

The background of the slide features a complex, abstract network diagram. It consists of numerous nodes of varying sizes, some colored in dark blue, light blue, and grey, connected by a web of thin, light grey lines. The nodes are distributed across the frame, with some appearing as large, prominent circles and others as smaller dots. The overall aesthetic is technical and modern, suggesting themes of connectivity, data, or mathematical structures.

TROJNÝ INTEGRÁL

Fubiniova věta. Transformace do cylindrických souřadnic. Objem tělesa, výpočet mechanických charakteristik těles.

Výpočet trojných integrálů pomocí transformace do sférických souřadnic.

Výpočet trojného integrálu

Dělení kvádrů a jeho norma:

Nechť $\langle a; b \rangle$, $\langle c; d \rangle$ a $\langle r; s \rangle$ jsou postupně uzavřené intervaly na souřadných osách x, y, z . Pak kartézský součin $K = \langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle \times \langle r; s \rangle$ je kvádrem v E_3 , jehož hrany jsou rovnoběžné se souřadnými osami x, y nebo z .

Kvádr K lze rozdělit sítí rovin rovnoběžných s rovinami xy, xz nebo yz na n dílčích kvádrů $K_1, \dots, K_n$. Systém těchto kvádrů nazýváme dělení kvádrů K . Pojmenujeme-li popsané dělení D , pak normou dělení D nazýváme délku nejdelší ze všech hran kvádrů $K_1, \dots, K_n$. Normu dělení D značíme $\|D\|$. Jsou-li délky hran dílčích kvádrů $K_1, \dots, K_n$ rovny $\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1, \dots, \Delta x_n, \Delta y_n, \Delta z_n$ můžeme normu $\|D\|$ vyjádřit:

$$\|D\| = \max\{\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1, \dots, \Delta x_n, \Delta y_n, \Delta z_n\}$$

Výpočet trojného integrálu

Riemannovy součty a jejich limita:

Předpokládejme, že $f(x; y; z)$ je omezená funkce na kvádru $K = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle r, s \rangle$. Necht' D je dělení kvádru K na dílčí kvádry $K_1, \dots, K_n$, označme délky hran kvádrů $K_1, \dots, K_n$ postupně $\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1, \dots, \Delta x_n, \Delta y_n, \Delta z_n$. Necht' ν je systém zvolených bodů $Z_i \in K_i$ ($i = 1, \dots, n$). Riemannovým součtem funkce f na kvádru K , odpovídajícím dělení D a systému ν vybraných bodů $Z_1, \dots, Z_n$, nazýváme součet

$$s(f; D; \nu) = \sum_{i=1}^n f(Z_i) \cdot \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

Říkáme, že číslo S je limitou Riemannových součtů $s(f; D; \nu)$ pro $\|D\| \rightarrow 0_+$, jestliže ke každému danému $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D kvádru K a pro každý zvolený systém ν platí:

$$\|D\| < \delta \Rightarrow |s(f; D; \nu) - S| < \epsilon.$$

Píšeme: $\lim_{\|D\| \rightarrow 0_+} s(f; D; \nu) = S$.

Výpočet dvojného integrálu pomocí Fubiniovy věty

Trojný integrál na obdélníku:

Jestliže limita $\lim_{\|D\| \rightarrow 0_+} s(f; D; \nu) = S$ existuje, pak číslo S nazýváme trojným integrálem funkce f na kvádru K . Integrál obvykle značíme

$$\iiint_K f(x, y) dx dy dz \text{ nebo } \iiint_K f \, dx dy dz$$

Jestliže limita existuje, říkáme, že „trojný integrál $\iiint_O f \, dx dy$ existuje“ nebo že „funkce f je integrovatelná na kvádru K “.

