Repetitorium středoškolské matematiky

Komplexní čísla

Komplexní číslo

- je to uspořádaná dvojice čísel $[a; b]$
- používá se k řešení rovnic, kde $D < 0$, zobrazuje se v Gaussově rovině

Komplexní číslo

- je to uspořádaná dvojice čísel $[a; b]$
- používá se k řešení rovnic, kde $D < 0$, zobrazuje se v Gaussově rovině
- velikost (resp. absolutní hodnota) komplexního čísla:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- komplexní jednotka je takové číslo, pro které platí: $|z| = 1$

Komplexní číslo - tvary

- algebraický tvar komplexního čísla:

  $z = a + bi$, kde $i =$ imaginární jednotka (v elektrotechnice se značí j), pro kterou platí $i^2 = -1$

  $a =$ reálná část, $bi =$ imaginární část

Komplexní číslo - tvary

- algebraický tvar komplexního čísla:

  $z = a + bi$, kde $i =$ imaginární jednotka (v elektrotechnice se značí j), pro kterou platí $i^2 = -1$

  $a =$ reálná část, $bi =$ imaginární část

- speciální případy:

  $[a; 0] =$ reálné číslo, tedy $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

  $[0; b] =$ ryze imaginární číslo

Komplexní číslo - tvary

- goniometrický tvar komplexního čísla:

  $z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$, $\alpha =$ argument komplexního čísla

- komplexně sdružené číslo k z:

  $\bar{z} = z^* = a - bi$

  pro z a $\bar{z}$ platí:

  $\bar{z} \cdot z = a^2 + b^2$ $\qquad$ $z + \bar{z} = 2a$

  $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\bar{z} \cdot z}$

Komplexní číslo - tvary

- goniometrický tvar komplexního čísla:

  $z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$, $\alpha =$ argument komplexního čísla

- komplexně sdružené číslo k z:

  $\bar{z} = z^* = a - bi$

  pro z a $\bar{z}$ platí:

  $\bar{z} \cdot z = a^2 + b^2$ $\qquad$ $z + \bar{z} = 2a$

  $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\bar{z} \cdot z}$

- exponenciální tvar komplexního čísla:

  $z = |z| \cdot e^{i\alpha}$, tedy $e^{i\alpha} = (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$

Komplexní číslo - operace

- pro rovnost dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$ platí: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \,\&\, b_1 = b_2$

Komplexní číslo - operace

- pro rovnost dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ platí: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \,\&\, b_1 = b_2$
- pro součet (resp. rozdíl) dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ platí: $z_1 \pm z_2 = [a_1 \pm a_2; b_1 \pm b_2]$

Komplexní číslo - operace

- pro rovnost dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$ platí: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \,\&\, b_1 = b_2$
- pro součet (resp. rozdíl) dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ platí: $z_1 \pm z_2 = [a_1 \pm a_2; b_1 \pm b_2]$
- pro součin dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$ platí: $z_1 \cdot z_2 = [a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2; a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1]$

Komplexní číslo - operace

- pro rovnost dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$ platí: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \,\&\, b_1 = b_2$
- pro součet (resp. rozdíl) dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$ platí: $z_1 \pm z_2 = [a_1 \pm a_2; b_1 \pm b_2]$
- pro součin dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$ platí: $z_1 \cdot z_2 = [a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2; a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1]$
- pro podíl dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i \neq 0$ platí: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + i \cdot (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2)}{{a_1}^2 + {b_2}^2}$

Komplexní číslo - operace

- Moivreova věta:

  pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{Z}$ platí:

  $(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \cdot \sin(n\alpha)$

- n-tá mocnina z komplexního čísla je:

  $z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\alpha) + i \cdot \sin(n\alpha))$

- n-tá odmocnina z komplexního čísla z je takové číslo q, pro které platí: $q^n = z$, najdeme je ve tvaru

  $q_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot (\cos\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n})$, kde $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$

Komplexní čísla - aplikace

- Násobení komplexních čísel odpovídá součtu úhlů a násobení délek, tj. rotaci a změně měřítka v rovině. Tento geometrický pohled je základem pro kmitání, signály i elektromagnetické jevy.
- $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)]$
  Násobením číslem z_2 otočíme bod z_1 kolem počátku o úhel φ_2. Současně natáhneme nebo zmenšíme jeho vzdálenost od počátku r_1 na $r_1 r_2$. Jinými slovy: Násobení komplexním číslem představuje rotaci o daný úhel a změnu měřítka o daný faktor.
- násobení čistě imaginárním číslem bod se otočí o 90° proti směru hodinových ručiček kolem počátku

Komplexní čísla - aplikace

Operace	Geometrický účinek
$z \cdot 1$	žádná změna
$z \cdot (-1)$	otočení o 180°
$z \cdot i$	otočení o 90°
$z \cdot \frac{1}{2}$	zmenšení na polovinu
$z \cdot 2e^{i\pi/3}$	dvojnásobné zvětšení + otočení o 60°

Oblast	Jak se používá
Kmitání	Rotace $e^{i\omega t}$ představuje harmonické kmity.
Elektrotechnika	Násobení fázorem $e^{i\varphi}$ posouvá signál o fázi φ.
Grafika / 3D transformace	Rotace v rovině lze snadno reprezentovat násobením komplexním číslem.
Řízení a stabilita	Kořeny v komplexní rovině ukazují úhly (frekvence) a moduly (tlumení) systémů.

V **řízení a stabilitě** (např. automatické řízení motoru, stabilita dronu) se zkoumají **póly přenosové funkce**, které jsou právě **kořeny charakteristické rovnice** v komplexní rovině.
Pokud všechny póly leží **v levé polorovině** ($\mathrm{Re}(s) < 0$ → (systém je **stabilní**.
Pokud se některý pól dostane do **pravé poloroviny** → systém **nestabilní** (kmity rostou).

Komplexní čísla - aplikace

- Při návrhu filtrů, kmitavých systémů nebo řízení (např. stabilita systému) se komplexní kořeny charakteristických rovnic promítají do reálného chování systému – jejich reálná část určuje tlumení, imaginární část frekvenci kmitů.
- Kmitání lze popsat jako rotaci v komplexní rovině: $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \cdot sin(\omega t)$, kde reálná část je skutečný kmit, imaginární část je fázově posunutý kmit. Exponcenciální tvar výrazně zjednodušuje diferenciální rovnice pro kmitání, tlumení a elektromagnetické vlny.

Komplexní čísla - aplikace

- rozšíření komplexních čísel – kvaterniony:

$$q = w + x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k,\ i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

- kvaternion reprezentuje číslo ve 4D prostoru (1 reálná + 3 imaginární složky)

- **Popis orientace robotického ramene:**
  Každý kloub robota má svoji **orientaci** vůči základně.
  Ta se vyjadřuje kvaternionem, protože:
  - se dají **snadno kombinovat** (násobením),
  - umožňují **plynulé interpolace** mezi orientacemi,
  - neakumulují numerické chyby jako matice