

**Opakovací kurz středoškolské matematiky**  
do bakalářského studia na Strojní fakultě ČVUT v Praze  
Ústav technické matematiky

**I. Mocniny, odmocniny, algebraické výrazy**

Upravte (zjednodušte), případně určete číselnou hodnotu. U výrazů udejte, kdy mají smysl.

1.  $4n^2 \cdot 3(-n^3)(-2n^4)$  2.  $((-2)^{-1})^{-6}$  3.  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-14} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$  4.  $\left(\frac{2ab}{25x^2y^2}\right)^{-3} : \left(\frac{4a}{5xy^2}\right)^{-2}$   
 5.  $\frac{ax+bx}{ax-bx}$  6.  $\frac{x-1}{x^2-x}$  7.  $8m - [6m - (2n + 4m)] + 4n$  8.  $3x - 4y - (-5y - 6x) - (7x + 8y)$   
 9.  $(2x+2)x - (x^2 + 2x + 4)$  10.  $4n^2 - (2n-3)^2$  11.  $\frac{15x+4y}{12} - \frac{3y-22x}{9}$  12.  $(p+q) : \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$   
 13.  $\left(\frac{1}{b+1} - \frac{2b}{b^2-1}\right) : \frac{b}{1-b}$  14.  $\left(\frac{x-1}{x-2} - \frac{x}{x-1}\right) \left(x - \frac{3x}{x+1}\right)$  15.  $\frac{b-1 + \frac{6}{b-6}}{b-2 + \frac{3}{b-6}}$  16.  $\frac{\frac{6x}{yz}}{\frac{8xz}{y}}$   
 17.  $\left(\frac{-16}{5}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{\frac{64}{25}}{2 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}}$  18.  $\frac{2^{2k}}{8^k}$  19.  $\frac{(-2)^{3k}}{8^k}$  20.  $\frac{\frac{2}{3}2^3}{3!}$  21.  $\left(\frac{-16}{5}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{\frac{64}{25}}{2 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}}$   
 22.  $\frac{2^{2k}}{8^k}$  23.  $\frac{(-2)^{3k}}{8^k}$  24.  $\frac{\frac{2}{3}2^3}{3!}$  25.  $\frac{a^2-x^2}{a^2-b^2} : \frac{ax+x^2}{a-b}$  26.  $\frac{n^2}{n+1} - n$  27.  $\frac{(4n-3)^2 - 16n^2}{n^2 - (n+3)^2}$

**Výsledky kapitoly I**

1.  $24n^9$  2. 64 3.  $\left(\frac{4}{3}\right)^4$  4.  $\frac{1250x^4y^2}{ab^3}, abxy \neq 0$  5.  $\frac{a+b}{a-b}, x \neq 0, a-b \neq 0$  6.  $\frac{1}{x}, x \neq 0, x \neq 1$   
 7.  $6m+6n$  8.  $2x-7y$  9.  $x^2-4$  10.  $12n-9$  11.  $\frac{133x}{36}$  12.  $pq, p \neq 0, q \neq 0, p+q \neq 0$   
 13.  $\frac{1}{b}, b \neq 0, b \neq \pm 1$  14.  $\frac{x}{x^2-1}, x \neq \pm 1, x \neq 2$  15.  $\frac{3}{4z^2}, xyz \neq 0$  16.  $\frac{b-4}{b-5}, b \neq 3, b \neq 5, b \neq 6$   
 17. 0 18.  $\frac{1}{2^k}$  19.  $(-1)^k$  20.  $\frac{8}{9}$  21.  $\frac{a-x}{x(a+b)}, a \neq \pm b, x \neq 0$  22.  $\frac{-n}{n+1}, n \neq -1$  23.  $\frac{8n-3}{2n+3}, n \neq -\frac{3}{2}$

**II. Rovnice lineární, kvadratické, kubické, s absolutní hodnotou**

Řešte dané rovnice a proveďte zkoušku.

