Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2016 Bc. Nikola Pajerová

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Nikola Pajerová

Cvičebnice Mongeova promítání

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: **RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.**

Studijní program: **Matematika**

Studijní obor: **Učitelství matematiky - deskriptivní geometrie pro střední školy**

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Kutné Hoře dne 23.7. 2016 Bc. Nikola Pajerová

Název práce: Cvičebnice Mongeova promítání

Autor: Bc. Nikola Pajerová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D., katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: V této práci se nachází různé příklady z Mongeova promítání. Na začátku je shrnuta teorie, důležitá k pochopení promítání a k řešení příkladů. Jsou zde také příklady k řešení osové afinity a středové kolineace. Poté následuje kapitola na zobrazení všech typů hranatých a rotačních těles, řešených na středních školách. Následuje kapitola, ve které jsou konstruovány řezy těmito tělesy. V poslední kapitole pak jsou řešeny průniky dvou těles od každého druhu.

Klíčová slova: Mongeovo promítání, osová afinita, středová kolineace, řešené příklady, zobrazení těles, řezy těles, průniky těles

Title: The workbook of Monge projection

Author: Bc. Nikola Pajerová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: In this thesis there can be found various examples from Monge projection. The theory is summarized in the beginning, which is important of understanding the projection and for solving the examples. There are also examples of solving axial affinity and central collineation. Then there is a chapter about the projection of all types of angular and rotational solids, which are solved at the secondary schools. Then follows a chapter, where the sections of these solids are constructed. In the last chapter, there are solved intersection of solids from each type.

Keywords: Monge projection, axial affinity, central collineation, solved examples, projection of solids, solid sections, solid intersections

Na tomto místě bych chtěla poděkovat vedoucí této práce RNDr. Janě Hromadové, Ph.D. za spoustu cenných rad, trpělivost, ochotu a čas se mnou strávený nad touto prací. Také děkuji všem, kteří byli trpěliví a dali mi čas a prostor k psaní této práce.

Obsah

Úvod

Cílem této práce bylo sestavit cvičebnici Mongeova promítání se středoškolskými tématy. Součástí práce je i potřebná základní teorie, přičemž jsou předpokládány pouze znalosti kuželoseček.

V této práci jsou v *1. kapitole* shrnuty základy Mongeova promítání i s potřebnými příklady. Další kapitoly, které jsou hlavní složkou práce, se pak týkají řešení jednotlivých příkladů, přičemž *2. kapitola* se zabývá zobrazením těles (jak hranatých, tak rotačních) a v *3. kapitole* jsou řešeny jejich rovinné řezy. Poslední kapitola je věnována průniku všech typů těchto těles. Příklady jsou řazeny podle obtížnosti a jsou v nich zahrnuty různé typy (dá se říci, že všechny varianty), které by se mohly na střední škole vyskytnout. K *2., 3. a 4. kapitole* může čtenář nalézt krokovaná řešení v PDF na přiloženém CD, kde je také daná situace vyobrazena v prostoru a je možné s objekty manipulovat v přiloženém souboru v programu Rhinoceros, v němž jsem všechny obrázky (a též i zadání příkladů) vytvořila.

Aby nedocházelo k nejasnostem, ještě poznamenejme, že obrázky u jednotlivých příkladů nejsou ve skutečné velikosti (neboť by nebyly dodrženy okraje stránky). Obrázky ve skutečném měřítku můžete nalézt na přiloženém CD.

V řešeních jednotlivých příkladů v *Kapitolách 2, 3* a *4* jsou některé části vyznačeny tučnou kurzívou – jedná se o možné „záchytné body“, pokud byste si chtěli řešení projít jen letmo (samozřejmě srozumitelnost těchto vyznačených částí může být pro každého jiná – např. někomu by to mohlo připadat příliš stručné – proto se jedná jen o navrhované „záchytné body“).

1. Potřebné základy Mongeova promítání

Mongeovo promítání je jedna ze základních zobrazovacích metod. Pokud už jste se učili kótované promítání, nebude pro vás toto promítání nikterak složité. Jelikož je tato práce cvičebnicí, budeme teorii vykládat jen v malé míře. Podrobnější informace můžete nalézt například v [2] nebo v [4].

Mongeovo promítání je rovnoběžné ortogonální (tj. kolmé) promítání na dvě k sobě kolmé průmětny. (*Pozn.*: Pro přehlednost zobrazovaného objektu se někdy přidává ještě třetí průmětna, kolmá k těmto dvěma.) Vodorovné rovině se říká **půdorysna** (značí se π) a svislé rovině **nárysna** (značí se ν). Jejich průsečnice se nazývá **základnice**. Pro jednoznačné umístění bodu o daných souřadnicích se na základnici umisťuje ještě **počátek soustavy souřadnic**.

Soustava souřadnic může být dvou typů: pravotočivá a levotočivá. Vždy platí, že osa z leží v nárysně a je kolmá na základnici (a samozřejmě prochází jako všechny osy počátkem) a osa y leží v půdorysně (též je kolmá na základnici). Kladná část osy z je „nad“ půdorysnou a kladná část osy y je „před“ nárysnou. Pokud je kladná část osy x napravo od počátku, jedná se o *levotočivou soustavu souřadnic*, pokud je kladná část nalevo od počátku, jedná se o *pravotočivou soustavu souřadnic* (k zapamatování může sloužit např. pravidlo uvedené v [4], str. 69).

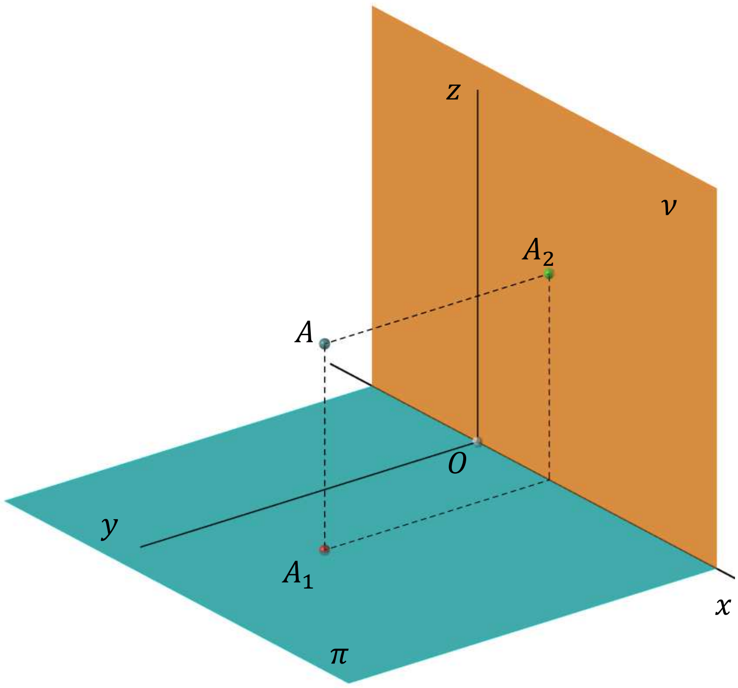
1.1 Zobrazení bodu, přímky a roviny, jejich vzájemná poloha, přímka kolmá k rovině a rovina kolmá k přímce

Zobrazení bodu

Bod A v prostoru promítáme kolmo na π a kolmo na ν. Tyto obrazy bodu získáme jednoduše tak, že vedeme bodem A (ležícím v prostoru) kolmici k půdorysně a k nárysně. Kde tyto kolmice protnou průmětny, tam jsou obrazy daného bodu.

Kolmému průmětu bodu A do π se říká **půdorys** nebo **první průmět** a značí se A_1, kolmý průmět do ν se značí A_2 a nazývá se **nárys** nebo **druhý průmět**. Průmět bodu A můžete názorně vidět na *obrázku 1.1.1*. Abychom mohli daný bod narýsovat do sešitu nebo na tabuli (těmto plochám, na které kreslíme, se říká **nákresna**), musíme jednu z průměten otočit kolem základnice do druhé průmětny tak, že splyne kladná část jedné se zápornou částí druhé roviny (viz *obrázek 1.1.2*, otočení půdorysny do nárysny). Tomuto otočení se říká **sdružení průměten** a obrazům půdorysu a nárysu bodu se říká

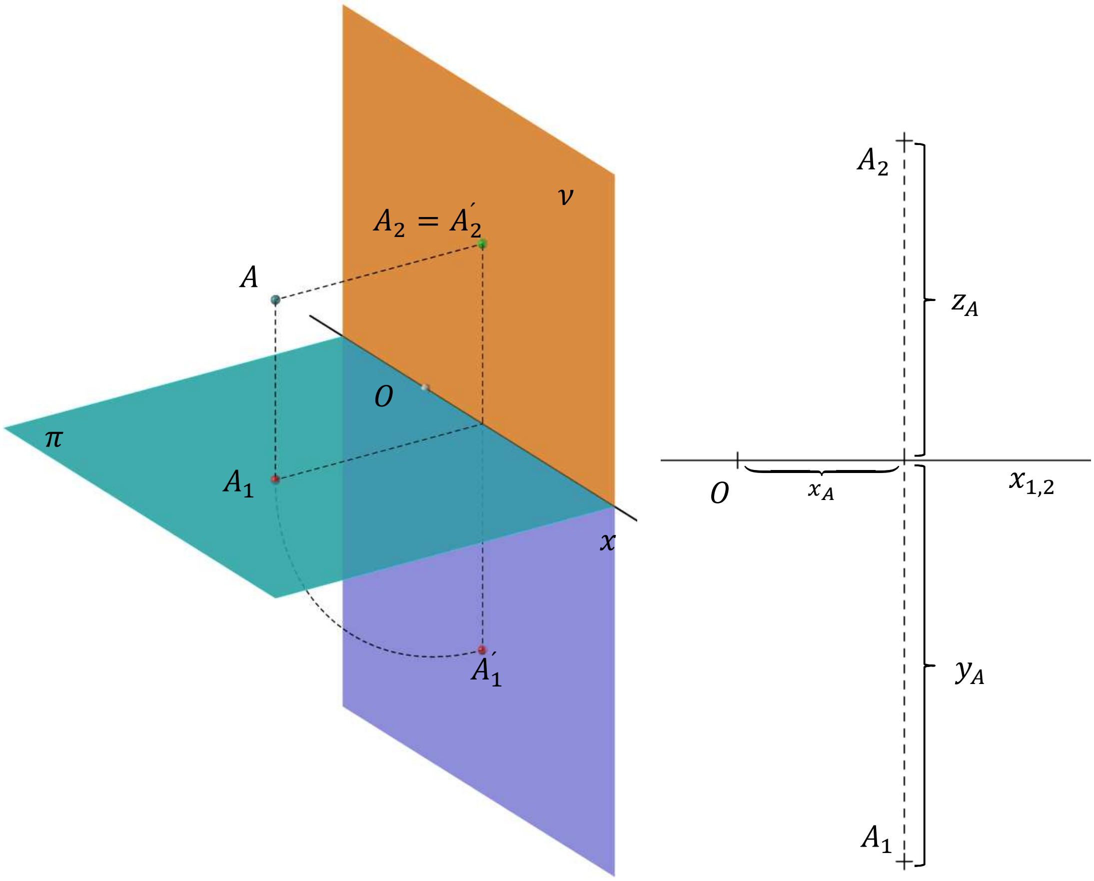
sdružené průměty, speciálně **první obraz bodu A** a **druhý obraz bodu A**. Většinou se nazývají také **půdorys** a **nárys**. Spojnice půdorysu a nárysu bodu (na nákresně) se nazývá **ordinála** a je kolmá k základnici. Promítáním nám vlastně vznikl v prostoru pravoúhlý čtyřúhelník s vrcholy A, A_1, A_2 a bodem, který je v nákresně průsečíkem ordinály se základnicí (nebo v prostoru by se jednalo o půdorys bodu A_2, resp. nárys bodu A_1). Tedy vzdálenost bodu A_1 od základnice je vlastně vzdálenost bodu A od nárysny a vzdálenost bodu A_2 od základnice je rovna vzdálenosti bodu A od půdorysny (důvod proč tomu tak je, je také možné ukázat na tom, že základnice je vlastně půdorys nárysny a též i nárys půdorysny – o tomto více v následující kapitole o *Zobrazení roviny*).



Obr. 1.1.1: Zobrazení bodu

Přímku kolmou k průmětně nazýváme **promítací přímka** – zde rozlišujeme dvě možnosti: půdorysně promítací (tj. kolmá k půdorysně, v *obrázku 1.1.1* je to přímka $\overleftrightarrow{AA_1}$) a nárysně promítací. Průmět bodu by se tedy dal definovat takto:

Půdorys bodu je průsečík půdorysny a půdorysně promítací přímky, která prochází daným bodem. Nárys daného bodu je průsečík nárysně promítací přímky daného bodu a nárysny.



Obr. 1.1.2: Sdružení průměten do nárysny, zobrazení v Mongeově promítání

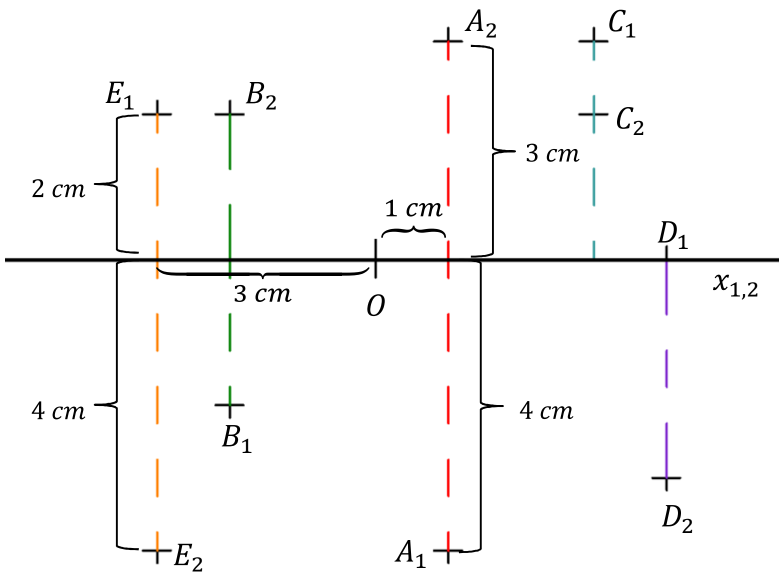
Příklad:

Zobrazte průměty bodů $A = [1; 4; 3]$, $B = [-2; 2; 2]$, $C = [3; -3; 2]$, $D = [4; 0; -3]$ a $E = [-3; -2; -4]$.

Řešení:

Body zobrazíme jednoduše vynesením jejich souřadnic na obrazy os. Průměty bodu A sestrojíme tak, že na osu x naneseme napravo od počátku 1 cm a od tohoto bodu kolmo dolů od osy x 4 cm – tento bod ležící v půdorysně je bod A_1. Bod A_2 leží v nárysně a sestojíme ho podobně: od bodu na ose x (sestrojeného při konstrukci bodu A_1) naneseme kolmo vzhůru od osy x 3 cm a získáme tak nárys bodu A. Pokud má bod záporné souřadnice, jednoduše nanášíme vzdálenosti na opačnou část osy – viz *obrázek 1.1.3*.

Konstrukce bodu A je vyznačena červeně, pro bod B je vyznačena zeleně, pro bod C modře, pro bod D fialově a pro bod E oranžově (pro přehlednost jsou uvedeny vynášené vzdálenosti jen u bodu A a E).



Obr. 1.1.3: Zobrazení bodů

Zobrazení přímky

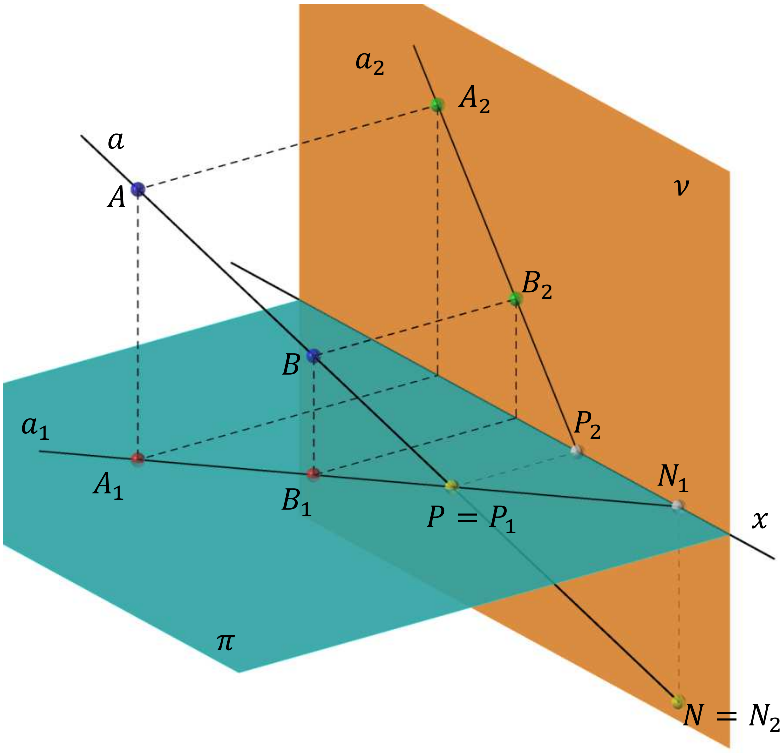
Jelikož je Mongeovo promítání rovnoběžné promítání, platí, že se zachovává mimo jiné incidence (tj. náležení). Tedy pokud přímka prochází dvěma body, musí i obraz této přímky procházet obrazy daných bodů. Tedy pro zobrazení přímky stačí znát souřadnice dvou bodů, které na ní leží – půdorys přímky musí procházet půdorysy bodů a stejně to musí platit i pro nárysy. Na *obrázku 1.1.4* je názorně ukázané zobrazení přímky pomocí dvou bodů, které na ní leží.

Nyní si zmiňme takzvanou **promítací rovinu přímky** – rovinu, která obsahuje danou přímku a je rovnoběžná se směrem promítání. Podobně jako u promítací přímky máme dva druhy promítacích rovin: půdorysně promítací a nárysně promítací. Obraz přímky tedy můžeme definovat podobně jako obraz bodu:

Půdorys dané přímky je průsečnice půdorysny a půdorysně promítací roviny, ve které daná přímka leží. Nárys přímky je průsečnice nárysně promítací roviny této přímky a nárysny.

Průsečík přímky s průmětnou se nazývá **stopník** – stopníky přímky tedy mohou být dva: **půdorysný stopník**, který se značí P a je to průsečík přímky s půdorysnou, a **nárysný stopník**, který se značí N a je to průsečík přímky s nárysnou. My budeme využívat jejich průměty, pro které platí (viz *obrázek 1.1.4*): $P = P_1$, neboť $P \in \pi$ a z toho důvodu také $P_2 \in x$, $N = N_2$, neboť $N \in \nu$ a proto také $N_1 \in x$.

Pozn.: V případě, že máme více přímek, je vhodné indexovat stopníky názvem příslušející přímky – např. P_1^a.



Obr. 1.1.4: Zobrazení přímky

Nyní jen ve stručnosti ***o polohách přímky vůči průmětnám a základnici***. Je-li $p \perp x, p \not\subset \pi, p \not\subset \nu$, pak $p_1 \equiv p_2 \perp x_{1,2}$. (*Pozn.:* stopníky přímky p se pak pro případ, že je mimoběžná s osou x, určují sklopením, tedy tento případ bude probrán v *Kapitole 1.4*) Promítací roviny této přímky splývají a tato jedna půdorysně i nárysně promítací rovina se nazývá **dvojnásob promítací**. Pokud je p různoběžná se základnicí, platí: $P^p = N^p \in x_{1,2}$. Pokud $p \perp \pi$ (resp. $p \perp \nu$), což je speciální případ rovnoběžnosti s průmětnou, ke které kolmá není, pak p_1 (resp. p_2) je bod (neboť pro tuto průmětnu je vlastně p promítací přímkou) a $p_2 \perp x_{1,2}$ (resp. $p_1 \perp x_{1,2}$). V této poloze má přímka pouze jeden stopník (v té rovině, na kterou je kolmá). Pokud $p \parallel x$, platí: $p \parallel \pi, p \parallel \nu$ a $p_1 \parallel x_{1,2}, p_2 \parallel x_{1,2}$. V tomto případě nemá přímka žádný stopník.

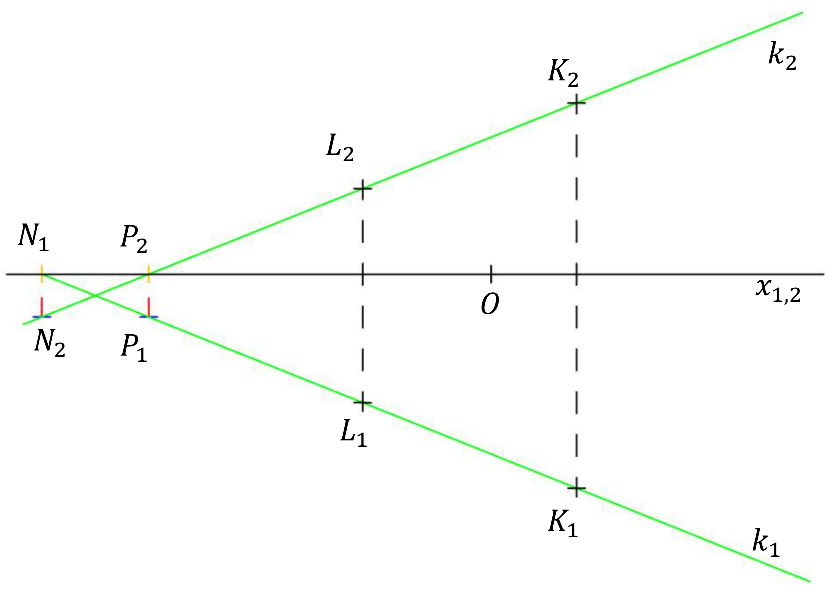
Dále pokud bude a rovnoběžná s průmětnou a $b \perp a$ (b není kolmá k průmětně), pak v průmětně, se kterou byla a rovnoběžná, se tento pravý úhel zobrazí také jako pravý – plyne to z toho, že máme rovnoběžné promítání a speciální polohu přímky a.

Příklady:

Pozn.: V příkladech jsou jednotlivé kroky odlišeny barevně: 1. krok = zelená, 2. krok = oranžová, 3. krok = červená, 4. krok = modrá, 5. krok = fialová, 6. krok = hnědá, 7. krok = tmavě zelená.

