Repetitorium středoškolské matematiky

Komplexní čísla

Komplexní číslo

- je to uspořádaná dvojice čísel $[a; b]$
- používá se k řešení rovnic, kde $D < 0$, zobrazuje se v Gaussově rovině

Komplexní číslo

- je to uspořádaná dvojice čísel $[a; b]$
- používá se k řešení rovnic, kde $D < 0$, zobrazuje se v Gaussově rovině
- velikost (resp. absolutní hodnota) komplexního čísla:

  $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
- komplexní jednotka je takové číslo, pro které platí: $|z| = 1$

Komplexní číslo - tvary

- algebraický tvar komplexního čísla:

  $z = a + bi$, kde $i =$ imaginární jednotka (v elektrotechnice se značí j), pro kterou platí $i^2 = -1$

  $a =$ reálná část, $bi =$ imaginární část

Komplexní číslo - tvary

- algebraický tvar komplexního čísla:

  $z = a + bi$, kde $i =$ imaginární jednotka (v elektrotechnice se značí j), pro kterou platí $i^2 = -1$

  $a =$ reálná část, $bi =$ imaginární část

- speciální případy:

  $[a; 0] =$ reálné číslo, tedy $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

  $[0; b] =$ ryze imaginární číslo

Komplexní číslo - tvary

- goniometrický tvar komplexního čísla:

  $z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$, $\alpha =$ argument komplexního čísla

- komplexně sdružené číslo k z:

  $\bar{z} = z^* = a - bi$

  pro z a $\bar{z}$ platí:

  $\bar{z} \cdot z = a^2 + b^2$ $\qquad$ $z + \bar{z} = 2a$

  $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\bar{z} \cdot z}$

Komplexní číslo - tvary

- goniometrický tvar komplexního čísla:

  $z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$, $\alpha =$ argument komplexního čísla

- komplexně sdružené číslo k z:

  $\bar{z} = z^* = a - bi$

  pro z a $\bar{z}$ platí:

  $\bar{z} \cdot z = a^2 + b^2$ $\qquad$ $z + \bar{z} = 2a$

  $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\bar{z} \cdot z}$

- exponenciální tvar komplexního čísla:

  $z = |z| \cdot e^{i\alpha}$, tedy $e^{i\alpha} = (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$

Komplexní číslo - operace

- pro rovnost dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$ platí: $z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2 \,\&\, b_1 = b_2$

Komplexní číslo - operace

- pro rovnost dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ platí: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \,\&\, b_1 = b_2$
- pro součet (resp. rozdíl) dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ platí: $z_1 \pm z_2 = [a_1 \pm a_2; b_1 \pm b_2]$

Komplexní číslo - operace

- pro rovnost dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$ platí: $z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2 \,\&\, b_1 = b_2$
- pro součet (resp. rozdíl) dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ platí: $z_1 \pm z_2 = [a_1 \pm a_2; b_1 \pm b_2]$
- pro součin dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$ platí: $z_1 \cdot z_2 = [a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2; a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1]$

Komplexní číslo - operace

- pro rovnost dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$ platí: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \;\&\; b_1 = b_2$
- pro součet (resp. rozdíl) dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i,$ $z_2 = a_2 + b_2 i$ platí: $z_1 \pm z_2 = [a_1 \pm a_2; b_1 \pm b_2]$
- pro součin dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i$ platí: $z_1 \cdot z_2 = [a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2; a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1]$
- pro podíl dvou komplexních čísel $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i \neq 0$ platí: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2) + i \cdot (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2)}{{a_1}^2 + {b_2}^2}$

Komplexní číslo - operace

- Moivreova věta:

  pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{Z}$ platí:

  $(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \cdot \sin(n\alpha)$

- n-tá mocnina z komplexního čísla je:

  $z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\alpha) + i \cdot \sin(n\alpha))$

- n-tá odmocnina z komplexního čísla z je takové číslo q, pro které platí: $q^n = z$, najdeme je ve tvaru

  $q_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot (\cos\frac{\alpha+k\cdot 2\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\alpha+k\cdot 2\pi}{n})$, kde $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$