24.  $3(4-x) - 6(3-2x) = 2x - 27$  25.  $\frac{t}{2} - \frac{t+5}{3} = \frac{t-3}{2} - \frac{t-2}{3}$  26.  $\frac{y+5}{10} - \frac{y-4}{8} = 1$   
 27.  $\frac{25x+6}{15} - (x-1) = \frac{2x}{3} + \frac{7}{5}$  28.  $5 + \frac{3}{3u-12} = \frac{5-u}{u-4}$  29.  $\frac{y-1}{y+1} - \frac{y+2}{y-2} = 0$   
 30.  $2x^2 - 7x - 4 = 0$  31.  $|2x-7| + |2-x| = 3$  32.  $|x| - 2 \cdot |x+1| + 3 \cdot |x+2| = 0$

Řešte dané rovnice a proveďte zkoušku:

33.  $x^2 + 5x = 0$  34.  $(3x+1)(x-\sqrt{5}) = 0$  35.  $(3-\lambda)^2 + 4 = 0$   
 36.  $x^3 - 4x^2 + 5x = 0$  37.  $3x^2 \cdot x - (x^3 + 16) = 0$  38.  $(3-\lambda)(3+\lambda) - 4 = 0$   
 39.  $(1-\lambda)(-1-\lambda) + 5 = 0$  40.  $(2x+3)x - (x^2 + 3x + 9) = 0$  41.  $3x^2 \cdot x^2 - (x^3 + 4) \cdot 2x = 0$

**Výsledky kapitoly II**

24.  $x = -3$  25. Nemá řešení 26.  $y = 0$  27.  $x \in \mathbb{R}$  28. Nemá řešení 29.  $y = 0$  30.  $x_1 = 4, x_2 = -\frac{1}{2}$   
 31.  $x_1 = 2, x_2 = 4$  32.  $x = -2$  33.  $x_1 = 0, x_2 = -5$  34.  $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \sqrt{5}$  35.  $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$   
 36.  $x_1 = 0, x_{2,3} = 2 \pm i$  37.  $x = 2$  38.  $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$  39.  $\lambda_{1,2} = \pm 2i$  40.  $x_{1,2} = \pm 3$   
 41.  $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -1 + \sqrt{3}i, x_4 = -1 - \sqrt{3}i$

**III. Funkce**

Určete definiční obor dané funkce  $y = f(x)$ :

42.  $y = 3x - 5$  43.  $y = 4x^7 - 5x^3 + \frac{3}{2}x - 8$  44.  $y = \frac{x^3 - 8}{x}$  45.  $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$   
 46.  $y = \frac{2x-3}{x^2+2x-3}$  47.  $y = \sqrt{5-3x}$  48.  $y = \frac{x-2}{\sqrt{x+5}}$  49.  $y = \frac{3x}{\sqrt{2-x^2}}$

$$50. y = e^{100x-7} \quad 51. y = (x+2)e^{1/x} \quad 52. y = \sqrt{1-|x|} \quad 53. y = \sqrt{\sin x}$$

$$54. y = \ln(x^2 - 1) \quad 55. y = \ln(x^2 + 2x + 3) \quad 56. y = \frac{x}{\ln x} \quad 57. y = \frac{x-2}{\sqrt[3]{x+5}}$$

$$58. y = \log_3(9 - x^2)$$

Určete hodnoty logaritmické funkce:

$$59. \ln 1 \quad 60. \ln 0 \quad 61. \ln e \quad 62. \ln \sqrt[3]{e} \quad 63. \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) \quad 64. \ln(-2)$$

Určete logaritmus daného výrazu při daném základu  $z$

$$65. V = \frac{1}{3}\pi r^2 v, z = 5 \quad 66. y = \sqrt[3]{\frac{b^2}{4}}, z = 4 \quad 67. T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}, z = e \quad 68. y = \frac{a^2}{x\sqrt{y}}, z = a$$

Určete výraz  $V$ , je-li dán jeho logaritmus

$$69. \ln V = \ln 4 - \ln 3 + \ln \pi + 3 \ln r \quad 70. \log_2 V = 3 \log_2 x + (n+3) \log_2 y - 3$$

$$71. \log_a V = \frac{3}{4} \log_a(x+2) - 2 \log_a y \quad 72. \log_5 V = 2 \log_5(x-2) + 3 \log_5(x+2) - 2 \log_5(x^2-4)$$