Výpočet dvojného integrálu pomocí Fubiniovy věty

Trojný integrál na obecné omezené množině v E_3 :

Předpokládejme, že M je omezená množina v E_3 a $f(x, y, z)$ je omezená funkce na M . Nechť $K = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \times \langle r, s \rangle$ je kvádr, ve kterém je množina M obsažena. Definujme

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{pro } [x, y, z] \in M \\ 0 & \text{pro } [x, y, z] \in K \setminus M \end{cases}$$

Pak trojným integrálem funkce f na množině M rozumíme trojný integrál funkce f^* na kvádru K (pokud tento integrál existuje). Trojný integrál f na M značíme

$$\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz \text{ nebo } \iiint_K f^* dx dy dz.$$

- pro trojný integrál se někdy používá název objemový integrál
- Pokud integrál $\iiint_K f^* dx dy dz$ existuje, pak říkáme, že také „trojný integrál $\iiint_K f^* dx dy dz$ existuje" nebo že „funkce f je integrovatelná na množině M ". Množinu M nazýváme integrační obor nebo obor integrace a integrovanou funkci f často nazýváme integrand.

Měřitelná množina v E_3 a její Jordanova míra

Předpokládejme, že M je omezená množina v E_3 . Říkáme, že tato množina M je měřitelná (v Jordanově smyslu), jestliže konstantní funkce $f(x, y) = 1$ je integrovatelná na M . V tomto případě nazýváme číslo

$$\mu_3(M) = \iiint_M dx dy dz$$

třírozměrnou Jordanovou mírou množiny M .

Příklady množin, jejichž třírozměrná míra je rovna nule:

- a) Množiny, sestávající z konečného počtu bodů nebo křivek.
- b) Plochy, které jsou grafy spojitých funkcí dvou proměnných $z = \varphi(x, y)$ nebo $y = \psi(x, z)$ nebo $x = \vartheta(y, z)$ definovaných na omezených uzavřených množinách v E_2 .
- c) Tzv. jednoduché hladké plochy nebo jednoduché po částech hladké plochy.

Měřitelná množina v E_2 a její Jordanova míra

Věta:

- a) Sjednocení konečně mnoha množin míry nula je množina míry nula.
- b) Je-li N množina míry nula a $M \subset N$, pak M je také množina míry nula.

Věta: (Nutná a postačující podmínka pro to, aby množina v E_3 byla měřitelná.)

Množina $M \subset E_3$ je měřitelná (v Jordanově smyslu) právě tehdy, je-li omezená a $\mu_3(\partial M) = 0$.

Věta: (Postačující podmínka pro existenci dvojného integrálu)

Nechť M je měřitelná množina v E_3 a f je omezená a spojitá funkce na M . Pak trojný integrál $\iiint_M f \, dx dy dz$ existuje.

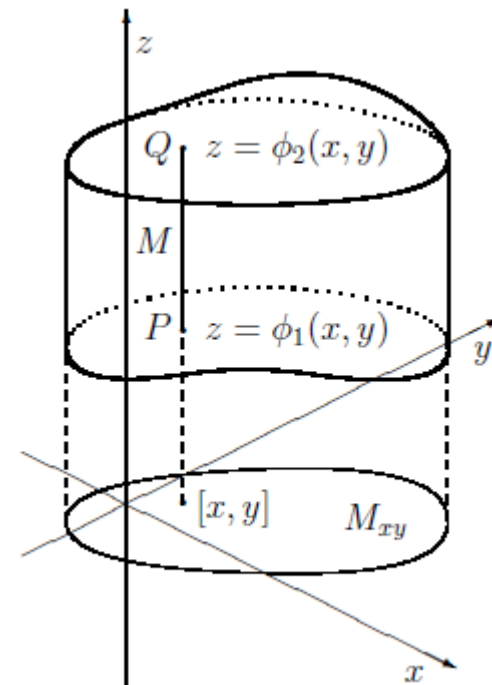
(předpoklad spojitosti f na M je splněn i při nespojitosti f na množině míry nula v M)

Výpočet dvojného integrálu - Fubiniho věta

Elementární obor integrace v E_3 :

Nechť M_{xy} je měřitelná uzavřená množina v E_2 a $z = \varphi_1(x, y)$ a $z = \varphi_2(x, y)$ jsou spojité funkce na M_{xy} takové, že $\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y)$ pro všechna $[x, y] \in M_{xy}$. Pak množinu $M = \{[x, y, z] \in E_3; [x, y] \in M_{xy}, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\}$ nazýváme elementárním oborem integrace vzhledem k rovině xy .