1) **Zobrazte průměty přímky k procházející body $K = [2; 5; 4]$ a $L = [-3; 3; 2]$. Dále určete stopníky této přímky. (obr. 1.1.5)**

Přímka prochází body K a L a to znamená, že i její průmět musí procházet průměty těchto bodů. Stačí tedy jen spojit body K_1 a L_1 a získáme tak první průmět přímky k, tj. k_1. Stejným postupem sestrojíme i druhý průmět přímky, tedy k_2. Dále chceme najít stopníky přímky, což jsou body, ve kterých přímka k protíná půdorysnu a nárysnu. Průsečík přímky s nárysnou, tj. nárysný stopník, vidíme v půdorysu a je to ten bod, kde průmět přímky k_1 protíná osu $x_{1,2}$ (můžeme si představit, že se na přímku díváme shora, což znamená, že nárysnu vidíme jako přímku a to právě přímku $x_{1,2}$ – tj. přímka protíná nárysnu v tomto pohledu tam, kde „protíná“ osu x). A stejně to platí i o průsečíku s půdorysnou – jako bychom se dívali na situaci zepředu, stopník je průsečík přímky s půdorysnou, která ze zobrazí jako přímka $x_{1,2}$. Tedy stručně symbolickým zápisem: $k_1 \cap x_{1,2} = \{N_1\}$ a $k_2 \cap x_{1,2} = \{P_2\}$. Dejme pozor na správné označení indexů stopníků – tedy N_1 leží na k_1 a proto musí mít index 1 (stejně pro nárys). Půdorys půdorysného stopníku najdeme jednoduše: musí ležet na k_1 a také na ordinále (tj. kolmici k ose $x_{1,2}$) jdoucí bodem P_2. Stejný postup aplikujeme na nárysný stopník.



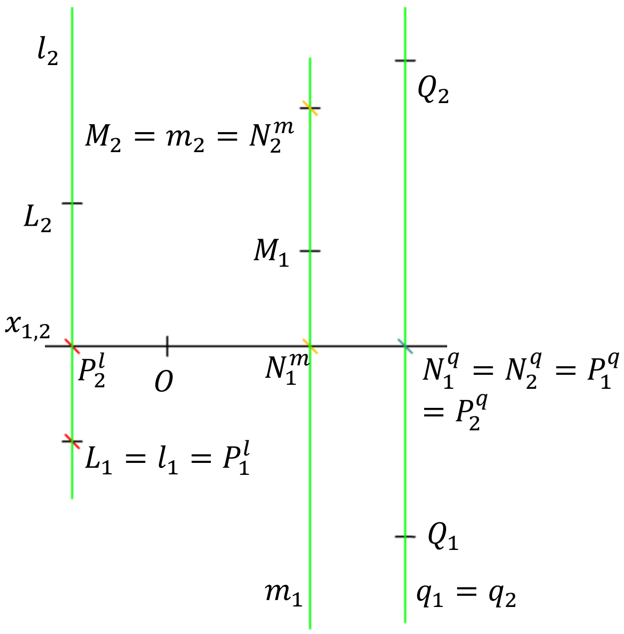
Obr. 1.1.5: Zobrazení přímky

2) **Zobrazte průměty přímky m, která prochází bodem $M = [3; -2; 5]$ a je kolmá na nárysnu, přímku l, která prochází bodem $L = [-2; 2; 3]$ a je kolmá na půdorysnu, a přímky q, která prochází bodem $Q = [5; 4; 6]$, je kolmá k ose $x_{1,2}$ a je s ní různoběžná. Určete jejich stopníky. (obr. 1.1.6)**

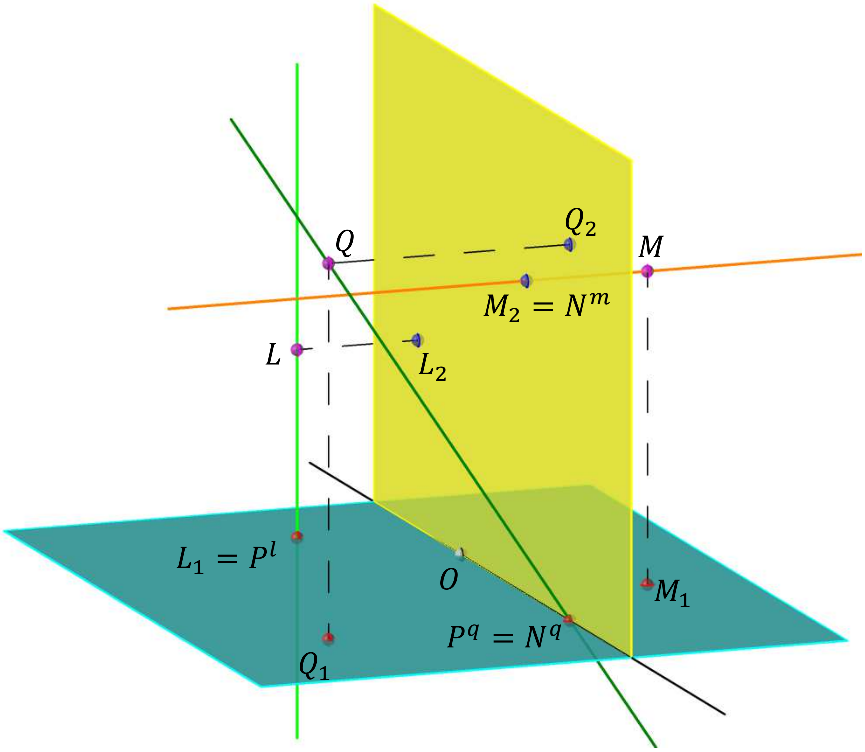
Průměty přímky m sestrojíme jednoduše – přímka má být kolmá na nárysnu, tedy v půdorysně se zobrazí jako přímka kolmá na osu $x_{1,2}$, která prochází bodem M_1, neboť se musí zachovat incidence (m_1 je znázorněna zeleně, přímka však nekončí na ose $x_{1,2}$, ale pokračuje i nad ní, což značí, že přímka leží i za nárysnou). Nárys této přímky bude bod a to přímo bod M_2 (to vyplývá z polohy přímky a zachování incidence). Přímka bude mít jen nárysný stopník, protože půdorysnu neprotíná. Průsečík přímky s nárysnou je bod N_2^m a musí ležet na m_2, což znamená, že nárysný stopník splyne s nárysem bodu M_2. První průmět stopníku, tj. N_1^m, musí ležet na ordinále a na ose $x_{1,2}$, což znamená, že spustíme kolmici na osu z bodu N_2^m a její průsečík s osou je bod N_1^m.

Průměty přímky l se sestrojí obdobně - l_1 bude bod a l_2 bude kolmice k ose. Přímka bude mít jen půdorysný stopník, který bude splývat s půdorysem přímky a jeho nárys bude na ordinále a na ose $x_{1,2}$.

Průměty přímky q budou (vzhledem k poloze přímky) splývat, budou kolmé na osu a budou procházet průměty bodu Q. Přímka protíná půdorysnu i nárysnu v jediném bodě na ose x, tedy tento průsečík přímky s osou budou body $N_1^q = N_2^q = P_1^q = P_2^q$. Prostorově je tento příklad zobrazen na dalším obrázku.



Obr. 1.1.6 a): Zobrazení přímky

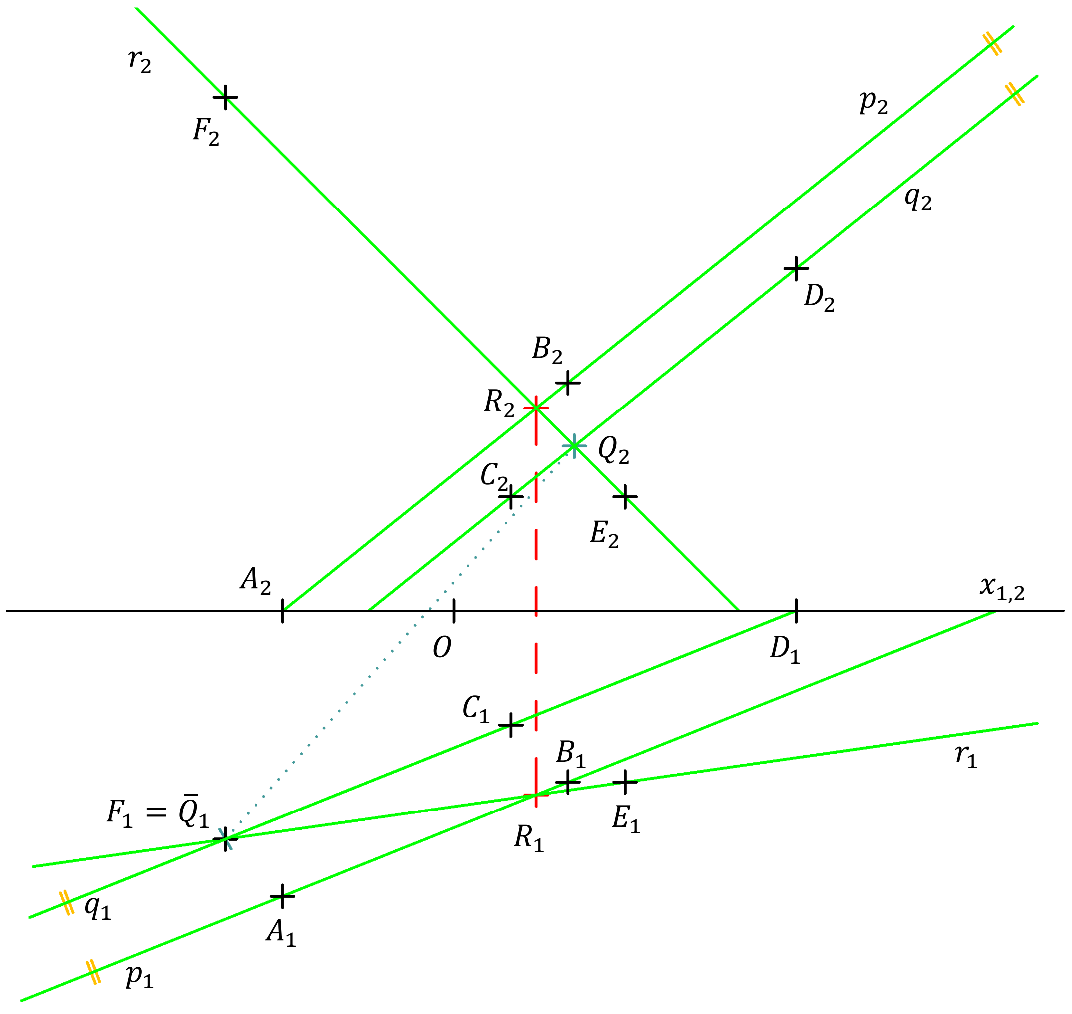


Obr. 1.1.6 b): Zobrazení přímky prostorově

3) Určete vzájemnou polohu přímek p, q a r, které jsou dány body A a B, C a D, E a F. $A = [-3; 5; 0]$, $B = [2; 3; 4]$, $C = [1; 2; 2]$, $D = [6; 0; 6]$, $E = [3; 3; 2]$ a $F = [-4; 4; 9]$. (obr. 1.1.7)

Nejprve narýsujeme průměty přímek. Jak si můžeme všimnout, průměty přímek p a q jsou rovnoběžné ($p_1 \parallel q_1 \wedge p_2 \parallel q_2$). To znamená, že i samotné přímky budou rovnoběžné (neboť Mongeovo promítání zachovává rovnoběžnost). Přímky p a r se protínají – v nárysе v bodě R_2 a v půdoryse v bodě R_1. Navíc si tyto dva body odpovídají, tj. leží na ordinále (tzn. označení můžeme zanechat, protože se jedná o jeden bod v prostoru), což znamená, že přímky p a r jsou různoběžné. Přímky q a r se také protínají v bodech Q_1 a Q_2, ale tyto body neleží na stejné ordinále, tedy se nejedná o průmět jednoho bodu (ale půdorys jednoho a nárys druhého – proto raději označme každý jinak, v obrázku jsou označeny $\bar{Q}_1$ a Q_2). To znamená, že přímky se neprotínají, tedy jsou mimoběžné.

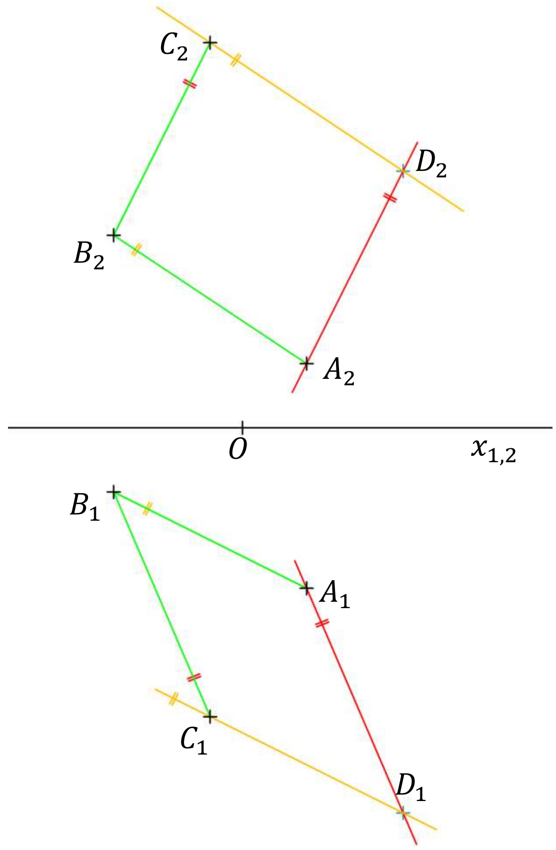
Příklad můžeme řešit i opačně: pokud chceme sestrojit přímku rovnoběžnou s danou přímkou (např. s přímkou p), která bude procházet daným bodem (např. D), tak jednoduše vedeme v obou průmětnách rovnoběžky s průměty dané přímky a daným bodem (tedy v půdorysně rovnoběžka s p_1 v bodě D_1 a v nárysně rovnoběžka s p_2 bodem D_2). Pokud bychom chtěli sestrojit různoběžnou přímku s danou přímkou (např. p), která bude procházet daným bodem (např. E), sestrojíme například v půdorysně libovolnou přímku různoběžnou s danou přímkou, která bude procházet bodem E_1. Průsečík těchto přímek označme třeba R_1. Aby byly přímky skutečně různoběžné a nikoliv mimoběžné, musí platit, že i nárysy přímek se protínají v náryse bodu R. Tedy najdeme na nárysu dané přímky bod R_2 a jím vedeme přímku, která také prochází nárysem daného bodu (to by byl bod E_2). Obdobně by se sestrojila i mimoběžná přímka k dané přímce, jen bychom naopak dávali pozor, aby si průsečík nárysů přímek a průsečík půdorysů přímek neodpovídaly.



Obr. 1.1.7: Určení vzájemné polohy přímek

4) Zobrazte rovnoběžník $\boldsymbol{ABCD}$, daný vrcholy $\boldsymbol{A} = [2; 5; 2]$, $\boldsymbol{B} = [-4; 2; 6]$ a $\boldsymbol{C} = [-1; 9; 12]$. (obr. 1.1.8)

Nejprve narýsujeme průměty zadaných bodů A, B a C. Víme, že rovnoběžník má protilehlé strany navzájem rovnoběžné a že Mongeovo promítání zachovává rovnoběžnost. To znamená, že i průměty protilehlých stran budou navzájem rovnoběžné. Stačí tedy sestrojit v půdorysu přímku rovnoběžnou s úsečkou A_1B_1, která bude procházet bodem C_1. A dále přímku rovnoběžnou s úsečkou B_1C_1, která bude procházet bodem A_1. Tyto přímky se pak protínají v půdorysu bodu D, tj. v bodě D_1. Stejným způsobem postupujeme i v nárysu.

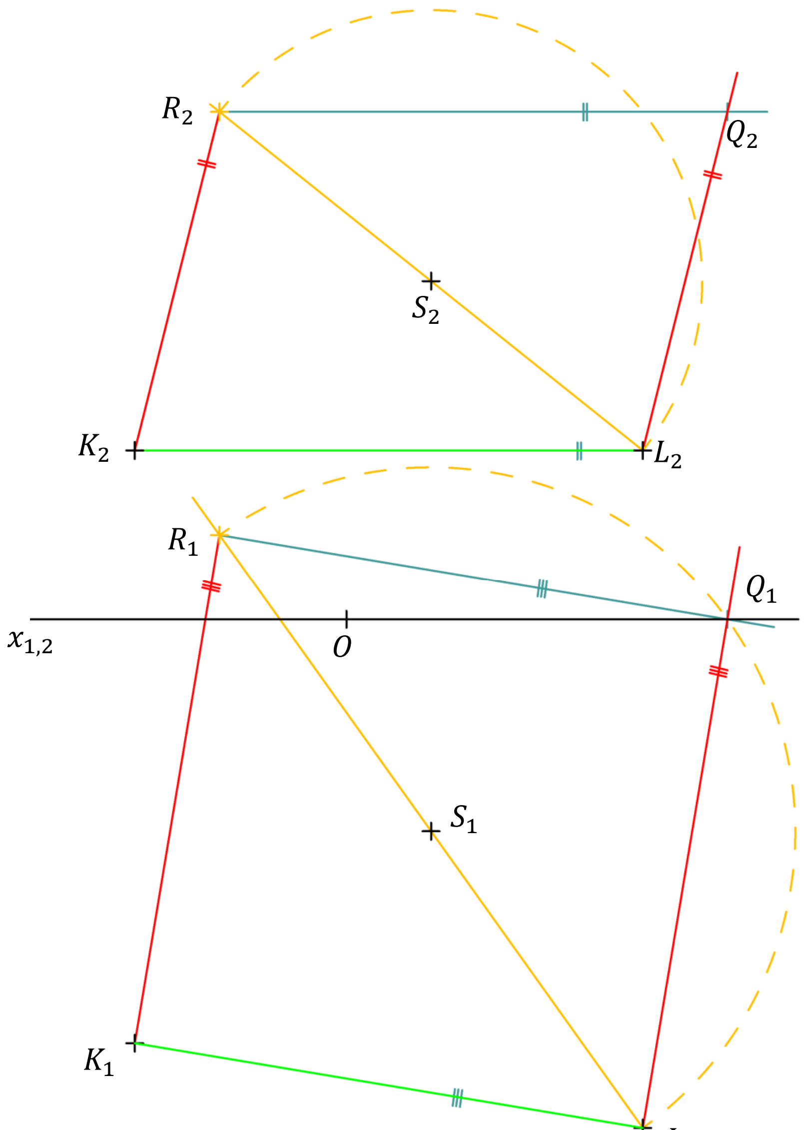


Obr. 1.1.8: Zobrazení rovnoběžníku

5) **Sestrojte sdružené průměty obdélníku $KLQR$, pokud znáte dva jeho vrcholy $K = [-5; 10; 4]$ a $L = [7; 12; 4]$ a střed obdélníku $S = [2; 5; 8]$. (obr. 1.1.9)**

Nejprve sestrojíme průměty bodů K, L a S. Jelikož Mongeovo promítání zachovává střed úsečky (což vychází ze zachování dělicího poměru), tak snadno sestrojíme třetí vrchol obdélníku – na přímce $\overleftrightarrow{L_1S_1}$ musí ležet bod R_1 a to ve stejné vzdálenosti od S_1, jako je L_1 od S_1. Stejný postup aplikujeme v nárysně, takže získáme průměty bodu R. Nyní můžeme sestrojit i zbylé strany, protože opět platí, že protilehlé strany jsou navzájem rovnoběžné a rovnoběžnost je v tomto promítání zachována. Tedy s přímkou $\overleftrightarrow{KL}$ vedeme bodem R rovnoběžku a také s přímkou $\overleftrightarrow{KR}$ vedeme bodem L rovnoběžnou přímku. Tak jsme získali průměty bodu Q a i průmět hledaného obdélníku.

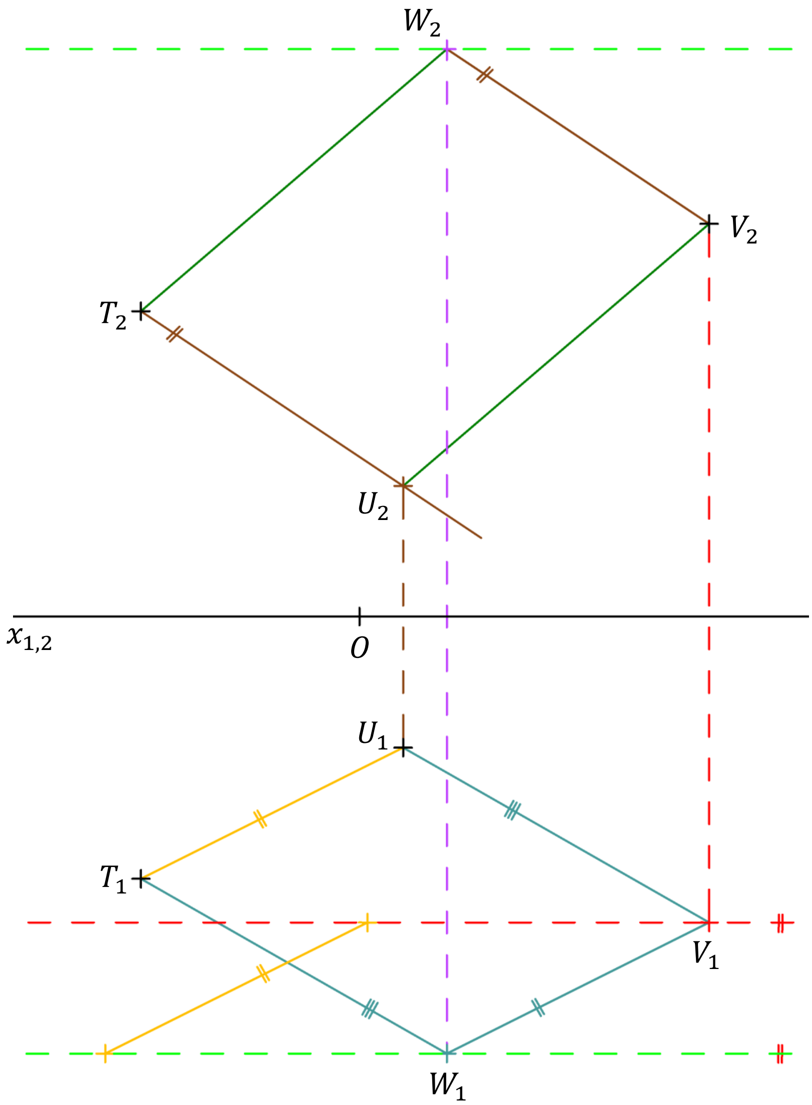
Pokud si všimneme, v půdoryse se obdélník zobrazil jako čtverec. To, že má všechny strany stejně dlouhé závisí na úhlu „naklonění“ (tzv. spádu) a na délce stran. Avšak to, že jsou u vrcholů pravé úhly, to vyplývá z vlastností Mongeova promítání – viz závěr teorie kapitoly *Zobrazení přímky*.



