a x \iff x = a^y$$

  grafy

- dále pro $a > 0, a \neq 1$ a $x > 0$ platí:

$a^{\log_a x} = x$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$

$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$

$\log_a x^r = r \cdot \log_a x$ (pro $r \in \mathbb{R}$)

Goniometrické funkce

- $y = \sin x\,, x \in \mathbb{R}$

  $\rightarrow D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle -1; 1 \rangle$

  $\rightarrow$ v pravoúhlém trojúhelníku $\sin\alpha = \dfrac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}}$, lichá funkce

- $y = \cos x\,, x \in \mathbb{R}$

  $\rightarrow D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle -1; 1 \rangle$

  $\rightarrow$ v pravoúhlém trojúhelníku $\cos\alpha = \dfrac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}}$, sudá funkce

- na jednotkové kružnici definují souřadnice bodu, **grafy**

Goniometrické funkce

- důležité hodnoty funkcí (+ převod mezi stupni a radiány):

	0° = 0 rad	30° = $\frac{\pi}{6}$	45° = $\frac{\pi}{4}$	60° = $\frac{\pi}{3}$	90° = $\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$^1/_2$	$^{\sqrt{2}}/_2$	$^{\sqrt{3}}/_2$	1
$\cos x$	1	$^{\sqrt{3}}/_2$	$^{\sqrt{2}}/_2$	$^1/_2$	0

- další hodnoty se odvodí z jednotkové kružnice

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x, \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Goniometrické funkce

- $y = \operatorname{tg} x, x \in \mathbb{R}$

  $\rightarrow D(f) = \mathbb{R} \backslash \left\{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}, H(f) = \mathbb{R}$

  $\rightarrow$ v pravoúhlém trojúhelníku $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}}$, obecně $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin x}{\cos x}$

- $y = \operatorname{cotg} x, x \in \mathbb{R}$

  $\rightarrow D(f) = \mathbb{R} \backslash \{k \cdot \pi\}, k \in \mathbb{Z}, H(f) = \mathbb{R}$

  $\rightarrow$ v pravoúhlém trojúhelníku $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}}$, obecně $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos x}{\sin x}$

- na jednotkové kružnici pomocí tečny, grafy

Goniometrické funkce

- důležité hodnoty funkcí:

	0° = 0 rad	30° = $\frac{\pi}{6}$	45° = $\frac{\pi}{4}$	60° = $\frac{\pi}{3}$	90° = $\frac{\pi}{2}$
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\sqrt{3}/_3$	1	$\sqrt{3}$	nedefinováno
$\mathrm{cotg}\, x$	nedefinováno	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/_3$	0

- další hodnoty se odvodí z jednotkové kružnice