Analogicky můžeme definovat i elementární obor integrace vzhledem k rovině xz a elementární obor vzhledem k rovině yz . Elementární obory integrace jsou měřitelnými množinami v E_3 .



Výpočet dvojného integrálu - Fubiniho věta

Fubiniho věta pro trojný integrál:

Nechť M je elementární obor integrace vzhledem k rovině xy . Nechť funkce $f(x, y, z)$ je

spojitá na M . Pak $\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{M_{xy}} \left(\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$.

$$\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{M_{xy}} \left(\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

trojný integrál dvojnásobný integrál jednoduchý integrál

* pro spojitou funkci a elementární obor integrace nezávisí na pořadí integrálů vpravo

Aplikace dvojného integrálu

- **hmotnost tělesa:** $m = \iiint_M \rho(x, y, z) dx dy dz$, kde $M \subset E_3$ je měřitelná množina a $\rho(x, y, z)$ je hustota

- **statický moment:** vzhledem k rovině xy : $m_{xy} = \iiint_M z \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$

$$\text{vzhledem k rovině } xz: m_{xz} = \iiint_M y \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\text{vzhledem k rovině } yz: m_{yz} = \iiint_M x \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

- **těžiště:** $x_T = \frac{m_{yz}}{m}$, $y_T = \frac{m_{xz}}{m}$, $z_T = \frac{m_{xy}}{m}$

- **moment setrvačnosti:**

$$\text{vzhledem k rovině } xy: J_{xy} = \iiint_M z^2 \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz \parallel \text{vzhledem k ose } x: J_x = \iiint_M (y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\text{vzhledem k rovině } xz: J_{xz} = \iiint_M y^2 \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz \parallel \text{vzhledem k ose } y: J_y = \iiint_M (x^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\text{vzhledem k rovině } yz: J_{yz} = \iiint_M x^2 \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz \parallel \text{vzhledem k ose } z: J_z = \iiint_M (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\text{vzhledem k počátku } O: J_z = \iiint_M (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Transformace do cylindrických souřadnic

- **Polární souřadnice v E_2 :**

bod X lze určit souřadnicemi r, φ, ω , kde r je vzdálenost X' od počátku O a φ je úhel mezi kladnou částí osy x a úsečkou OX' , $\omega \in \mathbb{R}$ je orientovaná vzdálenost XX'

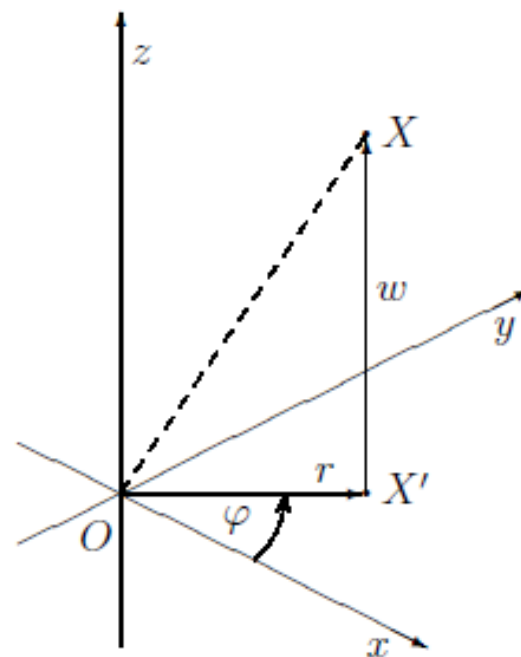
- Vztah mezi kartézskými souřadnicemi x, y a polárními souřadnicemi

r, φ je dán rovnicemi:

$$x = r \cdot \cos \varphi, y = r \cdot \sin \varphi, z = \omega \text{ odkud plyne } r \geq 0, \varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