Obr. 1.1.9: Zobrazení obdélníku

6) Zobrazte sdružené průměty rovnoběžníku $\boldsymbol{TUVW}$, znáte-li tyto souřadnice vrcholů: $\boldsymbol{T = [-5; 6; 7]}$, $\boldsymbol{U = [1; 3; z]}$, $\boldsymbol{V = [8; y; 9]}$ a $\boldsymbol{W = [x; 10; 13]}$. (obr. 1.1.10)

Průmět bodu T narýsujeme snadno, u bodu U známe jen půdorys, u bodu V jen nárys a u bodu W jen orientované vzdálenosti od osy $x_{1,2}$ (tedy sestrojíme T_1, T_2, U_1, V_2 a poté dvě rovnoběžky s osou $x_{1,2}$ ve vzdálenosti 10 cm od osy dolů a 12 cm od osy nahoru, na nichž budou ležet průměty bodu W). Víme, že bod V_1 bude ležet ve vzdálenosti $|T_x U_x|$ od bodu W_1, neboť se musí zachovat rovnoběžnost protilehlých stran, což znamená, že jsou i stejně dlouhé. Stačí tedy úsečku $\overline{T_1 U_1}$ „posunout“ na přímku, na které má ležet bod W_1 (viz obrázek) a jejím druhým krajním bodem vést přímku rovnoběžnou s osou. Na této přímce bude ležet bod V_1 a jelikož máme nárys bodu V, stačí z něj vést ordinálu, až do místa, kde protne tuto rovnoběžnou přímku. Když jsme získali bod V_1, je již snadné dorýsovat i bod W_1 (pomocí rovnoběžnosti). Bod W_2 musí ležet na ordinále z bodu W_1 a na již sestrojené rovnoběžce s osou. Opět pomocí rovnoběžnosti a případně ordinály z bodu U_1 sestrojíme i nárys hledaného rovnoběžníku.

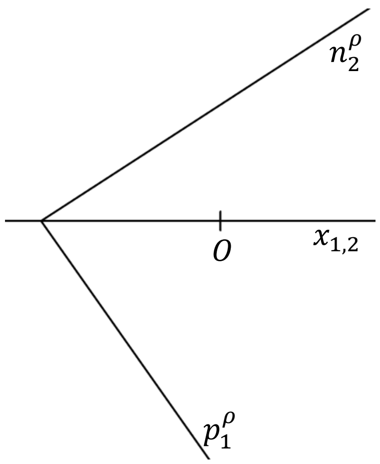


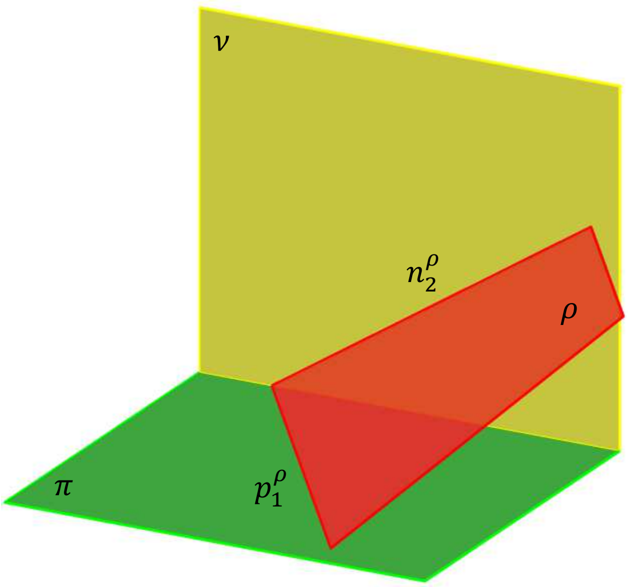
Obr. 1.1.10: Zobrazení rovnoběžníku

Zobrazení roviny

O promítací rovině, nebo-li rovině kolmé k průmětně, jsme se již zmínili v kapitole *Zobrazení přímky*. Nyní bychom si řekli něco o zobrazení obecně položené roviny (případně i o dalších speciálních polohách) – *obrázek 1.1.11*.

Pokud je rovina v obecné poloze, promítne se do půdorysny i do nárysny opět jako rovina. Rovinu snadno určíme pomocí jejích průsečnic s průmětnami (jak uvidíme, je to vlastně určení roviny třemi body). Průsečnice roviny ρ s půdorysnou se nazývá **půdorysná stopa** (někdy také **první stopa**) a značí se $\boldsymbol{p^{\rho}}$. Půdorysná stopa leží v půdorysně, tedy se shoduje se svým prvním průmětem, tj. $p^{\rho} = p_1^{\rho}$, proto se půdorys půdorysné stopy označuje také jako půdorysná stopa, a její nárys se pak zobrazí na osu, tedy $p_2^{\rho} \equiv x_{1,2}$. Průsečnice roviny ρ s nárysnou je **nárysná stopa** (nebo-li **druhá stopa**) a značí se $\boldsymbol{n^{\rho}}$. Jelikož leží v nárysně, shoduje se se svým nárysem, tj. $n^{\rho} = n_2^{\rho}$, opět se nárys nárysné stopy nazývá také nárysná stopa, a její půdorys je opět základnice, tedy $n_1^{\rho} \equiv x_{1,2}$. Půdorys nárysné stopy a nárys půdorysné stopy se neoznačují. Jelikož jsou obecná rovina, půdorysna a nárysna tři navzájem různoběžné roviny, protínají se v jednom bodě a to přímo na základnici. To znamená, že stopy roviny v obecné poloze se také musí protínat na základnici. Běžně se vyznačují jen kladné části stop roviny (tj. půdorysná stopa jen pod základnicí a nárysná stopa jen nad základnicí), pokud není zapotřebí k nějaké konstrukci její záporná část (která se pak vyznačuje čárkovaně).





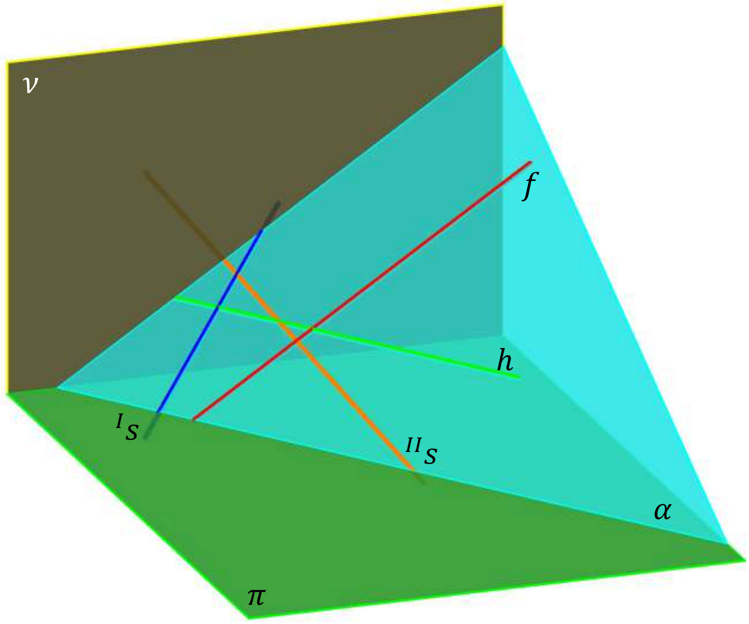
Obr. 1.1.11 Zobrazení roviny v Mongeově promítání a prostorová situace

Obecná rovina, která neprochází počátkem soustavy souřadnic, musí protínat osy soustavy souřadnic (*pozn.*: nebereme v úvahu speciální polohy, o kterých se zmíníme později) ve třech bodech s těmito souřadnicemi: $X = [x; 0; 0]$, $Y = [0; y; 0]$ a $Z = [0; 0; z]$. Jak již víme ze stereometrie, **rovina může být určena** třemi nekolineárními body (tj. všechny neleží v jedné přímce), dvěma různoběžkami, dvěma různými rovnoběžkami nebo bodem a přímkou (která jím neprochází). Tedy rovinu můžeme určit třemi body X, Y a Z. Pak by **zadání roviny** vypadalo takto: $\rho = (x; y; z)$. Toto zadání je vlastně stejné, jako kdybychom zadali rovinu dvěma různoběžkami, konkrétně stopami roviny. Rovinu však můžeme zadat i jiným způsobem: $\rho = (x; \varphi; \psi)$, kde x je opět průsečík roviny a základnice, φ je úhel mezi kladnou částí základnice a půdorysnou stopou a ψ je úhel mezi kladnou částí základnice a nárysnou stopou. Pokud tedy rovina prochází počátkem, nelze ji zadat prvním způsobem, tedy využíváme zadání $\rho = (x; \varphi; \psi)$, kde $x = 0$. Další problém nastane, pokud bude rovina procházet základnicí. Pak ji lze určit (kromě základnice) jedním bodem (resp. přímkou), který v ní leží.

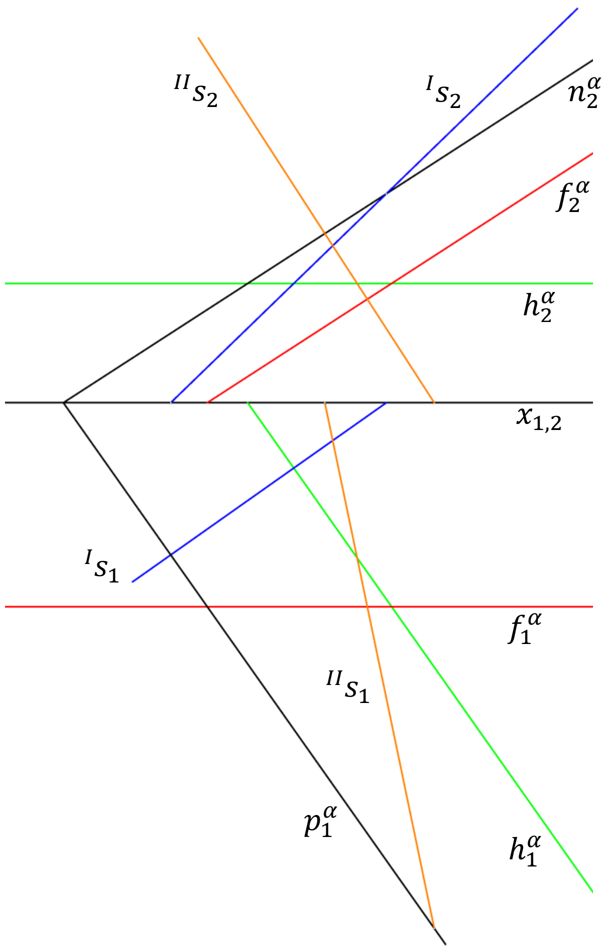
Stopník přímky (pokud existuje), která leží v rovině, je bod společný přímce i průmětně. Avšak rovina má s průmětnou společnou průsečnici, tj. stopu. Z toho vyplývá, že stopník přímky z této roviny musí ležet na odpovídající stopě roviny. Můžeme si uvést větu:

Pokud leží přímka v rovině, leží její stopníky (existují-li) na odpovídajících stopách roviny.

Je několik speciálních přímek (viz *obrázek 1.1.12* a *1.1.13*): $\boldsymbol{h}$ (resp. $^{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{h}$) $\parallel \pi$ ($h \subset \rho$) se nazývá **horizontální přímka** (nebo též **hlavní přímky první osnovy**), $\boldsymbol{f}$ (resp. $^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{h}$) $\parallel \nu$ ($f \subset \rho$) je **frontální přímka** (nebo též **hlavní přímky druhé osnovy**). Navíc pro ně platí: $p^{\rho} \parallel h$, tedy i $p_1^{\rho} \parallel h_1$; $n^{\rho} \parallel f$, tedy $n_2^{\rho} \parallel f_2$; $h_2 \parallel x_{1,2}$ a $f_1 \parallel x_{1,2}$. Další speciální přímky jsou přímky kolmé na horizontální přímky, nazývají se **spádové přímky první osnovy** a označují se $^{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{s}$. Přímky kolmé na frontální přímky roviny jsou **spádové přímky druhé osnovy** a značí se $^{\boldsymbol{II}}\boldsymbol{s}$. Platí pro ně: $^{I}s_1 \perp h_1$ a proto i $^{I}s_1 \perp p_1^{\rho}$, $^{II}s_2 \perp f_2$ a proto i $^{II}s_2 \perp n_2^{\rho}$. Jelikož je spádová přímka kolmá ke stopě, určuje **spád roviny**, což je tangens odchylky spádové přímky od průmětny.



Obr. 1.1.12: Speciální přímky v rovině α



Obr. 1.1.13: Speciální přímky roviny α v Mongeově promítání

Pozn.: Při značení spádové přímky budeme vynechávat levý horní index (tj. označení druhu spádové přímky), pokud nebude v příkladu docházet k nejasnostem (tj. např. místo ${}^{I}s_2$ budeme psát pouze s_2). Případně ji označíme pravým horním indexem podle roviny, do které patří, nebo podle bodu, kterým prochází.

Nyní se zmíníme ***o speciálních polohách rovin a jejich stopách***. V předchozí části jsme zmínili **promítací rovinu**, která je kolmá k průmětně. Rovina se v této průmětně zobrazí jako přímka, do druhé průmětny se zobrazí jako celá rovina, případně také jako přímka (v tomto případě jde o již zmíněnou **dvojnásob promítací rovinu**), jejíž stopa může být buď přímka kolmá k základnici, nebo nemusí existovat (to, pokud bude rovina rovnoběžná s touto druhou průmětnou). Speciálním případem těchto rovin jsou tedy roviny rovnoběžné s průmětnou, které se nazývají **hlavní roviny** a které mají jen jednu stopu, rovnoběžnou se základnicí (jde též o rovinu rovnoběžnou s osou x – ještě by sem patřily roviny, které protínají průmětny, ty mají obě stopy rovnoběžné se základnicí – *pozn.*: zajímavostí je, že tyto roviny mají jen jednu osnovu hlavních i spádových přímek, neboť horizontální i frontální přímky splývají). Rovina, která prochází osou x, má obě stopy totožné se základnicí. (*Pozn.*: Sem patří i rovina souměrnosti a totožnosti – o nich více např. v [2], str. 120.) Zadání těchto rovin si ukážeme na příkladech.

Ještě bychom měli zmínit ***vzájemnou polohu dvou rovin a přímky a roviny***. Pro ně platí: $\alpha \times \beta \;\Rightarrow\; \alpha \cap \beta = r$, r je průsečnice (o ní bude řeč v následující kapitole) – speciálním případem jsou stopy rovin, tedy musí $p_1^{\alpha} \cap p_1^{\beta} \in r_1$ a $n_2^{\alpha} \cap n_2^{\beta} \in r_2$. Pro rovnoběžné roviny platí:

Dvě roviny jsou navzájem rovnoběžné, pokud mají navzájem rovnoběžné stopy.

Pro polohy přímek pak platí (α není hlavní rovina): je-li $p \parallel \alpha$, pak $\exists q \subset \alpha$, že $p \parallel q$; je-li $p \times \alpha$, pak $p \cap \alpha = R$, R je průsečík (o něm bude pojednáno v následující kapitole). Do tohoto případu se také řadí přímka kolmá k rovině (resp. rovina kolmá k přímce), pro níž platí:

Je-li přímka kolmá k rovině, budou její průměty kolmé k odpovídajícím stopám roviny.

Příklady:

Pozn.: V příkladech jsou jednotlivé kroky odlišeny barevně: 1. krok = zelená, 2. krok = oranžová, 3. krok = červená, 4. krok = modrá, 5. krok = fialová, 6. krok = hnědá, 7. krok = tmavě zelená, 8. krok = žlutá.

1) Zobrazte stopy rovin $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{2}; -\mathbf{3}; -\mathbf{6})$, $\boldsymbol{\beta} = (\infty; \mathbf{4}; \mathbf{5})$, $\boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{4}; \infty; \mathbf{7})$, $\boldsymbol{\delta} = (-\mathbf{3}; \mathbf{5}; \infty)$ a $\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{6}; \infty; \infty)$. Určete polohu rovin vůči průmětnám či základnici. (obr. 1.1.14)

Ze zadání roviny α víme, že její průsečíky se souřadnými osami jsou body $X = [2; 0; 0]$, $Y = [0; -3; 0]$ a $Z = [0; 0; -6]$. Tyto body jsou v obrázku vyznačeny jako X^α, Y^α a Z^α a platí pro ně toto: $X^\alpha \in x_{1,2} \wedge |X^\alpha O| = 2$ cm, $\left|Y^\alpha x_{1,2}\right| = 3\ cm \wedge \overleftrightarrow{Y^\alpha O} \perp x_{1,2}$ (to, že $\overleftrightarrow{Y^\alpha O} \perp x_{1,2}$ znamená, že bod Y^α leží na ose y), $\left|Z^\alpha x_{1,2}\right| = 6$ cm $\wedge \overleftrightarrow{Z^\alpha O} \perp x_{1,2}$. Dejme jen pozor na to, že Y^α a Z^α jsou záporné, tedy budou v opačné polorovině, než „obvykle“ (tj. pro kladné Y^α by ležel bod pod osou x, tedy v kladné části půdorysny; podobně pro Z^α). Půdorysná stopa musí procházet body roviny, které leží v půdorysně. Tedy spojíme-li X^α a Y^α, dostaneme p_1^α. Stejně tak, pokud spojíme X^α a Z^α, dostaneme n_2^α. Avšak měli bychom část p_1^α nad základnicí vyznačit jen čárkovaně, protože leží ve skutečnosti za nárysnou, a nad základnicí již plnou čarou. Stopu n_2^α bychom měli pod osou vyznačit také čárkovaně a nad osou plně. Tato rovina je v obecné poloze.

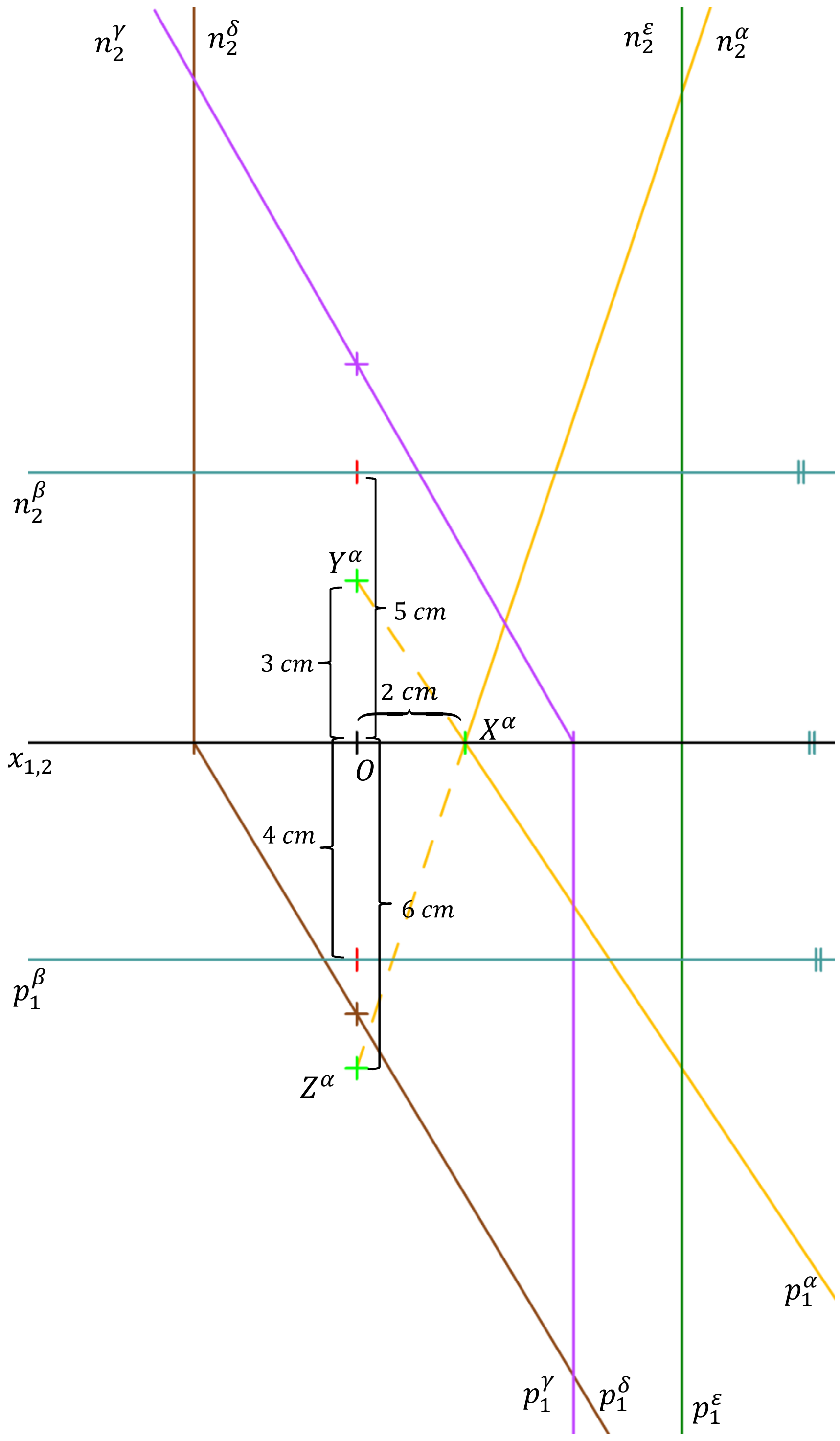
Pro rovinu β samozřejmě nedokážeme narýsovat bod X^β, neboť (jak naznačuje první souřadnice v zadání roviny) leží v nekonečnu. To znamená, že stopy roviny budou rovnoběžné se základnicí. Pro body opět platí, že $\left|Y^\beta x_{1,2}\right| = 4$ cm a $\left|Z^\beta x_{1,2}\right| = 5$ cm. (*Pozn.*: průsečíky s osami se běžně nevyznačují, proto už je dále nebudeme popisovat) Těmito body tedy vedeme přímky rovnoběžné s osou $x_{1,2}$ a máme sestrojené stopy roviny. Tato rovina je rovnoběžná se základnicí (neboť v této rovině existuje přímka, se kterou je základnice rovnoběžná, konkrétně to může být půdorysná či nárysná stopa roviny).

Rovina γ bude mít průsečíky s osami x a z, které vyznačíme. S osou y se neprotíná, tedy s ní bude rovnoběžná. Opět jen stručně: $|X^\gamma O| = 4$ cm a $\left|Z^\gamma x_{1,2}\right| = 7$ cm. Rovina je rovnoběžná s osou y, což znamená, že její půdorysná stopa bude kolmá k základnici (tj. rovnoběžná s osou y) a že rovin je kolmá k nárysně. Vždy bude platit, že pokud je půdorysná stopa kolmá k základnici, rovina je kolmá k nárysně (můžete si zkusit situaci vymodelovat např. pomocí podlahy a zdi, které hrají roli půdorysny a nárysny, a sešitu, který zastupuje rovinu).

Stopy roviny δ sestrojíme podobně: Z^δ je v nekonečnu a $\left|X^\delta O\right| = 3$ cm (X^δ má zápornou souřadnici, tedy nanášíme nalevo od počátku) a $\left|Y^\delta x_{1,2}\right| = 5$ cm. Rovina je tedy rovnoběžná s osou z, což znamená, že i její nárysná stopa je rovnoběžná s osou z, resp. kolmá k základnici. Rovina je tudíž kolmá k půdorysně.

Vždy bude platit, že pokud je nárysná stopa roviny kolmá k základnici, bude rovina kolmá na půdorysnu.