### Výsledky kapitoly III

$$42. x \in \mathbb{R} \quad 43. x \in \mathbb{R} \quad 44. x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad 45. x \in \mathbb{R} \quad 46. x \in \mathbb{R} - \{1, -3\} \quad 47. x \in (-\infty, 5/3)$$

$$48. x \in (-5, +\infty) \quad 49. x \in (-\sqrt{2}, +\sqrt{2}) \quad 50. x \in \mathbb{R} \quad 51. x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad 52. x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$53. \text{sjednocení intervalů } \langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle, k \in \mathbb{Z} \quad 54. x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \quad 55. x \in \mathbb{R}$$

$$56. x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \quad 57. x \in \mathbb{R} - \{-5\} \quad 58. x \in (-3; 3) \quad 59. 0 \quad 60. \text{není definován} \quad 61. 1$$

$$62. 1/3 \quad 63. -2 \quad 64. \text{není definován}$$

$$65. \log_5 V = \log_5 \pi + 2 \log_5 r + \log_5 v - \log_5 3 \quad 66. \log_4 y = \frac{2}{3} \log_4 b - \frac{1}{3}$$

$$67. \ln T = \ln 2 + \ln \pi + \frac{1}{2}(\ln l - \ln 2 - \ln g) \quad 68. \log_a y = 2 - \log_a x - \frac{1}{2} \log_a y$$

$$69. V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad 70. V = \frac{x^3 y^{n+3}}{8} \quad 71. V = \sqrt[4]{(x+2)^3/y^2} \quad 72. V = \frac{(x-2)^2(x+2)^3}{(x^2-4)^2} = x+2$$

### IV. Rovnice exponenciální, logaritmické, s odmocninami

Řešte dané rovnice a proveďte zkoušku.

$$73. 3^x = 81 \quad 74. \left(\frac{1}{4}\right)^x = 16 \quad 75. 2^x = -8 \quad 76. 2011^x = 1$$

$$77. e^x = \frac{1}{e} \quad 78. \sqrt{128} = 8^x \quad 79. \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{8}{27} \quad 80. 5^{x^2-2} \cdot 5^{3x+4} = 1$$

$$81. x^2 e^x + 3x e^x - 4e^x = 0 \quad 82. (5x-1)e^x + 5e^x = 0 \quad 83. e^{\frac{1}{x}} + x e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$84. \ln x = 0 \quad 85. \ln x = 1 \quad 86. \ln x = 3 \quad 87. \ln x + 1 = 0$$

$$88. \ln(\sqrt{x}) = -2 \quad 89. \ln(x+1) = 0 \quad 90. 2 \ln x - 1 = 0 \quad 91. 2x + 3x \ln x = 0$$

$$92. \ln(x^2 - 3) = 0 \quad 93. \frac{\sqrt{x}}{2} - 1 = 0 \quad 94. \sqrt{3x+4} = x \quad 95. x - \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} = 0$$

$$96. 2x \cdot \sqrt{x+2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x+2}} = 0 \quad 97. 9^x = 6^x + 4^x \quad 98. 8 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 1 = 0$$

$$99. \log \sqrt{3x+4} - \log \sqrt{7x-3} = 1 + \log \sqrt{0,11} \quad 100. x^{\log x} + 10x^{-\log x} = 11$$

### Výsledky kapitoly IV

$$73. x = 4 \quad 74. x = -2 \quad 75. \text{nemá řešení} \quad 76. x = 0 \quad 77. x = -1 \quad 78. x = 7/6 \quad 79. x = -3$$

$$80. x_1 = -1, x_2 = -2 \quad 81. x_1 = 1, x_2 = -4 \quad 82. x = -\frac{4}{5} \quad 83. x = 1 \quad 84. x = 1 \quad 85. x = e$$

$$86. x = e^3 \quad 87. x = e^{-1} = 1/e \quad 88. x = \frac{1}{e^4} \quad 89. x = 0 \quad 90. x = \sqrt{e} \quad 91. x = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} \quad 92. x = \pm 2$$