- při integraci se mění meze dle substituce a $dx dy$ se nahradí výrazem

$$r \, dr d\varphi d\omega$$



Transformace do sférických souřadnic

- bod X lze určit souřadnicemi r, φ, ϑ , kde r je vzdálenost X od počátku O a φ je úhel mezi kladnou částí osy x a úsečkou $\overline{OX'}$ (kde X' je ortogonální projekce bodu X na rovinu xy) a ϑ je úhel mezi úsečkou $\overline{OX'}$ a úsečkou $\overline{OX}$ (měřený od úsečky $\overline{OX'}$)

- Vztah mezi kartézskými souřadnicemi x, y a zobecněnými polárními souřadnicemi r, φ je dán rovnicemi:

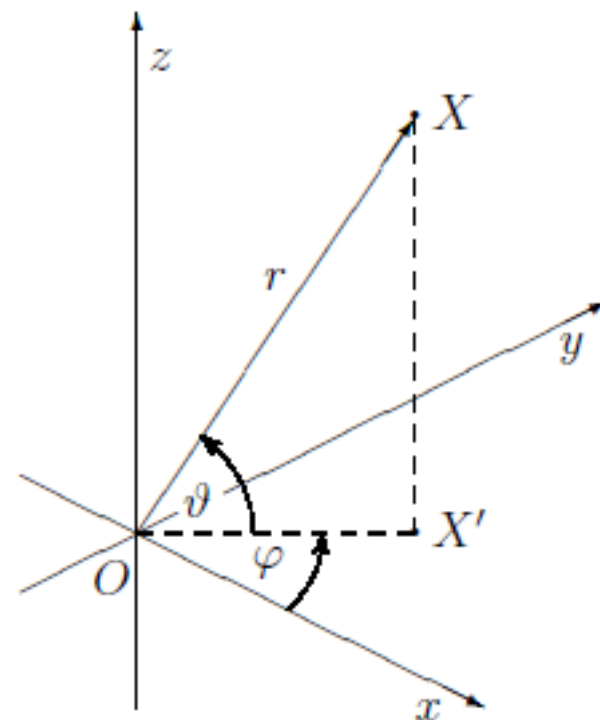
$$x = r \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi,$$

$$y = r \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi,$$

$$z = r \cdot \sin \vartheta$$

$$\text{kde } r \geq 0, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, \vartheta \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$$

- při integraci se mění meze dle substituce a $dx dy$ se nahradí výrazem $r^2 \cos \vartheta \, dr d\varphi d\vartheta$



Transformace do zobecněných cylindrických a sférických souřadnic

- **zobecněné cylindrické souřadnice:**

$$x = x_0 + ar \cdot \cos \varphi,$$

$$y = y_0 + br \cdot \sin \varphi,$$

$$z = z_0 + c\omega, \text{ kde } [x_0, y_0, z_0] \text{ je zvolený bod z } E_3 \text{ a } a, b, c > 0 \text{ jsou parametry}$$

- při integraci se mění meze dle substituce a $dx dy$ se nahradí výrazem $abcr \, dr d\varphi d\omega$

- **zobecněné sférické souřadnice:**

$$x = x_0 + ar \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi,$$

$$y = y_0 + br \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi,$$

$$z = z_0 + cr \cdot \sin \vartheta, \text{ kde } [x_0, y_0, z_0] \text{ je zvolený bod z } E_3 \text{ a } a, b, c > 0 \text{ jsou parametry}$$

- při integraci se mění meze dle substituce a $dx dy$ se nahradí výrazem $abcr^2 \cos \vartheta \, dr d\varphi d\omega$