Nakonec rovina ε má pouze průsečík s osou x, což znamená, že je rovnoběžná s osami y a z. To tedy znamená, že rovina je kolmá k základnici (neboť obě tyto osy jsou k ní také kolmé).



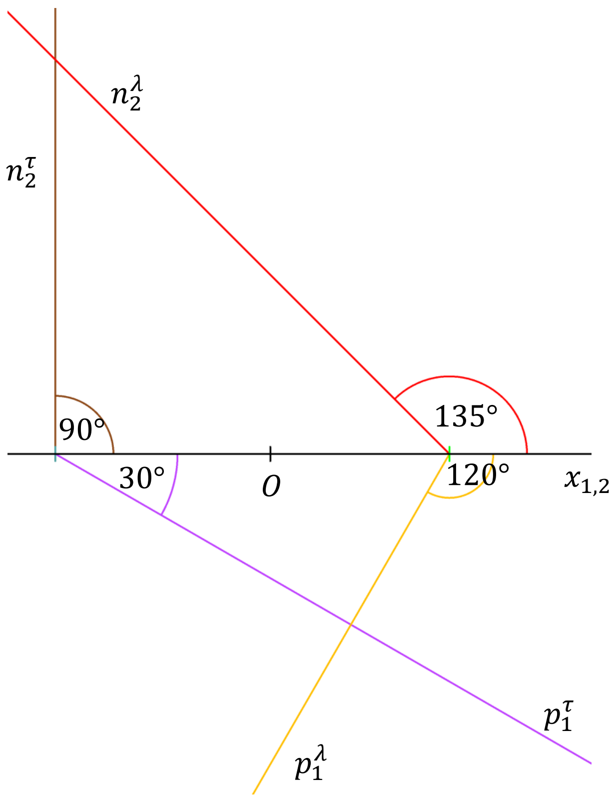
Obr. 1.1.14: Zobrazení stop rovin

2) Zobrazte stopy rovin $\boldsymbol{\lambda = (5; 120°; 135°)}$ a $\boldsymbol{\tau = (-6; 30°; 90°)}$. Určete, jak by tímto zadáním byly určeny roviny $\boldsymbol{\delta}$ a $\boldsymbol{\varepsilon}$ z předchozí úlohy. (obr. 1.1.15)

Nejprve sestrojíme průsečíky rovin s osou x a to ve vzdálenosti 5 cm napravo od počátku a 6 cm nalevo od počátku. Nyní od bodu X^λ sestrojíme úhel o velikosti 120°, měřeno od osy x v záporném smyslu. Takto jsme získali půdorysnou stopu roviny λ. Nárysnou stopu získáme tak, že od bodu X^λ sestrojíme od základnice úhel o velikosti 135°. Stejným postupem od bodu X^τ sestrojíme stopy roviny τ. Vidíme, že rovina τ je kolmá k půdorysně a rovina λ je v obecné poloze.

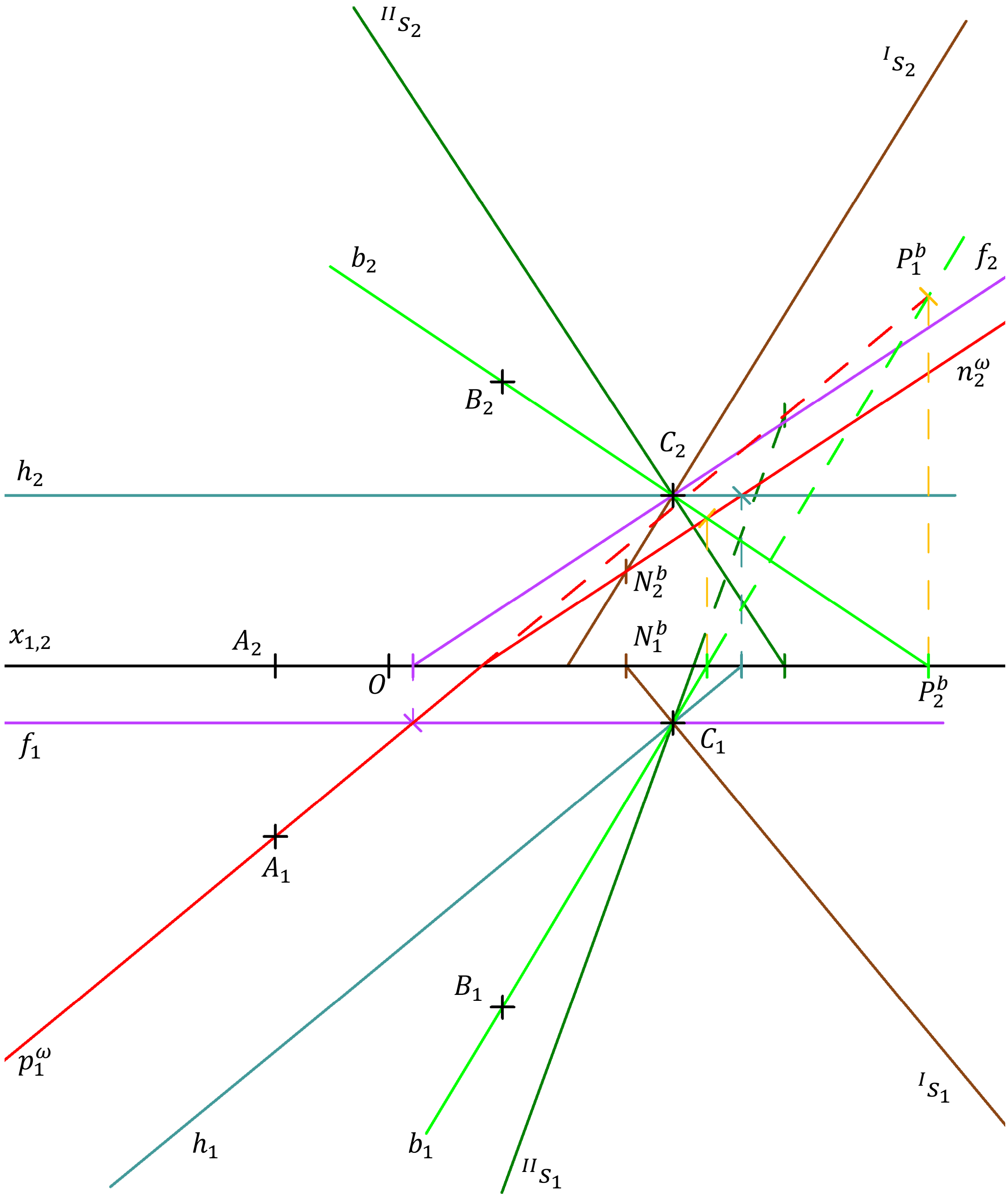
Zadání roviny δ by tedy vypadalo takto: $\delta = \left(-3; \tan^{-1}\frac{5}{3}; 90°\right)$. (*Pozn.*: funkce inverzní k funkci tan je funkce tan^{-1}, někdy také označovaná $arctan$) První souřadnice je průsečík roviny s osou x, který se nemění. Druhá souřadnice udává úhel mezi kladnou částí osy x a půdorysnou stopou, který zjistíme pomocí pravoúhlého trojúhelníku $X^\delta O Y^\delta$ s využitím goniometrických funkcí. Třetí souřadnice je úhel mezi kladnou částí osy x a nárysnou stopou roviny. Tu známe, neboť rovina je kolmá na půdorysnu, což znamená, že s ní svírá úhel 90°.

Zadání roviny ε je asi nejsnazší: rovina je kolmá k ose x, tedy s ní svírá úhel 90°, což platí i pro stopy roviny, tedy $\varepsilon = (6; 90°; 90°)$.



Obr. 1.1.15: Zobrazení stop rovin

3) Sestrojte hlavní a spádové přímky roviny $\boldsymbol{\omega}$, dané body $\boldsymbol{A} = [-2; 3; 0]$, $\boldsymbol{B} = [2; 6; 5]$ a $\boldsymbol{C} = [5; 1; 3]$, které prochází bodem $\boldsymbol{C}$. (obr. 1.1.16)



Obr. 1.1.10: Zobrazení hlavních a spádových přímek

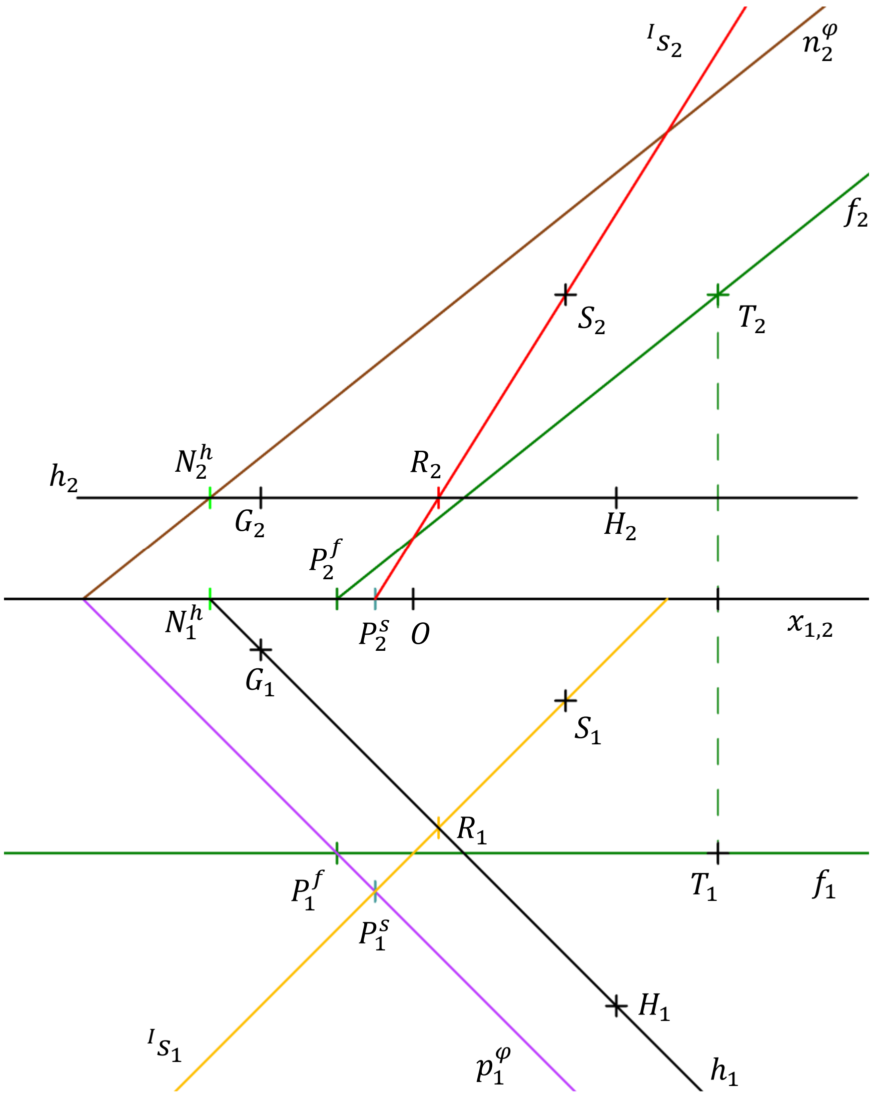
Nejprve můžeme (pro názornost) sestrojit stopy roviny, abychom nalezli hlavní a spádové přímky. Rovina je dána třemi body, přičemž si můžeme všimnout, že bod A leží v půdorysně. To znamená, že půdorysná stopa musí procházet bodem A_1. Ještě tedy potřebujeme sestrojit půdorysný stopník přímky $\overleftrightarrow{BC}$ (protože stopa opět musí procházet stopníkem přímky, která v rovině leží, navíc tato přímka neobsahuje bod A, který už by stopníkem přímky $\overleftrightarrow{AC}$ nebo $\overleftrightarrow{AB}$ byl). Spojíme tedy body B_1 a C_1, což bude přímka b_1, a její průsečík se základnicí je stopník N_1^b. Nyní sestrojíme přímku b_2, na které pomocí ordinály z bodu N_1^b sestrojíme bod N_2^b. Půdorysný stopník sestrojíme podobně – přímka b_2 protíná základnici v bodě P_2^b a na ordinále a na b_1 leží bod P_1^b (*pozn.*: pro větší přehlednost nejsou již další stopníky označeny názvy). Půdorysná stopa je tedy spojnice bodu A_1 a P_1^b, přičemž zvýrazníme plnou čarou jen část pod základnicí. Víme, že stopy se musí protínat na základnici, takže nárysná stopa musí procházet průsečíkem p_1^ω a $x_{1,2}$ a samozřejmě stopníkem N_2^b.

Nyní již můžeme zkonstruovat hlavní a spádové přímky. Víme, že horizontální přímka má půdorys rovnoběžný s půdorysnou stopou roviny, takže bodem C_1 vedeme rovnoběžku se stopou a získáme tak h_1. Najdeme její nárysný stopník (jako u přímky b), $N_1^h \in x_{1,2}$ a $N_2^h \in n_2^\omega$. Nárys přímky h musí být rovnoběžný se základnicí, tedy bodem N_2^h vedeme rovnoběžku s $x_{1,2}$. Frontální přímku sestrojíme obdobně, neboť víme, že její nárys je rovnoběžný s n_2^ω a půdorys je rovnoběžný s $x_{1,2}$. Při konstrukci spádových přímek postupujeme opět s využitím stopníků, přičemž víme, že ${}^{I}s_1$ je kolmá na stopu p_1^ω (případně na h_1) a ${}^{II}s_2$ je kolmá na n_2^ω, ${}^{I}s_2$ a ${}^{II}s_1$ sestrojíme pomocí stopníků.

4) **Sestrojte stopy roviny φ, je-li dána její hlavní přímka $h = \overleftrightarrow{GH}$ a bod S, kde $G = [3; 1; 2]$, $H = [4; 8; 2]$, $S = [3; 2; 6]$. Najděte druhý průmět bodu $T = [6; 5; z]$, který leží v rovině φ. (obr. 1.1.17)**

Na začátek si můžeme určit nárysný stopník přímky h, kterým bude procházet nárysná stopa. Půdorys horizontální přímky je rovnoběžný s půdorysnou stopou, stačí tedy najít půdorysný stopník libovolné přímky z té roviny a tím už bude procházet stopa. Rovina je takto určena třemi body G, H a S, takže bychom mohli využít spojnici libovolných dvou těchto bodů. Ale zkusme využít například spádovou přímku první osnovy, procházející bodem S. Tato spádová přímka je kolmá na přímku h, tedy ${}^{I}s_1 \perp h_1$. Nárys spádové přímky najdeme snadno pomocí jejího průsečíku s přímkou h, tj. ${}^{I}s_1 \cap h_1 = \{R_1\}$ a $R_2 \in h_2$. Tímto průsečíkem a bodem S_2 prochází přímka ${}^{I}s_2$. Pomocí jejího půdorysného stopníku a rovnoběžnosti s přímkou h_1 sestrojíme stopu p_1^φ. Stopa n_2^φ pak prochází bodem N_2^h a průsečíkem $p_1^\varphi \cap x_{1,2}$.

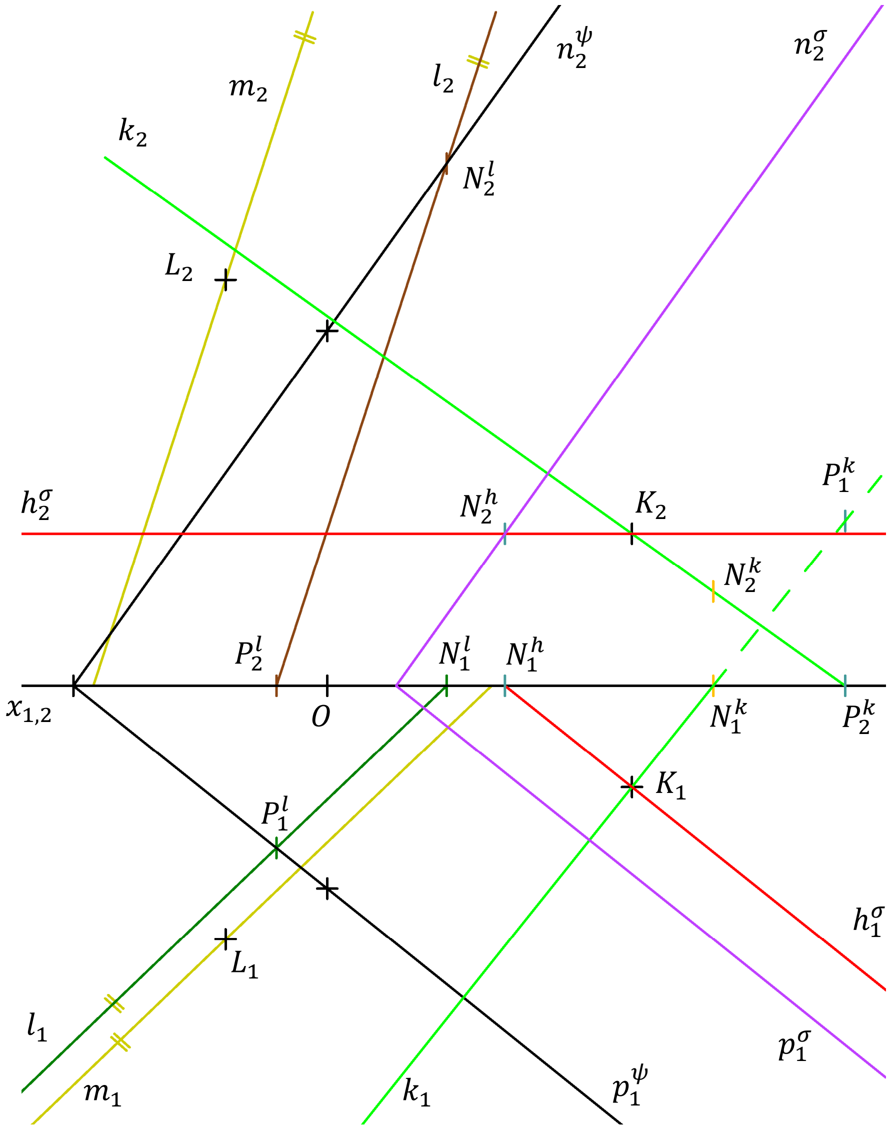
Nárys bodu T nalezneme jednoduše s využitím hlavní či spádové přímky roviny φ. Vyberme například frontální přímku, tedy platí $f_1 \parallel x_{1,2}$ a $T_1 \in f_1$. Pomocí průsečíku $f_1 \cap p_1^{\varphi} = \{P_1^f\}$ a toho, že $f_2 \parallel n_2^{\varphi}$, sestrojíme i nárys frontální přímky. Na něm a na ordinále z bodu T_1 leží bod T_2.



Obr. 1.1.17: Zobrazení stop roviny a druhého průmětu bodu

5) Zobrazte průměty a stopníky přímky $\boldsymbol{k}$, která prochází bodem $\boldsymbol{K} = [6; 2; 3]$ a je kolmá na rovinu $\boldsymbol{\psi} = (-5; 4; 7)$. Dále sestrojte stopy roviny $\boldsymbol{\sigma}$, která prochází bodem $\boldsymbol{K}$ a je rovnoběžná s rovinou $\boldsymbol{\psi}$. Dále veďte bodem $\boldsymbol{L} = [-2; 5; 8]$ libovolnou přímku $\boldsymbol{m}$ rovnoběžnou s rovinou $\boldsymbol{\psi}$. (obr. 1.1.18)

Jak jsme již zmínili, je-li přímka kolmá k rovině, tak její průměty jsou kolmé ke stopám. To znamená, že sestrojíme pouze kolmici z bodu K_1 na p_1^{ψ}, což bude přímka k_1, a kolmici z K_2 na n_2^{ψ}, což bude přímka k_2. Stopníky získáme snadno: $k_1 \cap x_{1,2} = \{N_1^k\}$, na ordinále a na k_2 je pak N_2^k, $k_2 \cap x_{1,2} = \{P_2^k\}$, na ordinále a na k_1 je P_1^k. (*Pozn.*: Všimněme si, že průsečík kolmice a roviny byl vlastně kolmý průmět bodu K do roviny ψ.)



Obr. 1.1.12: Zobrazení přímky a roviny

Pokud chceme sestrojit rovinu σ, rovnoběžnou s rovinou ψ (***Pozn.*:** konstruujeme zároveň i **rovinu kolmou k přímce** k – tedy takový postup by byl téměř stejný), musíme nejprve najít dvě přímky roviny σ, které budou s rovinou ψ rovnoběžné, a pomocí jejich stopníků pak zjistíme i stopy roviny. Nejlépe nám k tomu poslouží hlavní přímky. Sestrojme tedy například horizontální přímku, kde platí: $h_1^\sigma \parallel p_1^\sigma \wedge K_1 \in h_1^\sigma$ a $h_2^\sigma \parallel x_{1,2} \wedge K_2 \in h_2^\sigma$. Můžeme tedy sestrojit i nárysný stopník této přímky: $h_1^\sigma \cap x_{1,2} = \{N_1^h\}$ a na ordinále a na h_2^σ leží N_2^h. Přímka h^σ leží v rovině σ, tedy stopník této přímky leží na stopě roviny a navíc roviny jsou rovnoběžné (tedy i jejich stopy jsou rovnoběžné), tzn. n_2^σ prochází bodem N_2^h a je rovnoběžná s n_2^ψ. Stopu p_1^σ sestrojíme snadno z průsečíku n_2^σ a $x_{1,2}$, navíc má být rovnoběžná s p_1^ψ.