93.  $x = 4$  94.  $x = 4$ , ( $x = -1$  nevyhovuje) 95.  $x_1 = 0$ ,  $x_{2,3} = \pm 2$  96.  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -8/5$  97.  $x = \frac{\log \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\log \frac{3}{2}}$  98.  $x_1 = -3, x_2 = 0$  99.  $x = \frac{1}{2}$  100.  $x_1 = 10, x_2 = \frac{1}{10}, x_3 = 1$

## V. Nerovnice lineární, kvadratické, s absolutní hodnotou

Řešte dané nerovnice:

101.  $2 - 3x \geq 4$  102.  $\frac{4x-3}{5} < \frac{3x-4}{2} - \frac{2x-5}{3}$  103.  $x^3 - 1 > 0$  104.  $x^2 - 4 \geq 0$   
 105.  $2x^2 + 5x < 0$  106.  $x^2 + \frac{7}{2}x - 2 \geq 0$  107.  $x^2 - 2x + 5 < 0$  108.  $x^2 + 1 > 0$   
 109.  $x^2 - 3x + 2 > 0$  110.  $5(x-1) - x(7-x) \leq x^2$  111.  $|x-3| < 2$  112.  $|x-3| < 0$   
 113.  $|3x+2| \leq 1$  114.  $|x-1| < |x-3|$  115.  $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| \leq 1$  116.  $\frac{3}{x-3} < 0$   
 117.  $\frac{x+2}{2x-1} \leq 1$

## Výsledky kapitoly V

101.  $x \in (-\infty, -2/3)$  102.  $x \in (-8, +\infty)$  103.  $x \in (1, +\infty)$  104.  $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$   
 105.  $x \in (-5/2, 0)$  106.  $x \in (-\infty, -4) \cup (1/2, +\infty)$  107.  $\emptyset$  108.  $x \in \mathbb{R}$  109.  $x \in (-5/2; \infty)$   
 110.  $x \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$  111.  $x \in (1, 5)$  112.  $\emptyset$  113.  $x \in (-1, -1/3)$  114.  $x \in (-\infty, 2)$   
 115.  $x \in (-\infty, 0)$  116.  $x \in (-\infty, 3)$  117.  $x \in (-\infty, 1/2) \cup (3, +\infty)$

## VI. Nerovnice exponenciální a logaritmické

Řešte dané nerovnice:

118.  $5^x \leq 625$  119.  $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{125}{27}$  120.  $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 8$  121.  $e^x + xe^x > 0$   
 122.  $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$  123.  $9^x + 6 < 5 \cdot 3^x$  124.  $\ln x < 0$  125.  $\ln x \geq 1$   
 126.  $\ln(x+4) \leq 0$  127.  $x \ln x + 2x \geq 0$  128.  $\log \frac{x-2}{x+3} < 0$  129.  $\log_3 x + \log_3(x-2) \geq 1$

## Výsledky kapitoly VI

118.  $x \in (-\infty, 4)$  119.  $x \in (-3, +\infty)$  120.  $x \in (-\infty, -3)$  121.  $x \in (-1, +\infty)$  122.  $x \in (0; \infty)$   
 123.  $x \in \left(\frac{\log 2}{\log 3}; 1\right)$  124.  $x \in (0, 1)$  125.  $x \in (e, +\infty)$  126.  $x \in (-4, -3)$  127.  $x \in (1/e^2, +\infty)$   
 128.  $x \in (2; \infty)$  129.  $x \in (3; \infty)$

## VII. Goniometrické funkce

Upravte (zjednodušte) dané výrazy. Určete, pro jaká  $x$  mají smysl.

130.  $\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$  131.  $\cotg x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  132.  $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}$  133.  $\frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos x - \cos^3 x}$   
 134.  $\frac{\cos x - \sin x}{1 - \tan x}$

Najděte řešení daných goniometrických rovnic:

135.  $\sin^2 x - \sin x = 0$  136.  $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$  137.  $\sin 2x = \cotg x$  138.  $\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = 0$   
 139.  $\cos^2 x + \cos x = 0$  140.  $2 \cos^2 x = \sin x + 1$

## Výsledky kapitoly VII

130.  $1 - \sin x, x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  131.  $\frac{1}{\sin x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$  132.  $1, x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$   
 133.  $\cotg x, x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  134.  $\cos x, x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  135.  $x = k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$   
 136.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  137.  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  138.  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$   
 139.  $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, x_2 = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  140.  $x_1 = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_3 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