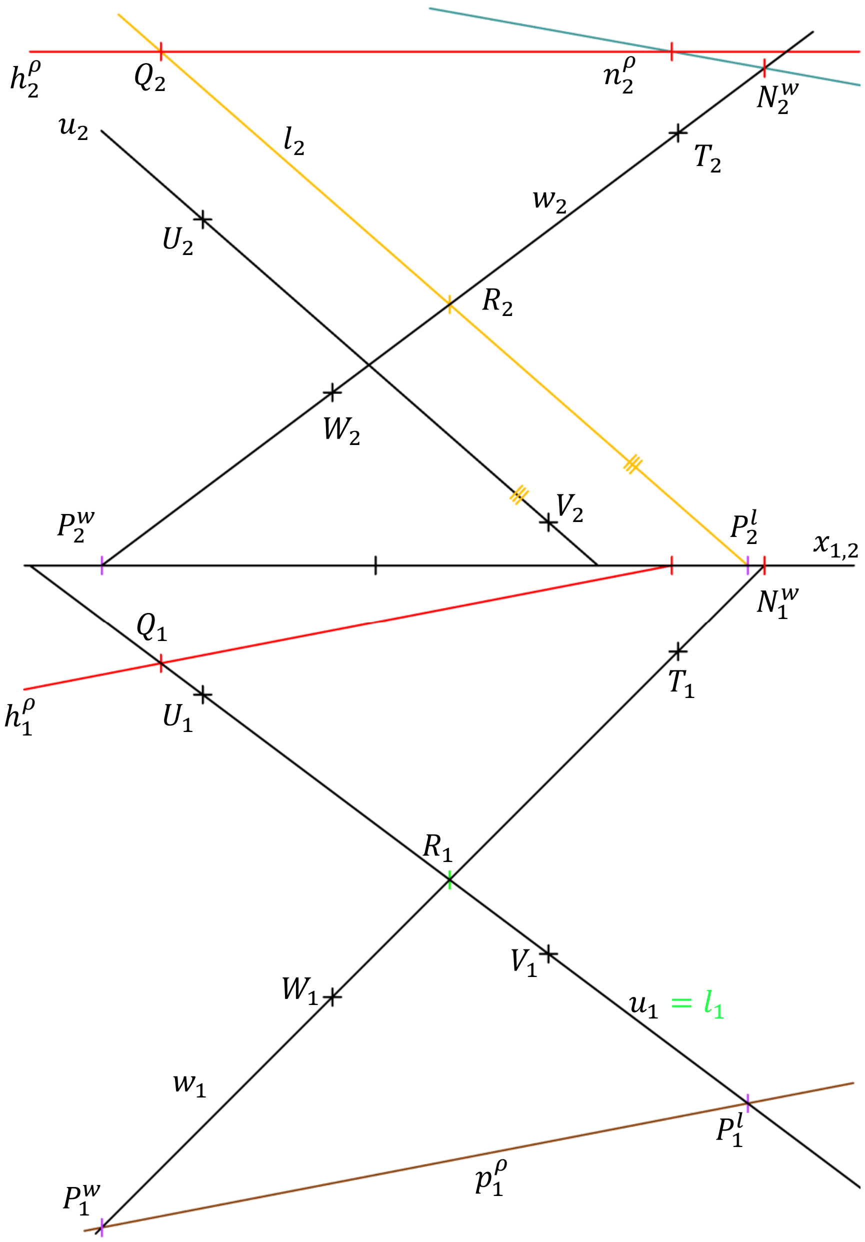
Jak již bylo řečeno, přímek procházejících daným bodem, rovnoběžných s danou přímkou, existuje nekonečně mnoho. Musí pro ni však platit, že v rovině ψ najdeme přímku, se kterou bude rovnoběžná. To znamená, že si můžeme vybrat v této rovině libovolnou přímku l. Sestrojme pomocí stopníků (neboť přímka leží v rovině ψ) její půdorys. Nyní jen v půdorysu veďme rovnoběžku s touto přímkou bodem L_1, což je přímka m_1. Stejně sestrojíme i přímku m_2, rovnoběžně s l_2.

***Pozn.*:** Kdybychom neznali stopu roviny ψ, dokázali bychom sestrojit rovinu σ, neboť přímka k musí mít průměty kolmé k odpovídajícím stopám (tzn. i hlavním přímkám) roviny σ. Pokud bychom chtěli sestrojit přímku kolmou k přímce k, procházející např. bodem K, sestrojili bychom rovinu σ a v ní vybrali jednu přímku (tato rovina totiž obsahuje všechny přímky kolmé ke k).

6) Zobrazte rovinu $\boldsymbol{\rho}$, která obsahuje přímku $\boldsymbol{w = \overleftrightarrow{WT}}$ a je rovnoběžná s přímkou $\boldsymbol{u = \overleftrightarrow{UV}}$, kde $\boldsymbol{U = [-4; 3; 8]}$, $\boldsymbol{V = [4; 9; 1]}$, $\boldsymbol{W = [-1; 10; 4]}$ a $\boldsymbol{T = [7; 2; 10]}$. (obr. 1.1.19)

Pokud má být rovina ρ rovnoběžná s přímkou u, musí obsahovat přímku, která s ní bude rovnoběžná. Průměty takové rovnoběžné přímky jsou rovnoběžné s průměty přímky u. Stačí tedy narýsovat libovolnou přímku l, která bude ležet v rovině ρ, tedy bude s přímkou w různoběžná. Musí tedy platit: $u_1 \parallel l_1 \wedge l_1 X w_1$ a stejně pro nárysy. Jelikož musí být u a w různoběžné, musí si průsečíky v nárysu a v půdorysu odpovídat (tzn. leží na ordinále). Libovolně tedy sestrojíme například $l_1 = u_1$ a pomocí průsečíku snadno sestrojíme i l_2. Máme tedy dvě různoběžné přímky, které leží v rovině ρ, takže pomocí jejich stopníků (případně hlavní přímky) sestrojíme hledané stopy roviny ρ.

***Pozn.*:** Zapamatujte si tento postup, protože se využívá např. ke konstrukci nejkratší příčky mimoběžek nebo příčky rovnoběžné s daným směrem.

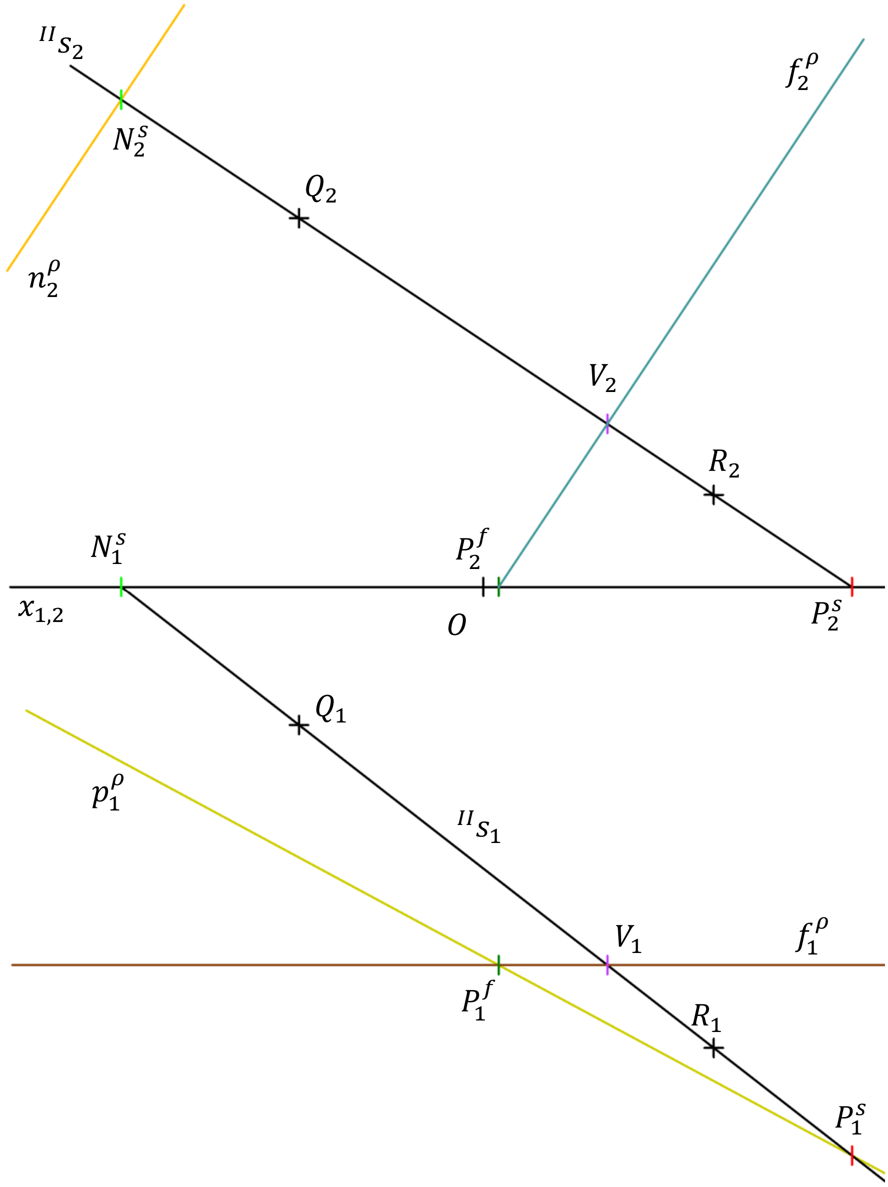


Obr. 1.1.19: Zobrazení roviny

7) **Určete stopy roviny ω, která je dána spádovou přímkou ${}^{II}s = \overleftrightarrow{QR}$, kde $Q = [-4; 3; 8]$ a $R = [5; 10; 2]$. (obr. 1.1.20)**

Jelikož je spádová přímka druhého druhu kolmá k nárysné stopě roviny, bude platit $n_2^\rho \perp {}^{II}s_2$. Stačí tedy sestrojit jen nárysný stopník spádové přímky -${}^{II}s_1 \cap x_{1,2} = \{N_1^\rho\}$, na ordinále na ${}^{II}s_2$ leží N_2^ρ. Stopa n_2^ρ tedy prochází tímto bodem a je kolmá k přímce ${}^{II}s_2$. Jelikož se na papír nevejde její průsečík se základnicí, musíme najít dva půdorysné stopníky, které určí půdorysnou stopu. Jeden získáme ze spádové přímky. Druhý stopník můžeme získat například pomocí frontální přímky roviny ρ (zvolme vhodně její nárys, aby protla základnici), která je různoběžná s přímkou ${}^{II}s$ (a samozřejmě platí $f_2^\rho \perp {}^{II}s_2$). Jejich průsečík označme

V_2 a na přímce ${}^{II}s_1$ najděme V_1. Nyní můžeme sestrojit přímku f_1, která je rovnoběžná se základnicí. Dále sestrojíme stopník P_1^f, jehož spojnice se stopníkem P_1^s bude stopa p_1^ρ.

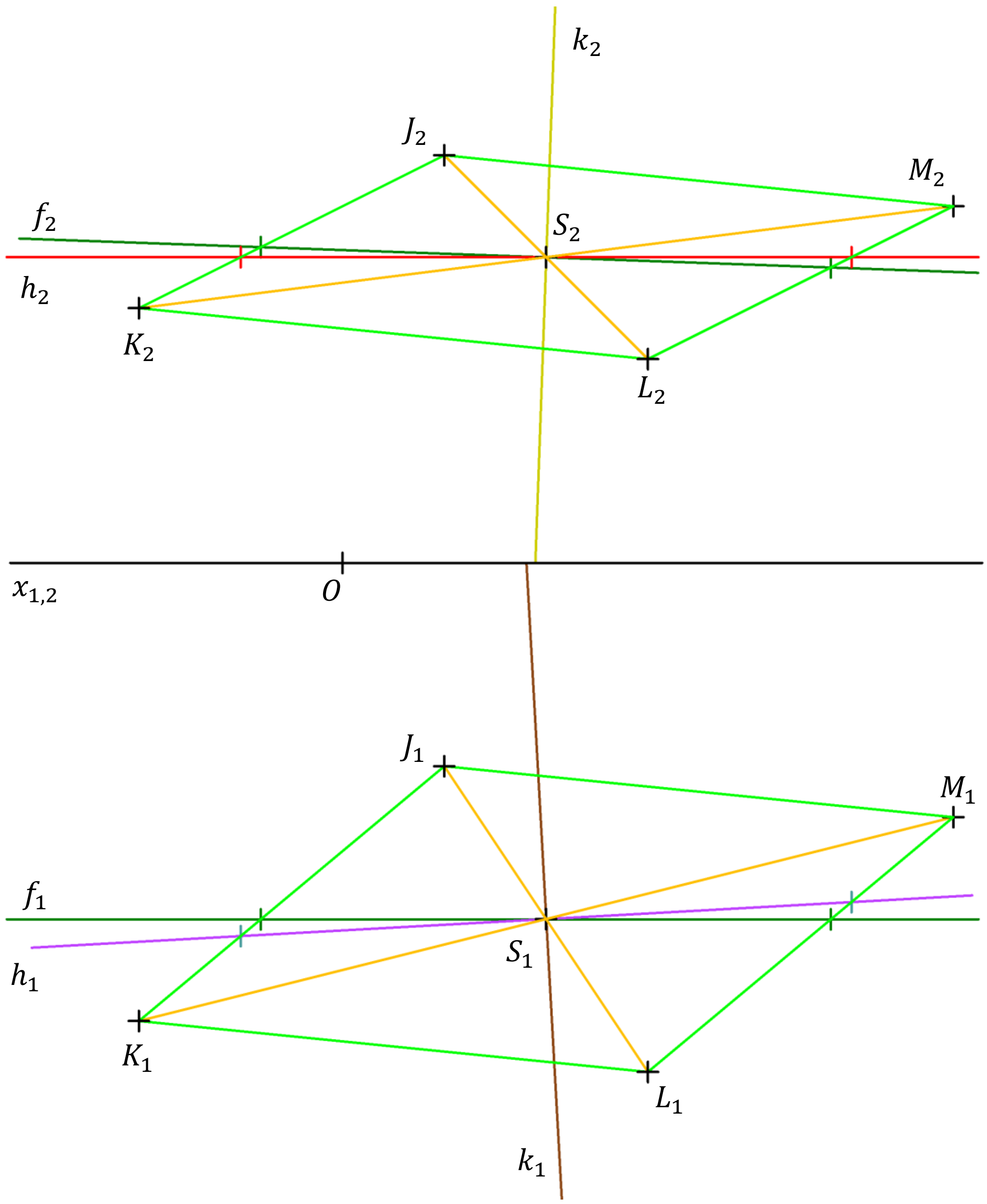


Obr. 1.1.20: Zobrazení stop roviny

8) **Zobrazte kolmici k rovnoběžníku $JKLM$, $J = [2; 4; 8]$, $K = [-4; 9; 5]$ a $L = [6; 10; 4]$, vedenou jeho středem. (obr. 1.1.21)**

Rovnoběžník můžeme vyrýsovat hned díky zachování rovnoběžnosti protilehlých stran. Střed rovnoběžníku je průsečík úhlopříček, tedy v půdorysu a v nárysu tyto úhlopříčky sestrojíme a získáme tak body S_1 a S_2.

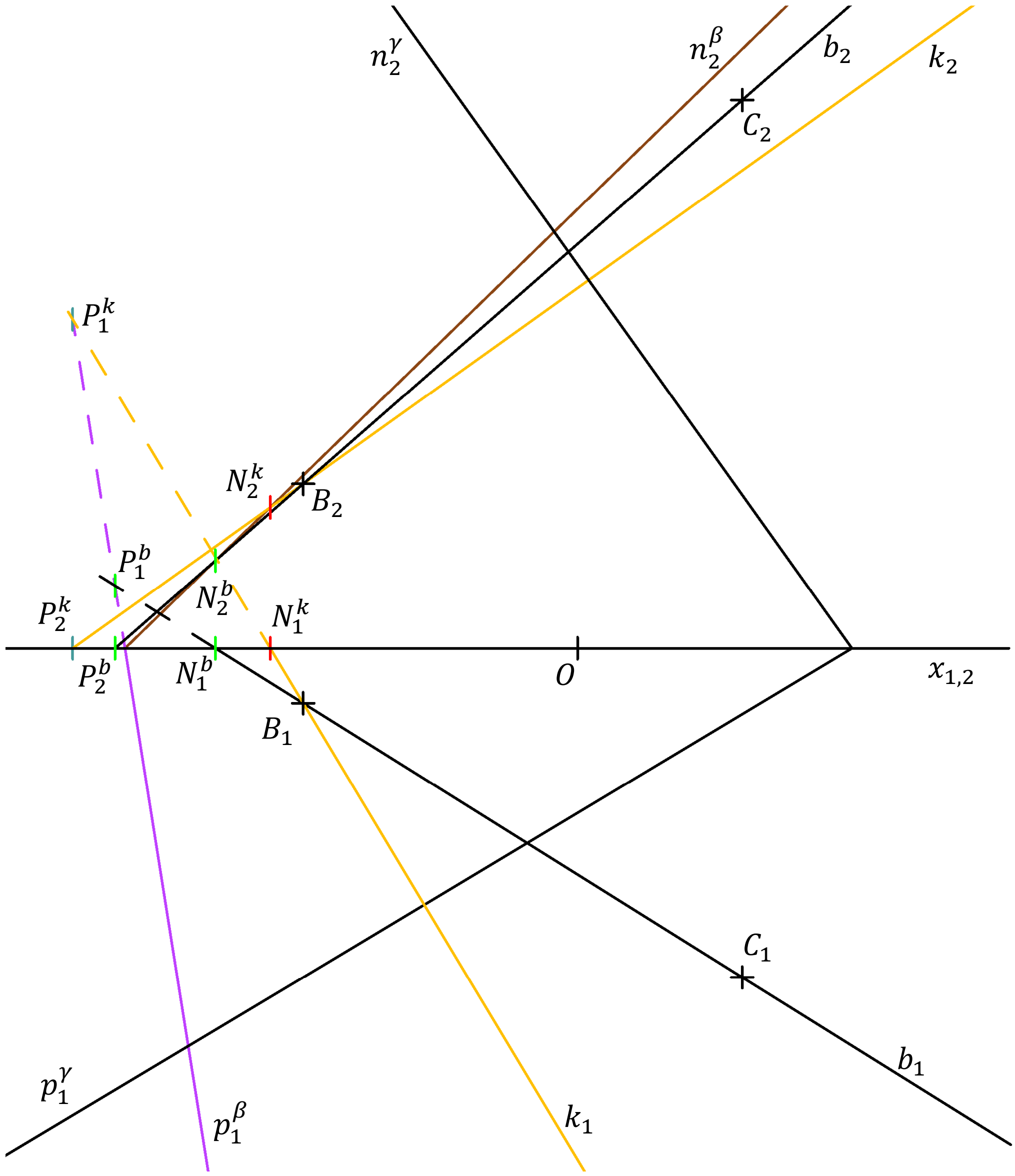
Víme, že kolmice k rovině tohoto rovnoběžníku bude v průmětně kolmá k dané stopě roviny. Stopu roviny však nebudeme sestrojovat (a ani by se na papír nevešla), tedy využijeme toho, že stopa roviny je rovnoběžná s odpovídající hlavní přímkou, tj. bude stačit zkonstruovat horizontální a frontální přímku, ke kterým bude v odpovídajících průmětnách kolmá přímka k. Vyberme nejprve například horizontální přímku a sestrojme její nárys. Přímka h_2 je rovnoběžná se základnicí a prochází např. bodem S_2. Protíná strany rovnoběžníku ve dvou bodech, které musí odpovídat stejným průsečíkům přímky h_1 s půdorysem rovnoběžníku. Takto tedy snadno sestrojíme přímku h_1. Nyní můžeme sestrojit půdorys kolmice, který bude procházet bodem S_1 a bude kolmý k přímce h_1. Sestrojme ještě frontální přímku procházející bodem S_1 a stejným postupem najděme její nárys. Přímka k_2 bude procházet bodem S_2 a bude kolmá k přímce f_2.



Obr. 1.1.21: Zobrazení komice k rovnoběžníku

9) **Zobrazte stopy roviny $\boldsymbol{\beta}$, která obsahuje přímku $\boldsymbol{b} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{BC}}$ a je kolmá k rovině $\boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{5}; \mathbf{3}; \mathbf{7})$, kde $\boldsymbol{B} = [-\mathbf{5}; \mathbf{1}; \mathbf{3}]$ a $\boldsymbol{C} = [\mathbf{3}; \mathbf{6}; \mathbf{10}]$. (obr. 1.1.22)**

Jelikož přímka b leží v rovině β, musí stopa této roviny procházet odpovídajícím stopníkem přímky. Sestrojme tedy půdorysný a nárysný stopník přímky b. Rovina β má být kolmá k rovině γ, tedy musí obsahovat přímku, která bude kolmá k této rovině. Sestrojme tedy libovolným bodem přímky b kolmici k rovině γ, zvolme ji například bodem B. Jelikož tato kolmice a přímka b leží v rovině β, snadno sestrojíme stopu roviny pomocí stopníků těchto dvou přímek – $P_1^b, P_1^k \in p_1^\beta$ a $N_2^b, N_2^k \in n_2^\beta$.



Obr. 1.1.22: Zobrazení roviny β kolmé k rovině γ

1.2 Průsečík přímky a roviny, průsečnice dvou rovin

V této části se budeme zabývat konstrukcemi průsečíku přímky a rovin a průsečnicí dvou rovin. Pro sestrojení průsečíku budeme potřebovat takzvanou **krycí přímku**, což je přímka, která leží v jedné z promítacích rovin dané přímky a zároveň v rovině, se kterou se protíná tato daná přímka (není však nutné umět sestrojit průsečnici rovin, ačkoliv by se takto mohla krycí přímka definovat). Názorně si její využití a konstrukci ukážeme na příkladech. Průsečnici dvou rovin sestrojíme podobně jako v kótovaném promítání – prochází průsečíkem odpovídajících stop rovin (tzn. dvěma body - jejich půdorysy a také nárysy) a nebo také průsečíkem hlavních přímek z obou rovin, ležících ve stejné hlavní rovině. Opět si konstrukci ukážeme názorně na příkladech.

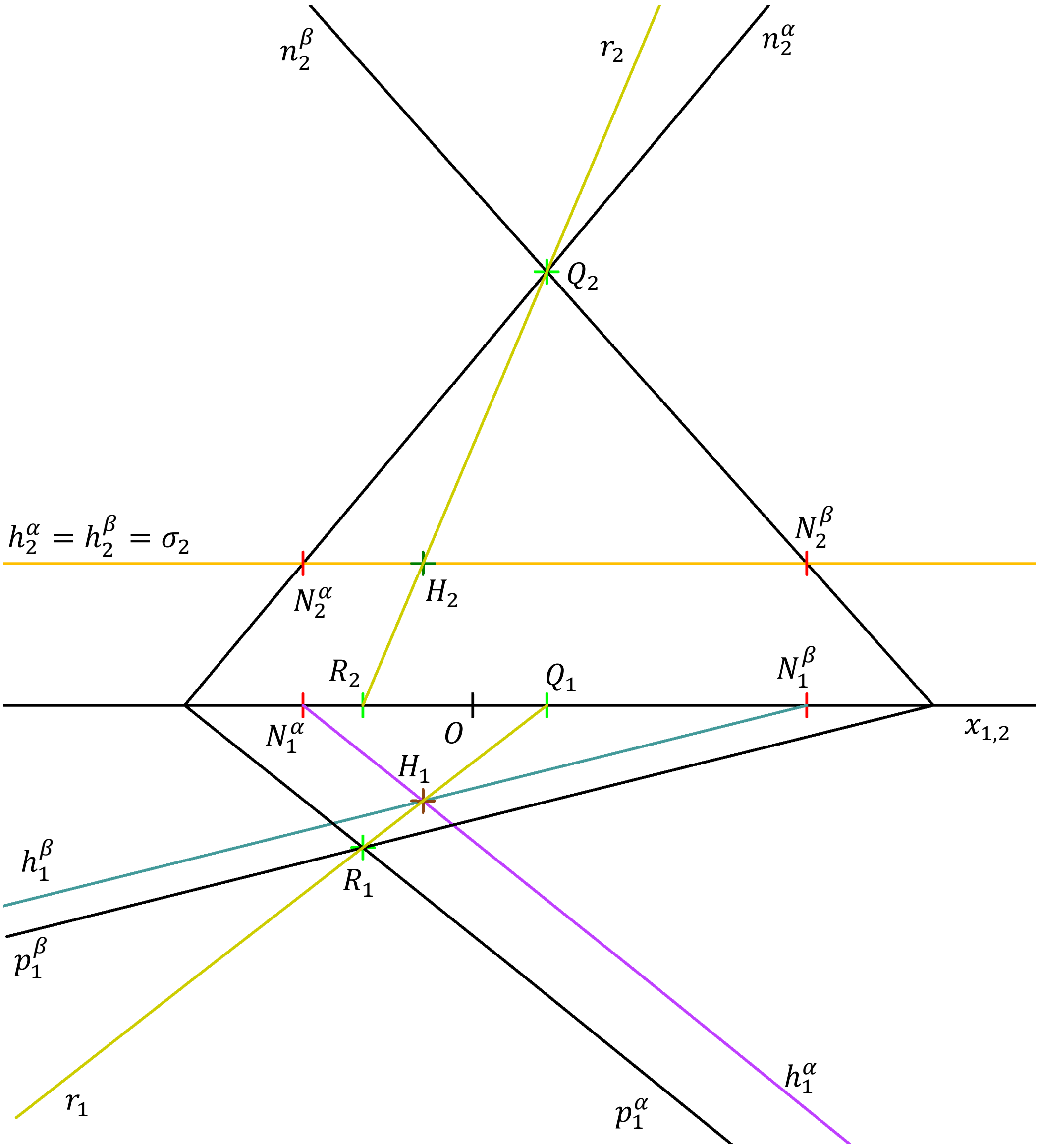
Příklady:

Pozn.: V příkladech jsou jednotlivé kroky odlišeny barevně: 1. krok = zelená, 2. krok = oranžová, 3. krok = červená, 4. krok = modrá, 5. krok = fialová, 6. krok = hnědá, 7. krok = tmavě zelená, 8. krok = žlutá.

1) **Zobrazte průsečnici rovin $\boldsymbol{\alpha} = (-5; 4; 6)$ a $\boldsymbol{\beta} = (8; 2; 9)$. (obr. 1.2.1)**

Jak již bylo řečeno jedním bodem průmětu průsečnice je průsečík stop, tedy $p_1^\alpha \cap p_1^\beta = \{R_1\}$ a $n_2^\alpha \cap n_2^\beta = \{Q_2\}$. Jelikož je možné sestrojit oba průsečíky, můžeme sestrojit jejich zbývající průměty R_2 a Q_1, kterými prochází průměty průsečnice (tj. $r_1 = \overleftrightarrow{R_1Q_1}$ a $r_2 = \overleftrightarrow{R_2Q_2}$).

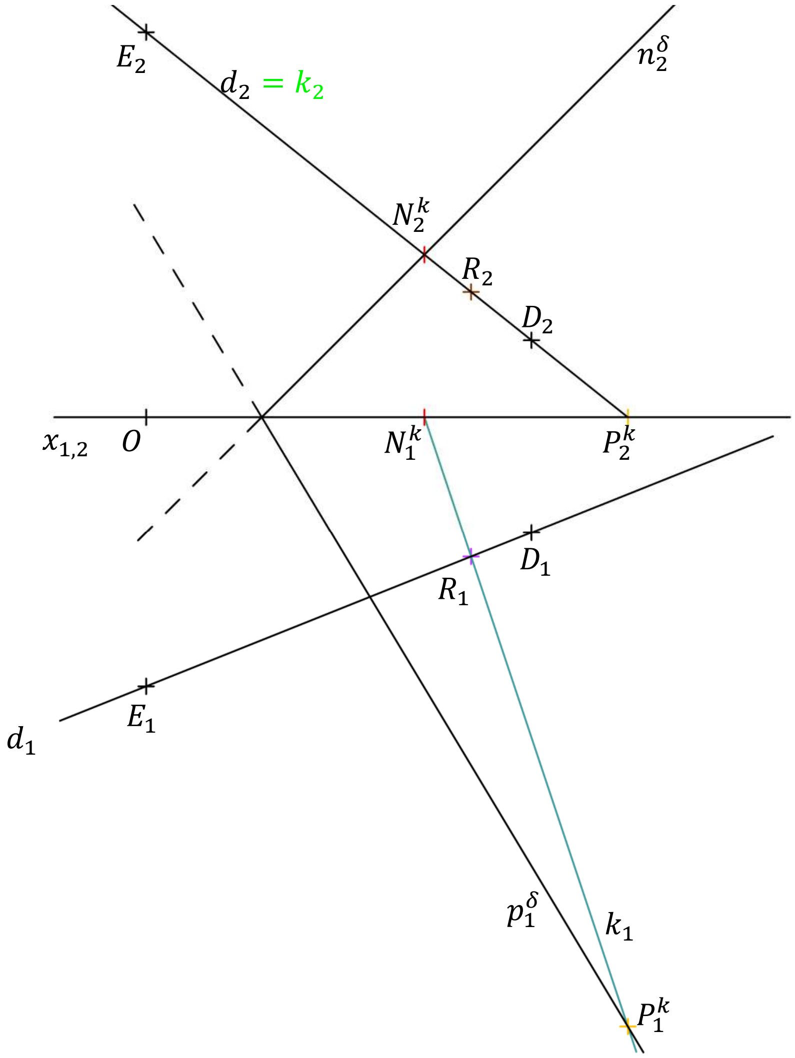
Občas se ale setkáme s tím, že nemáme k dispozici jeden (nebo dokonce oba) z průsečíků stop. Řekněme, že nemůžeme sestrojit průsečík nárysných stop rovin a zkusme příklad vyřešit znovu pomocí hlavních přímek. Zvolme hlavní rovinu σ_2 rovnoběžnou s půdorysnou, tj. volíme horizontální přímky v obou rovinách tak, že leží ve společné rovině σ_2. Pomocí stopníků najdeme jejich půdorysy a jejich průsečík H_1 je také bod průsečnice r. Nárys tohoto bodu musí opět ležet na nárysech hlavních přímek. Spojením bodů R_1 a H_1 získáme půdorys průsečnice a spojením bodů R_2 a H_2 její nárys.



Obr. 1.2.1: Zobrazení průsečnice rovin

2) Zobrazte průsečík přímky $\boldsymbol{d} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{DE}}$ a roviny $\boldsymbol{\delta} = (\mathbf{3}; -\mathbf{5}; -\mathbf{3})$, $\boldsymbol{D} = [\mathbf{10}; \mathbf{3}; \mathbf{2}]$ a $\boldsymbol{E} = [\mathbf{0}; \mathbf{7}; \mathbf{10}]$. (obr. 1.2.2)

Pro nalezení průsečíku využijeme již zmíněnou krycí přímku – pro lepší nalezení stopníků využijme krycí přímku v nárysně, tj. $k_2 = d_2$ (tzn. přímka k je různoběžná s přímkou d, neboť leží ve stejné promítací rovině, navíc leží v rovině δ). Krycí přímka k je vlastně průmět přímky d do roviny δ. Jelikož leží přímka k rovině δ, můžeme pomocí stopníků snadno sestrojit i její průmět k_1. Jak vidíme, k_1 a d_1 jsou různoběžné a protínají se v bodě, který označme například R_1. Nárys tohoto bodu musí ležet na ordinále a také na přímkách k_2 a d_2. Tento bod je hledaný průsečík přímky d s rovinou δ.

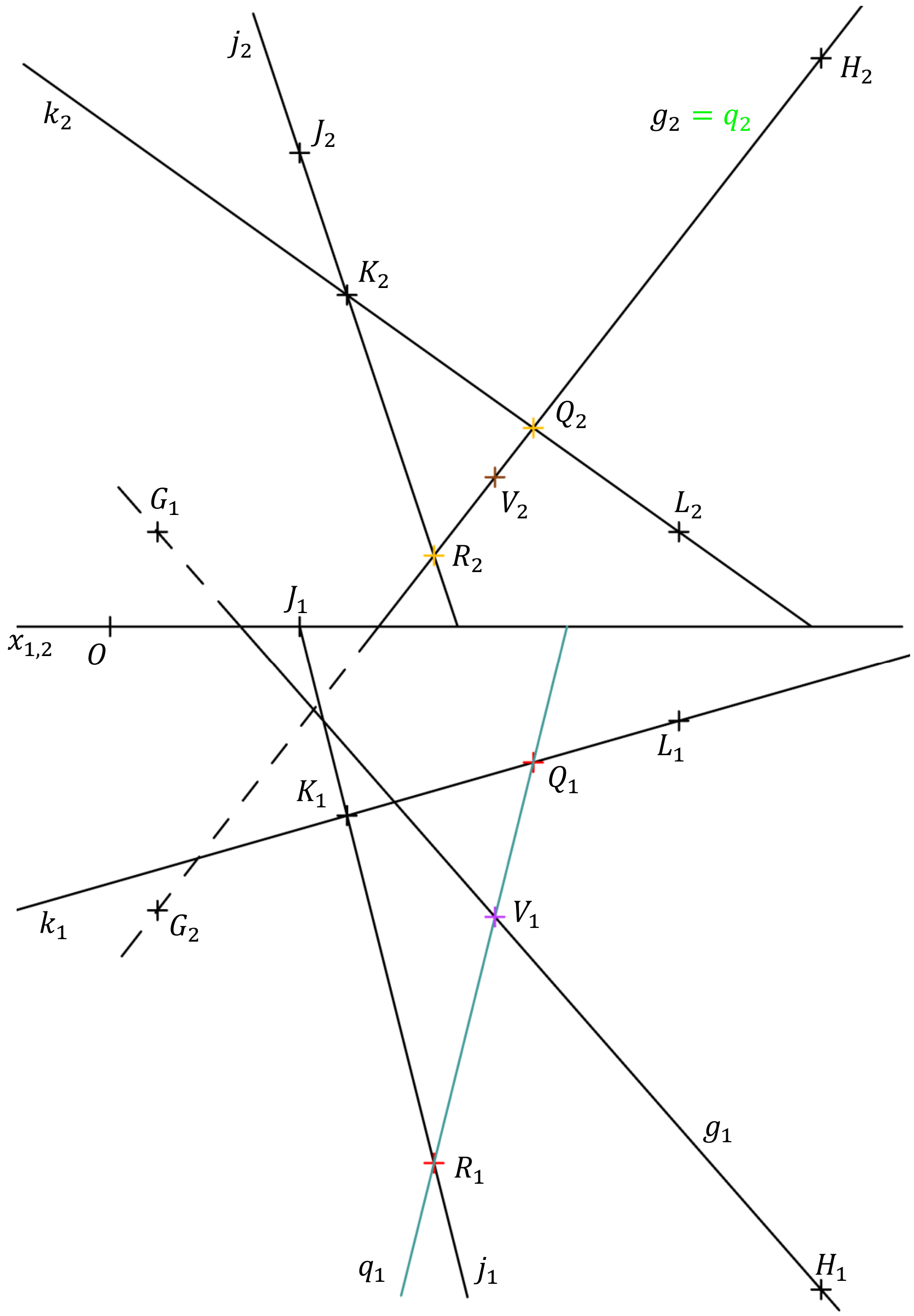


Obr. 1.2.2: Zobrazení průsečíku přímky a roviny

3) **Zobrazte průsečík přímky $g = \overleftrightarrow{GH}$ a roviny χ, která je dána různoběžkami $j = \overleftrightarrow{JK}$ a $k = \overleftrightarrow{KL}$, $G = [1; -2; -6]$, $H = [15; 14; 12]$, $J = [4; 10; 0]$, $K = [5; 4; 7]$ a $L = [12; 2; 2]$. (obr. 1.2.3)**

V tomto příkladu můžeme postupovat obdobně jako v předchozím. Využijeme tedy krycí přímku, ale nemůžeme určit její stopníky (nebudeme totiž stopu roviny χ vůbec potřebovat, ačkoliv by to samozřejmě vedlo ke správnému výsledku, ale delší cestou), proto využijeme průsečíky s přímkami j a k. Tedy využijme například krycí přímku q v nárysu, tj. $g_2 = q_2$. Jelikož tato přímka leží v rovině χ, kde také leží příkmy j a k, je s nimi různoběžná (evidentně není s žádnou rovnoběžná, což bychom snadno poznali) a tyto průsečíky označme např. Q a R. Nyní najdeme jejich půdorysy na ordinálách a na odpovídajících přímkách. Tím jsme také sestrojili půdorys přímky q, která musí těmito body procházet.

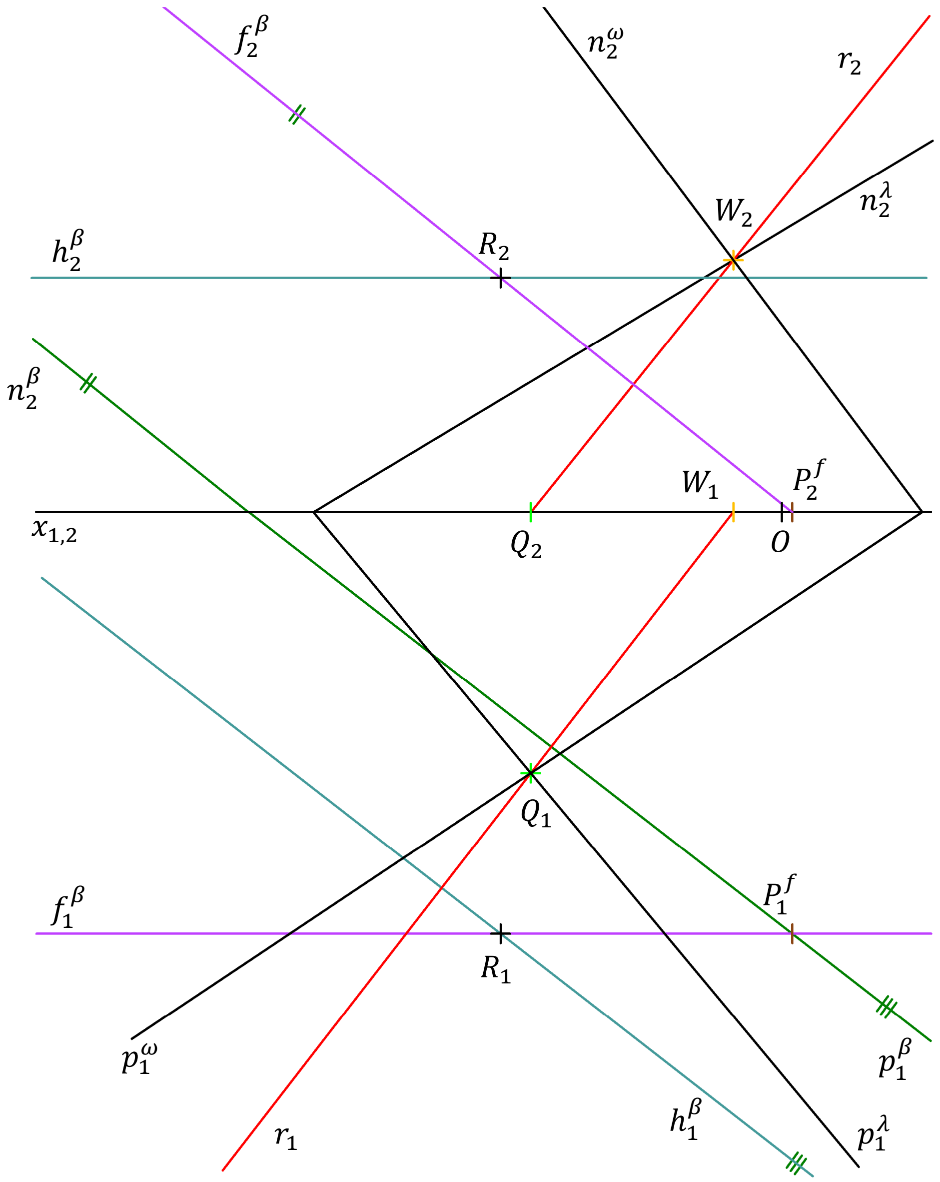
Kde přímka q_1 protíná přímku g_1, tam je hledaný bod V_1. Snadno najdeme i jeho nárys.



Obr. 1.2.3: Zobrazení průsečíku přímky a roviny

4) Zobrazte stopy roviny $\boldsymbol{\beta}$, která prochází bodem $\boldsymbol{R} = [-\mathbf{6}; \mathbf{9}; \mathbf{5}]$ a je kolmá k rovinám $\boldsymbol{\omega} = (\mathbf{3}; \mathbf{2}; \mathbf{4})$ a $\boldsymbol{\lambda} = (-\mathbf{10}; \mathbf{12}; \mathbf{6})$. (obr. 1.2.4)

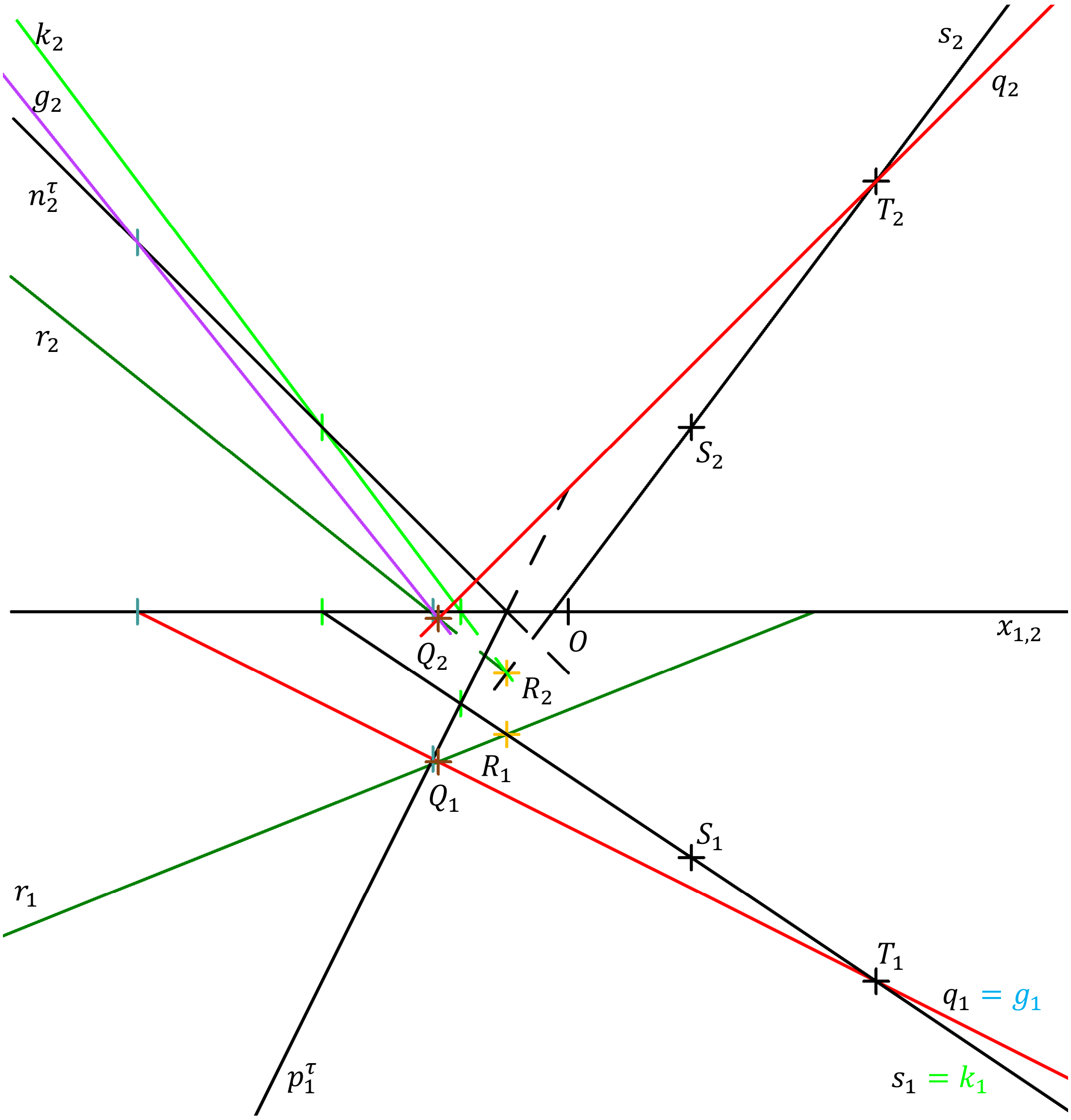
Úlohu bychom mohli řešit pomocí kolmic – rovina kolmá k daným rovinám musí obsahovat přímky, které jsou kolmé k jedné a k druhé rovině, tedy by stačilo nalézt dvě kolmice procházející bodem R, kde jedna bude kolmá k rovině ω a druhá k rovině λ, a ty již určují rovinu β. Vyřešme ale úlohu jinak.



Obr. 1.2.4: Zobrazení roviny

Lepší než sestrojovat rovinu kolmou ke dvěma rovinám je sestrojit rovinu kolmou k přímce. Ale jakou přímku vybrat? Pokud je rovina kolmá ke dvěma rovinám, musí být kolmá i k některým přímkám v těchto rovinách (v rovinách totiž jsou mimo jiné i přímky s touto rovinou rovnoběžné). Takových kolmic je nekonečně mnoho a jsou navzájem rovnoběžné. Pokud jsou přímky z dvou rovin navzájem rovnoběžné, znamená to, že i průsečnice těchto rovin s nimi musí být rovnoběžná. Stačí tedy sestrojit rovinu kolmou k průsečnici r rovin ω a λ (jako v *Příkladu 5* v kapitole *Zobrazení roviny*), která bude procházet bodem R. Jak víme průmět kolmice je kolmý k odpovídající stopě roviny, takže i k příslušným hlavním přímkám. Sestrojme tedy horizontální a frontální přímky, procházející bodem R tak, aby platilo $h_1 \perp r_1$, $f_2 \perp r_2$ a $h_2, f_1 \parallel x_{1,2}$. Pomocí jejich stopníků zjistíme, kudy prochází stopa roviny β, navíc musí být kolmá k průmětu průsečnice (resp. rovnoběžná s průmětem odpovídající hlavní přímky).