## VIII. Komplexní čísla

Upravte na tvar  $a + bi$ :

141.  $i^3$  142.  $i^4$  143.  $i^5 - i^6$  144.  $(3 + 7i)i$  145.  $(2 + 3i)(3 - 4i)$  146.  $(3 - 2i)^2$   
147.  $(-2 + 3i)(-2 - 3i)$  148.  $(2 - 3i)(1 + 4i) - (2 + 3i)(1 - 4i)$  149.  $\frac{2 + 3i}{-5 + 7i}$

Určete absolutní hodnotu (velikost) komplexního čísla:

150.  $z = 3 + 4i$  151.  $z = 4 - 3i$  152.  $z = -3i$  153.  $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$   
154.  $z = -1 + \frac{1}{2}i$  155.  $z = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}i$  156.  $z = \cos x + i \sin x, x \in \mathbb{R}$

Určete gonimetrický, resp. algebraický, tvar komplexního čísla:

157.  $z = 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right)$  158.  $z = \sqrt{3} + i$

## Výsledky kapitoly VIII

141.  $-i$  142.  $1$  143.  $i + 1$  144.  $3i - 7$  145.  $18 + i$  146.  $5 - 12i$  147.  $13$  148.  $10i$  149.  $\frac{11}{74} - \frac{29}{74}i$   
150.  $|z| = 5$  151.  $|z| = 5$  152.  $|z| = 3$  153.  $|z| = 1$  154.  $|z| = \frac{\sqrt{5}}{2}$  155.  $|z| = 1$  156.  $|z| = 1$   
157.  $z = \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i$  158.  $z = 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right)$

## IX. Analytická geometrie v rovině

159. Napište parametrický, obecný a směrnicový tvar rovnice přímky, která prochází body  $A = [5, 2]$ ,  $B = [9, 4]$ . Načrtněte obrázek.

Určete a načrtněte kuželosečky, které jsou dány následujícími rovnicemi.

160.  $x = y^2 - 3$  161.  $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 2 = 0$   
162.  $x^2 + y^2 + 6y - 3 = 0$  163.  $x^2 - 4y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$

Načrtněte rovinný obrazec D, který je omezen danými křivkami nebo je zadán nerovnicemi:

164.  $x + y \leq 1, x + 1 \geq y \geq 0$  165.  $y \geq 0, y \leq 2 - x, x \geq y^2$   
166.  $2x + 2y = 5, xy = 1$  167.  $x^2 + y^2 \leq 4x, y \geq 0$

## Výsledky kapitoly IX

159.  $x = 5 + 4t, y = 2 + 2t, t \in \mathbb{R}; x - 2y - 1 = 0; y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$   
160. parabola, osa v ose  $x$ , vrchol  $V = [-3, 0]$ , otevřená doprava  
161. elipsa  $S = [2, -1]$ ,  $a = 2, b = \sqrt{2}$  162. kružnice  $S = [0, -3]$ ,  $r = \sqrt{12}$   
163. hyperbola  $S = [3, 1]$ ,  $a = 4, b = 2$  164. rovnoramenný trojúhelník nad osou  $x$ , souměrný podle osy  $y$   
165. "křivočarý" trojúhelník v prvním kvadrantu ohraničený dvěma úsečkami a částí paraboly  
166. obrazec ohraničen v prvním kvadrantu úsečkou a rovnoosou hyperbolou  
167. posunutý půlkruh v prvním kvadrantu,  $S = [2, 0]$

## Literatura:

- [1] J. Černý a kol.: **Matematika - přijímací zkoušky na ČVUT**. Nakladatelství ČVUT Praha, 2007
- [2] J. Petáková: **Matematika - Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na VŠ**. Prometheus, Praha 1997
- [3] J. Neustupa: **Matematika I**. Skriptum Strojní fakulty. Nakladatelství ČVUT, Praha 2017 (též starší vydání 2010,...)
- [4] L. Samková: **Sbírka příkladů z matematiky**. Fak. architektury, Nakladatelství ČVUT, Praha 2002
- [5] J. Polák: **Přehled středoškolské matematiky**. Prometheus, Praha 2016