5) Zobrazte průsečnici rovin σ a τ, kde rovina σ prochází přímkou $s = \overleftrightarrow{ST}$, $S = [2; 4; 3]$ a $T = [5; 6; 7]$, a je kolmá k rovině $\tau = (-1; -2; -1)$. (obr. 1.2.5)

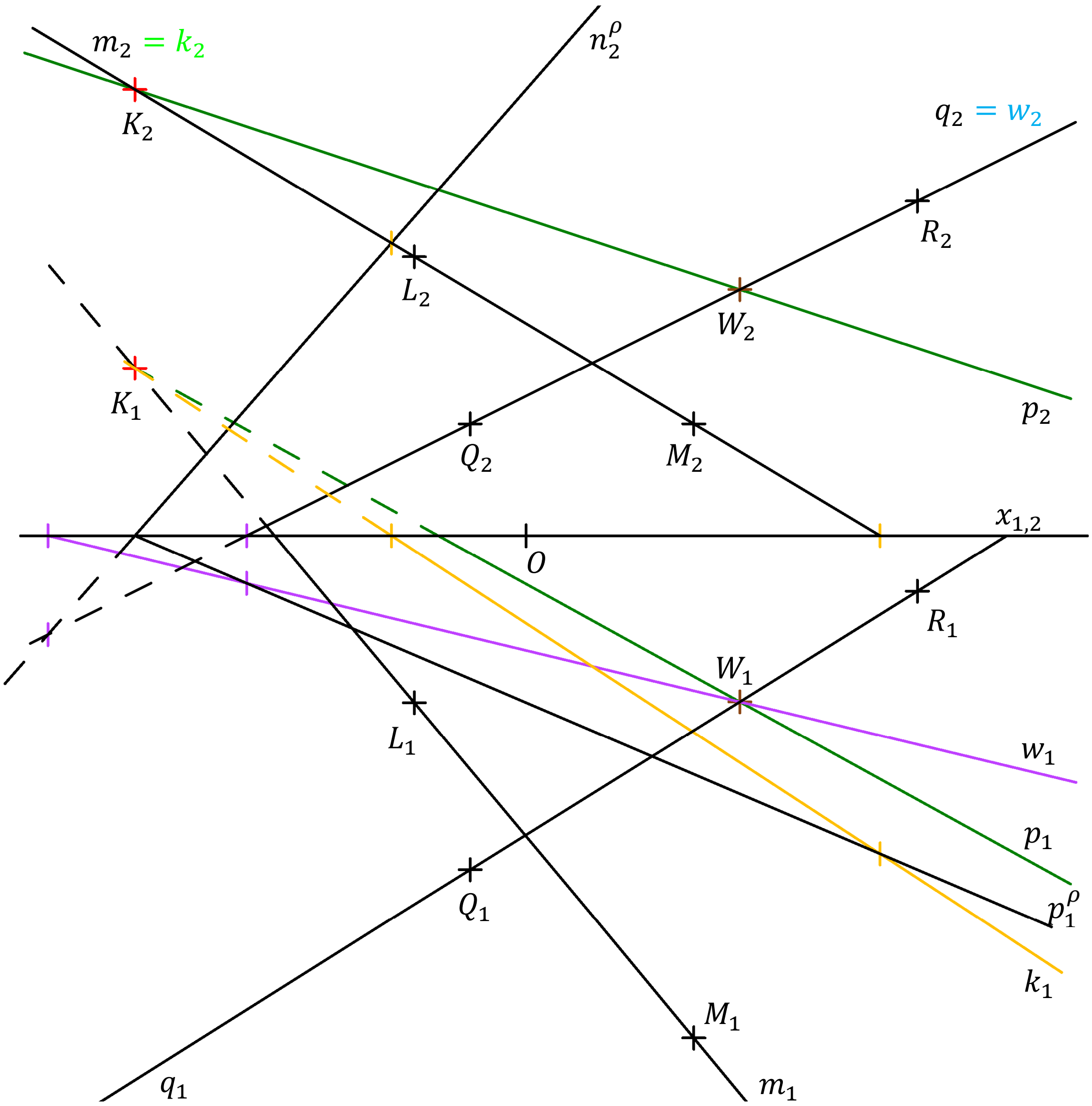


Obr. 1.2.5: Zobrazení průsečnice rovin

Mohli bychom příklad řešit tak, že najdeme stopy roviny σ a pak jednoduše sestrojíme průsečnici. Ale někdy stopu nalézt nedokážeme, tak si ukažme i jiné řešení pro tuto speciální polohu rovin.

Uvědomme si, že pokud je rovina σ, obsahující přímku s kolmá k rovině τ, jejich průsečnice je vlastně kolmý průmět přímky s do roviny τ. Stačí tedy sestrojit kolmé průměty dvou libovolných bodů do roviny τ a jejich spojnice bude hledaná průsečnice. Jedním z těchto bodů může být průsečík přímky s a roviny τ (neboť jeho průmět je ten samý bod) a jako další bod například průmět bodu T. Pomocí krycí přímky např. $s_1 = k_1$ zjistíme průsečík, tedy $\tau \cap s = \{R\}$. Dále sestrojíme kolmici q z bodu T na rovinu τ. Nyní najdeme její průsečík s rovinou – pomocí krycí přímky, kdy např. $q_1 = g_1$, tedy $\tau \cap q = \{Q\}$. Spojnice bodů R a Q je hledaná průsečnice r.

6) Zobrazte příčku mimoběžek $m = \overleftrightarrow{LM}$ a $q = \overleftrightarrow{QR}$, která leží v rovině $\rho = (-7; 3; 8)$, $L = [-2; 3; 5]$, $M = [3; 9; 2]$, $Q = [-1; 6; 2]$ a $R = [7; 1; 6]$. (obr. 1.2.6)

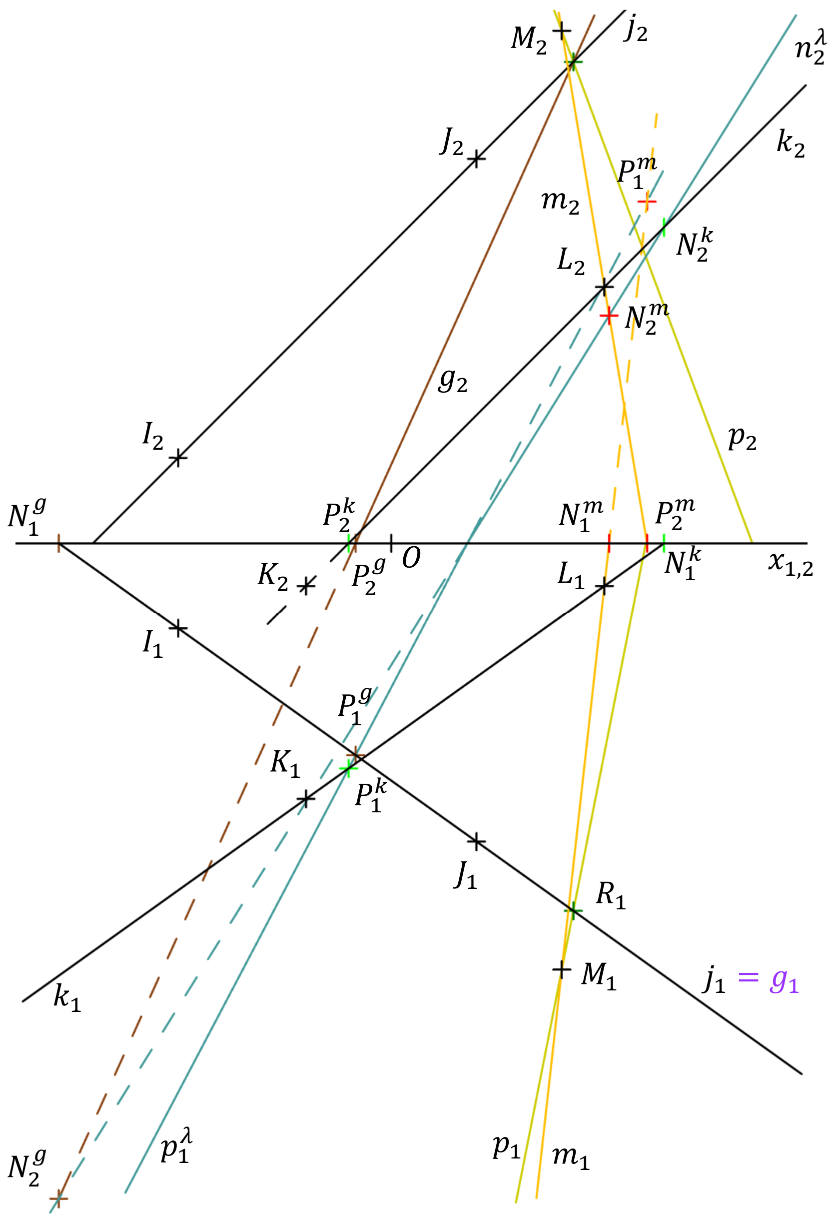


Obr. 1.2.6: Zobrazení příčky mimoběžek

Jelikož má příčka ležet v rovině ρ a musí být různoběžná s přímkami m a q, bude to spojnice průsečíků přímek m a q s rovinou ρ.

Pomocí krycí přímky tedy sestrojíme průsečík roviny ρ a přímky m, tedy volme např. $m_2 = k_2$, průsečíkem bude bod K (*Pozn.*: stopníky nejsou pro přehlednost označeny). Pro zjištění průsečíku roviny s přímkou q využijme například krycí přímku q, pro niž platí $q_2 = w_2$, tedy průsečík bude bod W. Spojnice bodů K a W je hledaná příčka p.

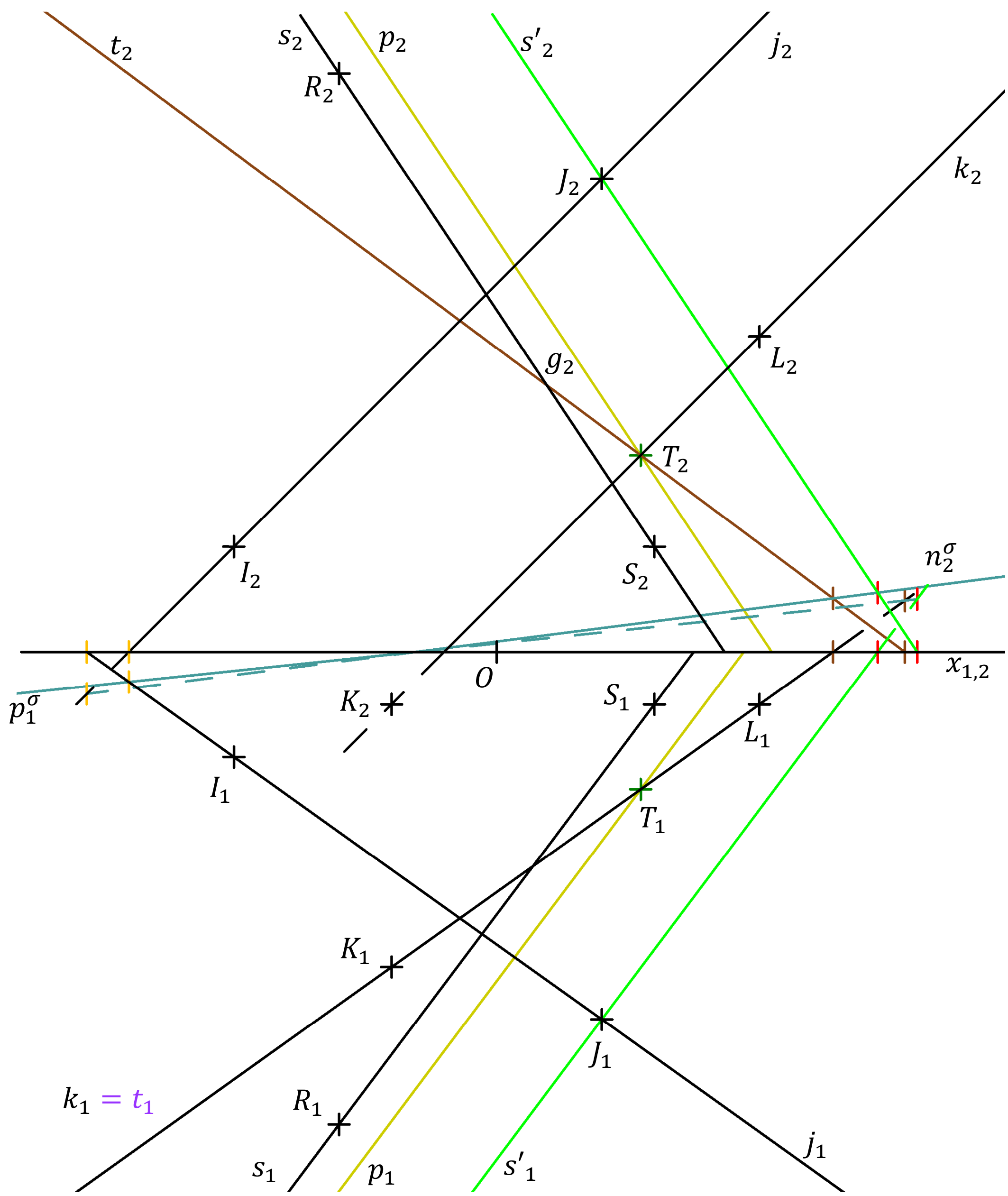
7) Sestrojte příčku mimoběžek $j = \overleftrightarrow{IJ}$ a $k = \overleftrightarrow{KL}$, která prochází bodem $M = [4; 10; 12]$, kde $I = [-5; 2; 2]$, $J = [2; 7; 9]$, $K = [-2; 6; -1]$, $L = [5; 1; 6]$. (obr. 1.2.7)



Obr. 1.2.7: Zobrazení příčky mimoběžek

Příčka musí procházet bodem M a musí být s přímkami j a k různoběžná. Můžeme tedy uvažovat, že leží v rovině λ, která obsahuje bod M a například přímku k. Sestrojme tedy pomocí stopníků přímky k a přímky m, která prochází bodem M a například bodem L (musí být různoběžná s přímkou k, aby obě ležely ve stejné rovině), stopy roviny λ. Nyní snadno zkonstruujeme pomocí krycí přímky, kde protíná přímka j rovinu λ. Tento bod nazvěme třeba R a spojme ho s bodem M, vznikne tak hledaná příčka p.

8) Sestrojte příčku mimoběžek z předchozího příkladu, která je rovnoběžná se směrem $s = \overleftrightarrow{RS}$, $R = [-3; 9; 11]$ a $S = [3; 1; 2]$. (obr. 1.2.8)



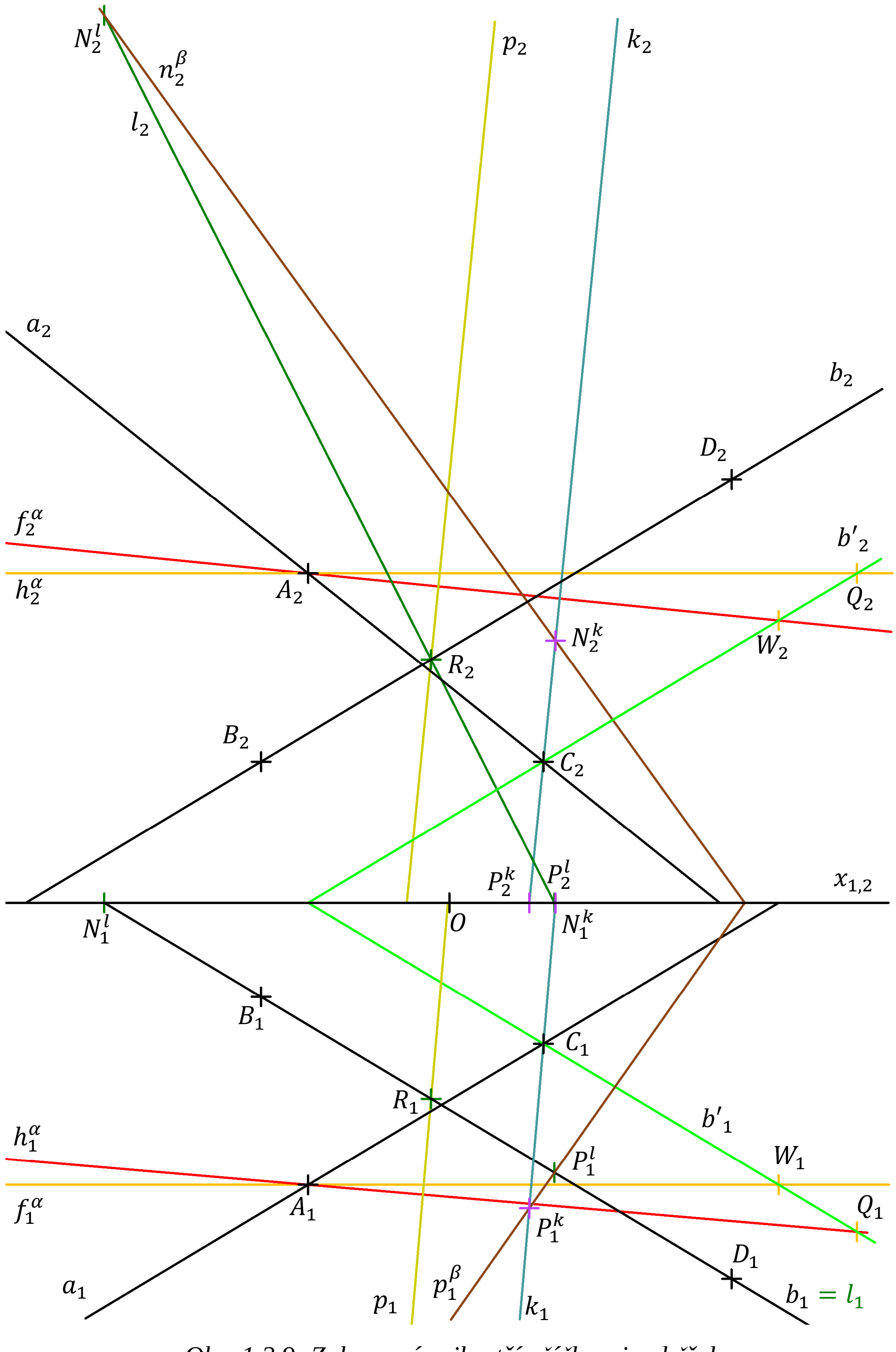
Obr. 1.2.8: Zobrazení příčky mimoběžek

Jelikož má být příčka rovnoběžná s přímkou s, musí ležet v rovině rovnoběžné s touto přímkou, která bude obsahovat také například přímku j. Veďme tedy například bodem J přímku s' rovnoběžnou s přímkou s (mohli bychom vybrat i libovolný jiný bod, aby přímky s' a j byly různoběžné). Pomocí jejích stopníků a stopníků přímky j snadno zjistíme stopy roviny σ, která prochází těmito dvěma přímkami (*pozn.*: pro přehlednost nejsou stopníky označeny). Nyní již sestrojíme průsečík přímky k s touto rovinou, kterým musí procházet i příčka. Zvolme vhodnou krycí přímku například v půdorysně. Hledaným průsečíkem je bod T. Nyní jen tímto bodem vedeme rovnoběžnou přímku s přímkou s, což je již hledaná příčka p.

9) Najděte nejkratší příčku mimoběžek $\boldsymbol{a = \overleftrightarrow{AC}}$ a $\boldsymbol{b = \overleftrightarrow{BD}}$, kde $\boldsymbol{A = [-3; 6; 7]}$, $\boldsymbol{B = [-4; 2; 3]}$, $\boldsymbol{C = [2; 3; 3]}$ a $\boldsymbol{D = [6; 8; 9]}$. (obr. 1.2.9)

Nejkratší příčka je taková, která spojuje dva nejbližší body mimoběžek. Je to tedy kolmice na obě mimoběžky.

Kolmici k mimoběžkám sestrojíme jako kolmici k rovině α, která obsahuje například přímku a a je rovnoběžná s přímkou b. Sestrojme tedy přímku rovnoběžnou s přímkou b, která bude různoběžná s přímkou a – tj. sestrojme přímku $b' \parallel b$, procházející například bodem C. Stopy roviny α nebudeme sestrojovat, ale využijeme hlavní přímky této roviny. Sestrojme tedy horizontální a frontální přímky, které prochází bodem A a pomocí jejich průsečíků s přímkou b' sestrojme jejich zbylé průměty. Nyní narýsujme kolmici k této rovině (tj. k příslušné hlavní přímce) například v bodě C. Tato kolmice k a přímka a leží v jedné rovině, která také obsahuje hledanou příčku. Najděme tedy stopy této roviny β (pomocí stopníků přímek a a k) a sestrojme (pomocí krycí přímky l) její průsečík R s přímkou b. Tímto bodem R musí procházet příčka, která má být kolmá na rovinu α. Stačí tedy sestrojit přímku rovnoběžnou s přímkou k (resp. kolmici k rovině α), která bude procházet bodem R, a to již bude hledaná příčka p.



Obr. 1.2.9: Zobrazení nejkratší příčky mimoběžek

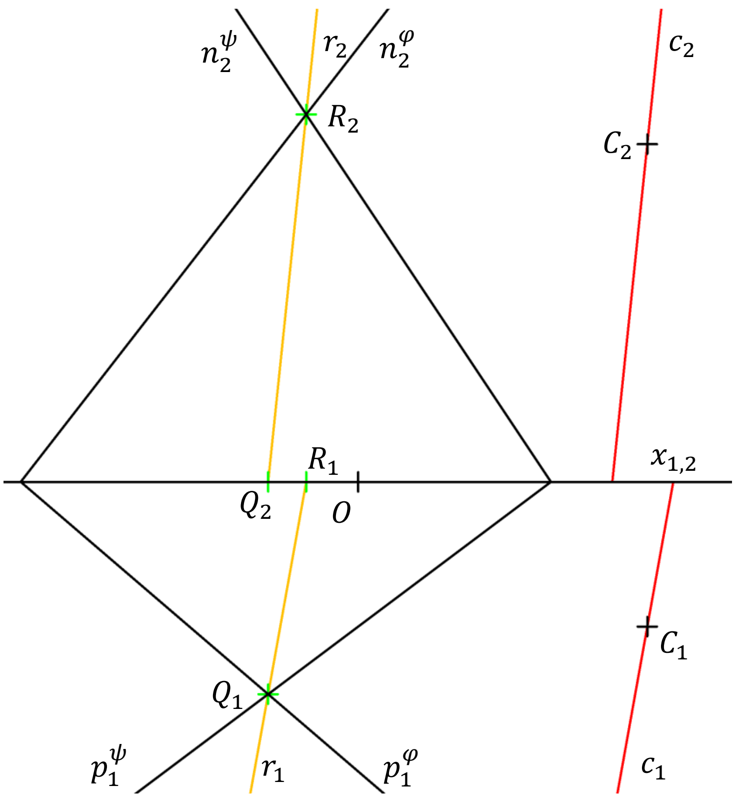
10) Zobrazte přímku c, která je rovnoběžná s rovinami $\varphi = (-7; 6; 9)$ a $\psi = (4; 3; 6)$ a prochází bodem $C = [6; 3; 7]$. (obr 1.2.10)

Pokud má být přímka rovnoběžná s oběma rovinami, musí v každé z nich existovat přímky, které s přímkou c budou rovnoběžné. Tyto přímky v rovinách φ

a ψ musí být také navzájem rovnoběžné, což znamená, že i průsečnice těchto rovin je s nimi rovnoběžná (*pozn.*: můžete si zkusit vymodelovat všechny možné případy, kdy jsou přímky z dvou rovin rovnoběžné).

Nebo můžeme říci, že přímka c musí ležet v rovině φ' rovnoběžné s rovinou φ procházející bodem C a zároveň v rovině ψ' rovnoběžné s rovinou ψ procházející bodem C – tj. přímka c je průsečnice rovin φ' a ψ'. Pokud si tuto situaci představíme „zboku“ (tj. ve směru průsečnice rovin φ a ψ) tak, že roviny se zobrazí jako přímky, budou tvořit rovnoběžník, kde jedna dvojice protilehlých vrcholů jsou průsečnice. To znamená, že přímka c musí být rovnoběžná s průsečnicí rovin φ a ψ.

Sestrojíme tedy průsečnici rovin φ a ψ pomocí průsečíků stop. S touto průsečnicí r vedeme přímku rovnoběžnou, která prochází bodem C, což je hledaná přímka c.

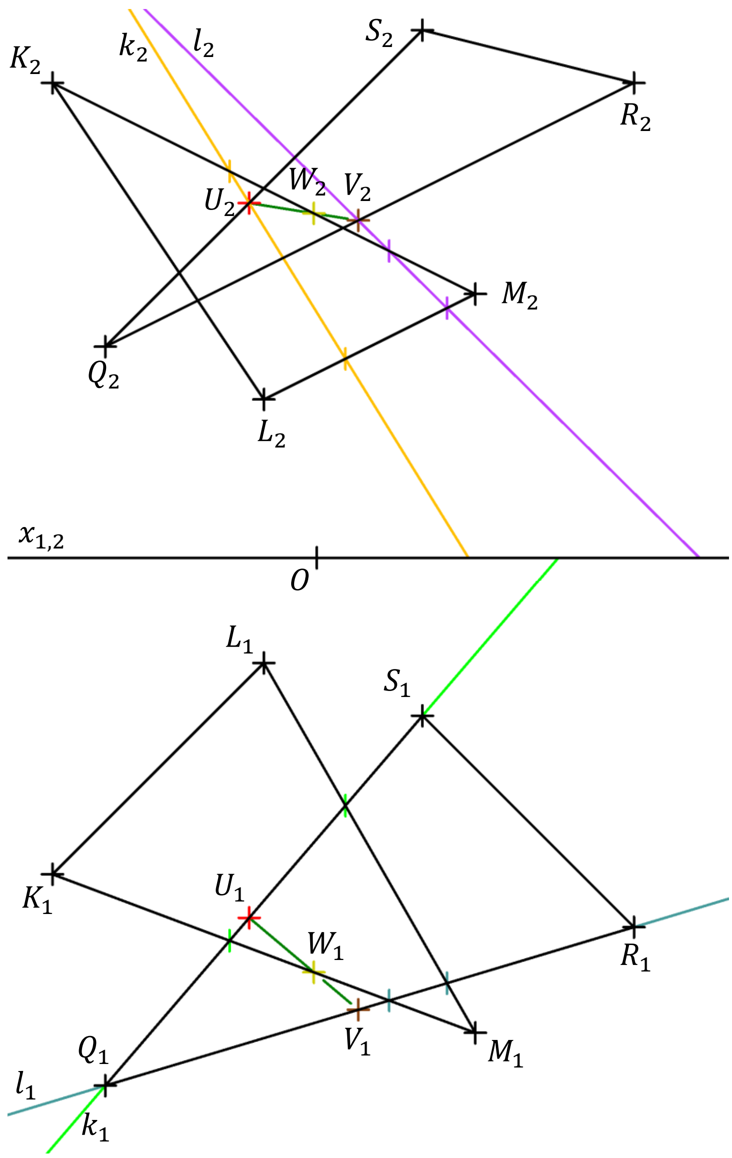


Obr. 1.2.10: Zobrazení přímky rovnoběžné s rovinou

11) Zobrazte zásek trojúhelníků $\boldsymbol{KLM}$ a $\boldsymbol{QRS}$ i s viditelností, $\boldsymbol{K = [-5; 6; 9]}$, $\boldsymbol{L = [-1; 2; 3]}$, $\boldsymbol{M = [3; 9; 5]}$, $\boldsymbol{Q = [-4; 10; 4]}$, $\boldsymbol{R = [6; 7; 9]}$ a $\boldsymbol{S = [2; 3; 10]}$. (obr. 1.2.11)

Zásek je druh průniku, kdy krajní body průsečnice objektů leží jak na straně, tak uvnitř obou z objektů. Zásek dvou útvarů jste určitě viděli, pokud jste skládali například stromeček ze dvou vystřižených šablon, které jste do půlky rozstřihli a pak je do sebe zasunuli.

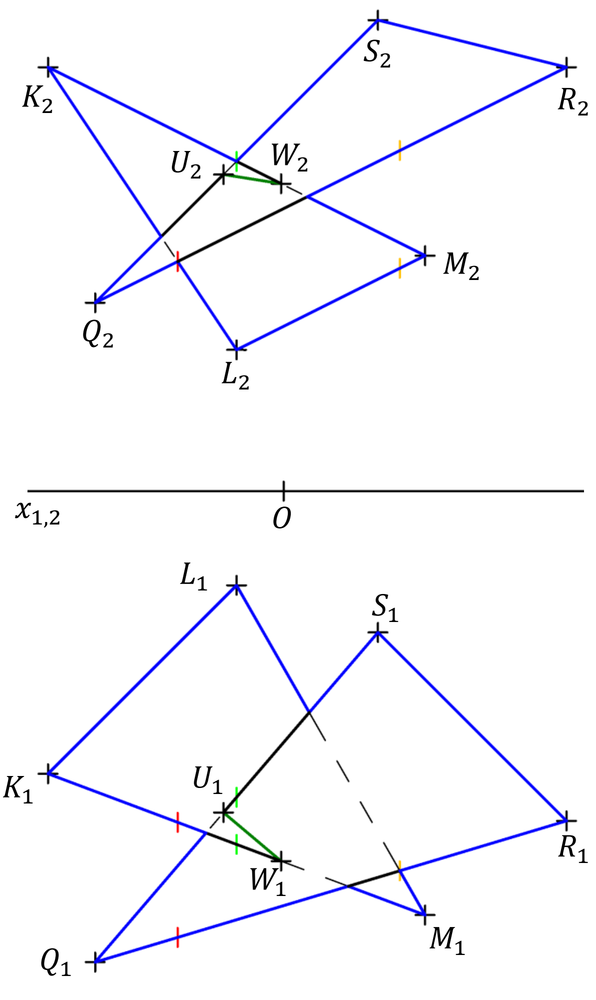
Budeme tedy hledat průsečnici rovin dvou trojúhelníků. K jejímu sestrojení potřebujeme dva body. Nejprve zjistíme průsečík U například strany QS s trojúhelníkem KLM. Ten najdeme snadno pomocí krycí přímky k, která leží v rovině trojúhelníka KLM (tj. zbylý průmět najdeme pomocí jejích průsečíků s trojúhelníkem KLM). Stejně zjistíme i průsečík V strany QR s trojúhelníkem KLM (volíme například krycí přímku l v půdorysu). Průsečnice rovin trojúhelníků je přímka UV. Můžeme si všimnout, že tato přímka protíná stranu KM v bodě W. Část této přímky, která leží v obou trojúhelnících je úsečka UW, což je hledaný průnik.



Obr. 1.2.11 a): Zobrazení záseku trojúhelníků

Viditelnost stran zjistíme následovně (viz *obrázek 1.2.11 b)*): v půdorysně i v nárysně budou vidět všechny obvodové části průmětů (v obrázku jsou vyznačeny modře). Dále bude také vidět úsečka UW, neboť leží v obou trojúhelnících a nic jí tedy „nezakrývá“. Nyní se podívejme na viditelnost části strany QR uvnitř trojúhelníku KLM v půdorysu: pomocí polohy oranžově znázorněného průsečíku Q_1R_1 se stranou L_1M_1 v nárysu zjistíme, že strana QR je výš než strana LM, tedy bude v půdorysu viditelná. Díky tomu též víme, že i část strany L_1M_1 uvnitř trojúhelníku $Q_1R_1S_1$ nebude vidět a tím pádem musí být vidět část úsečky U_1S_1 uvnitř $K_1L_1M_1$ a naopak část U_1Q_1 nebude vidět. Takto jsme snadno určili viditelnost v půdorysu. Podobně budeme postupovati v nárysu – pomocí zeleného průsečíku K_2M_2 a Q_2S_2 zjistíme, že část Q_2U_2 bude vidět a zbylá část U_2S_2 vidět nebude. Podobně tomu bude pro červený průsečík K_2L_2 a Q_2R_2.

Pozn.: Platí, že bodem na průsečnici se **viditelnost** přímky mění, tedy vždy na jedné straně od průsečnice bude přímka viditelná a na druhé ne.

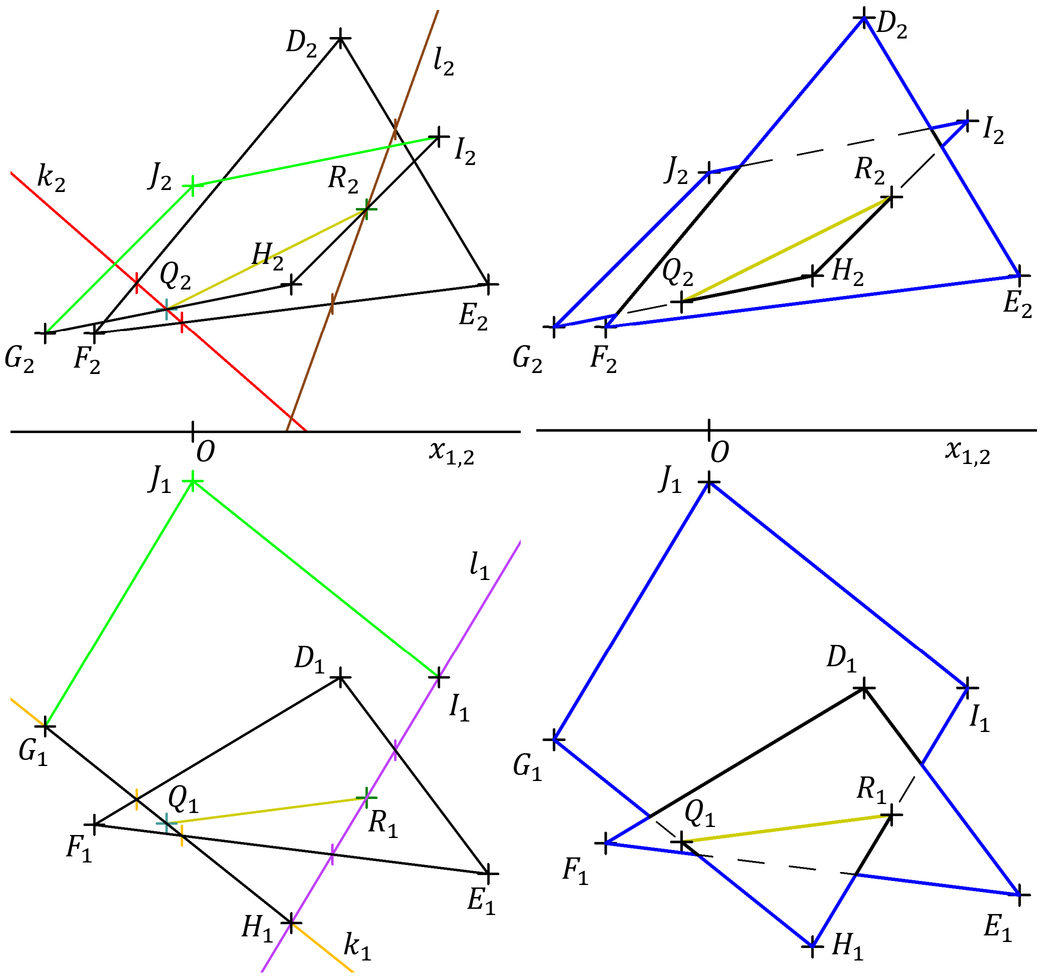


Obr. 1.2.11 b): Zobrazení záseku trojúhelníků - viditelnost

12) Zobrazte průnik trojúhelníku $\boldsymbol{DEF}$ a rovnoběžníku $\boldsymbol{GHIJ}$, $\boldsymbol{D} = [3; 5; 8]$, $\boldsymbol{E} = [6; 9; 3]$, $\boldsymbol{F} = [-2; 8; 2]$, $\boldsymbol{G} = [-4; 5; 2]$, $\boldsymbol{H} = [2; 10; 3]$ a $\boldsymbol{I} = [5; 5; 6]$. (obr. 1.2.12)

Nejprve pomocí rovnoběžnosti sestrojíme i čtvrtý vrchol rovnoběžníku. Při konstrukci průsečnice budeme postupovat jako v předchozím příkladu. Pomocí krycí přímky k například strany GH (k tedy leží v rovině trojúhelníka DEF) sestrojíme bod Q – najdeme nárysy průsečíků přímky k_1 s trojúhelníkem, čímž určíme nárys přímky k; průsečík Q strany GH s trojúhelníkem je průsečík krycí přímky k se stranou GH. Najdeme i půdorys bodu Q. Stejným způsobem pomocí krycí přímky l strany HI sestrojíme její průsečík R s trojúhelníkem.

Viditelnost se zde bude řešit opět podobně jako v předchozím příkladu.



Obr. 1.2.12: Zobrazení průniku trojúhelníku s rovnoběžníkem a jejich viditelnost

1.3 Osová afinita mezi dvěma rovinami a v rovině

Osová afinita je důležitý pomocník nejen při zobrazování útvarů ležících v obecné rovině, ale také ke konstrukci řezů nebo i elipsy. Než však vysvětlíme pojem osové afinity, musíme si vysvětlit pojmy nevlastní a vlastní bod a nevlastní přímka. **Nevlastní bod** je takový bod, který není vlastní, resp. který je nekonečně daleko. **Vlastní body** jsou „reálné“ body, které můžeme zakreslit (např. průsečík dvou různoběžek). Nevlastní body zakreslit nelze (např. průsečík dvou rovnoběžek). Když tedy v rovině uděláme několik navzájem rovnoběžných přímek, víme, že směřují do jednoho společného bodu (který můžeme považovat za jejich průsečík) a tím je nevlastní bod (tedy nekonečně vzdálený bod). Pokud bychom vzali ještě jiné navzájem rovnoběžné přímky, které mají také společný nevlastní bod, a další a další takové rovnoběžné přímky, tak zjistíme, že v rovině máme nekonečně mnoho takových nevlastních bodů (neboť jedna soustava navzájem rovnoběžných přímek je různoběžná s jinou soustavou navzájem rovnoběžných přímek – tyto dvě soustavy tedy „ukazují“ na dva nevlastní body). Tyto nevlastní body pak leží na jedné přímce, které se říká **nevlastní přímka**. Ta je jakýmsi „okrajem“ roviny, neboť v prostoru obdobně platí, že dvě rovnoběžné roviny se také protínají a to v nevlastní přímce (a tyto přímky pak zase vytvoří nevlastní rovinu). (více k tomuto můžete nalézt v [1])

Uvažujme dvě různoběžné roviny α a β (viz *obrázek 1.3.1*). Jejich průsečnici označme o a nazvěme ji **osa afinity**. Nyní zvolme přímku, která nebude s žádnou z rovin rovnoběžná, označme ji s a nazvěme **směr afinity**. Zvolme několik bodů v rovině α a rovnoběžně s přímkou s je promítněme do roviny β. Zvoleným bodům A, B a C z roviny α odpovídají body A', B', a C' v rovině β. Máme tedy jisté zobrazení mezi rovinami α a β, které je dáno směrem s a osou o. (*Pozn.:* V následujícím bude pro stručnost použito pro osovou afinitu označení jen afinita.)

Nyní si afinitu mezi dvěma rovinami definujme:

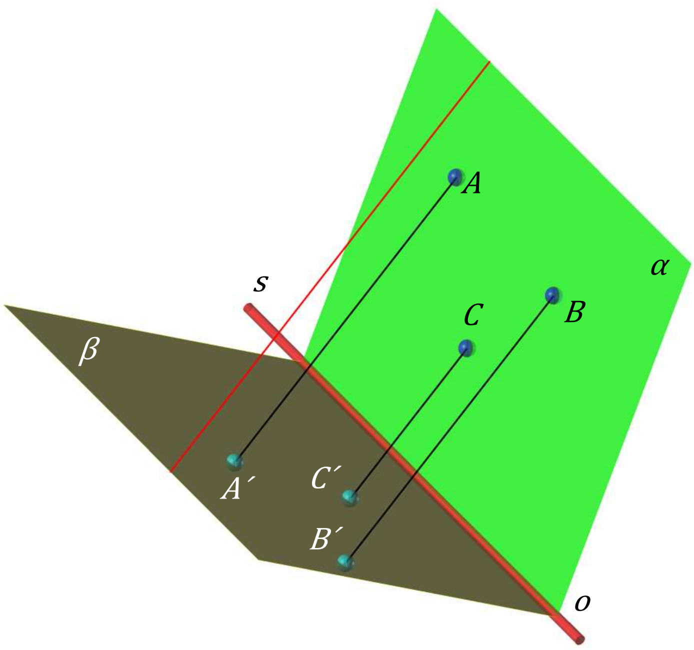
Afinita mezi dvěma rovinami α, β je vzájemně jednoznačné zobrazení bodů roviny α na body roviny β, přičemž osa afinity o je průsečnice těchto rovin a platí:

A) každému bodu $A \in \alpha$ je přiřazen bod $A' \in \beta$ tak, že spojnice AA' je rovnoběžná se směrem afinity s, přičemž každý bod na ose o se zobrazí na sebe,

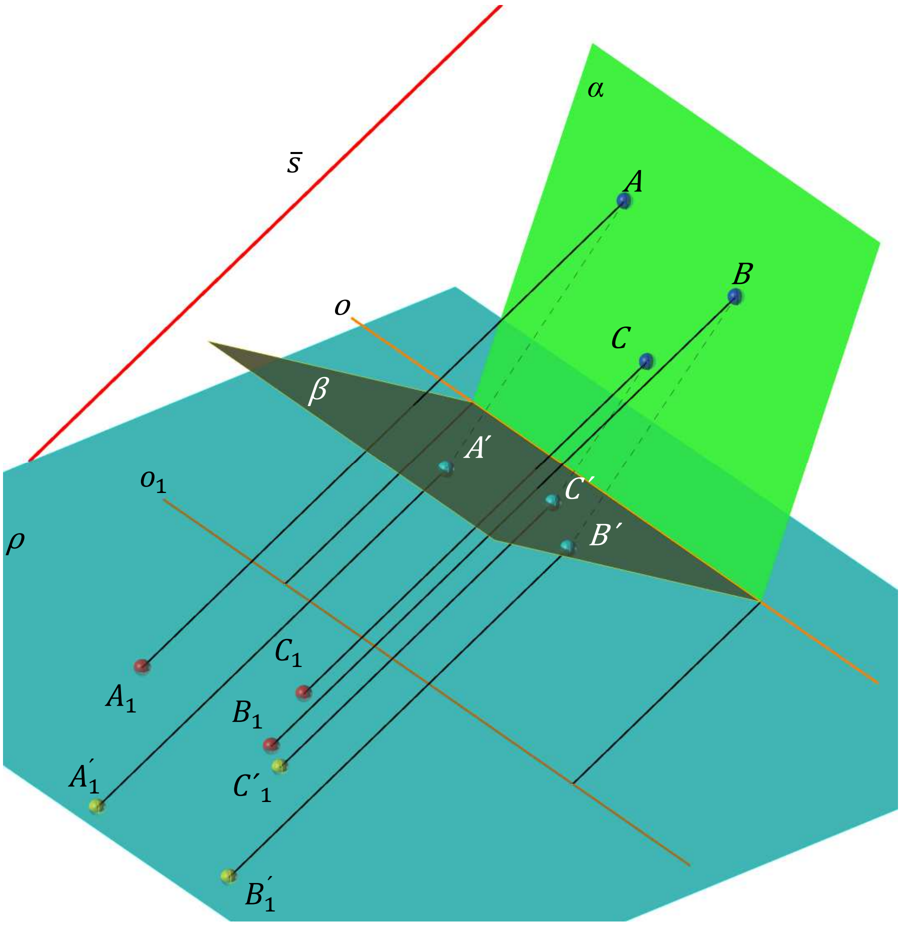
B) **každé přímce $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{\alpha}$ různoběžné s osou $\boldsymbol{o}$ odpovídá přímka $\boldsymbol{a}' \in \boldsymbol{\beta}$, která je různoběžná s osou $\boldsymbol{o}$, a platí, že přímky $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}'$ se protínají na této ose,**

C) **každé přímce $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{\alpha}$ rovnoběžné s osou $\boldsymbol{o}$ odpovídá přímka $\boldsymbol{b}' \in \boldsymbol{\beta}$ rovnoběžná s osou $\boldsymbol{o}$.**

Pozn.: Roviny uvažujeme různoběžné, ačkoliv by definice platila i pro rovnoběžné roviny – to by ale osa afinity (tedy jejich průsečnice) byla nevlastní přímka (odpovídající si přímky z obou rovin, by tedy byly rovnoběžné, a body, ve kterých by se na ose afinity protínaly, by byly body nevlastní). Pro případ, kdy obě roviny jsou rovnoběžné, by se jednalo o posunutí bodů z jedné roviny do druhé roviny. Dále, pokud by byly tyto roviny různoběžné, ale přímku s bychom zvolili rovnoběžně např. s rovinou β, body A', B' a C' by byly v nekonečnu, tedy by to byly nevlastní body a obrazem roviny α by byla nevlastní přímka (navíc by se v tomto případě nejednalo o vzájemně jednoznačné zobrazení mezi těmito rovinami).



Obr. 1.3.1: Afinita mezi dvěma rovinami



Obr. 1.3.2: Afinita v rovině, vzniklá promítnutím afinity mezi dvěma rovinami (pro přehlednost jsou prvky vzniklé promítnutím označeny indexem 1)

Na *obrázku 1.3.2* je afinita mezi rovinami α a β rovnoběžně promítnuta do roviny ρ, přičemž směr afinity mezi rovinami je znázorněn černými čárkovanými čarami (tedy např. spojnice AA') a osa o je oranžová průsečnice rovin α a β. Směr promítání do modré roviny ρ je červená přímka $\bar{s}$. Tento směr nesmí být rovnoběžný se směrem afinity (protože by bod a jeho obraz splynuly) ani s žádnou z rovin α a β (všechny body jedné z rovin by se zobrazily na osu o). Takto se získá afinita v rovině. Další možností je složení alespoň dvou afinit mezi dvěma rovinami (tj. afinita mezi 1. a 2. rovinou, mezi 2. a 3. rovinou atd.), kde první a poslední rovina jsou totožné (to ovšem neznamená, že body, které zobrazujeme afinitou z první roviny, jsou totožné s obrazy bodů v afinitě z poslední roviny). Nyní si ale definujme afinitu v rovině:

Afinita v rovině $\boldsymbol{\rho}$ je vzájemně jednoznačné zobrazení bodů roviny $\boldsymbol{\rho}$, přičemž platí, že:

A) každému bodu $\boldsymbol{A \in \rho}$ je přiřazen bod $\boldsymbol{A' \in \rho}$ tak, že spojnice $\boldsymbol{AA'}$ je rovnoběžná se směrem afinity $\boldsymbol{s}$, přičemž každý bod na ose $\boldsymbol{o}$ se zobrazí na sebe,

B) **každé přímce $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{\rho}$ různoběžné s osou $\boldsymbol{o}$ odpovídá přímka $\boldsymbol{a}' \in \boldsymbol{\rho}$, která je různoběžná s osou $\boldsymbol{o}$, a platí, že se přímky $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}'$ protínají na této ose, přičemž přímky rovnoběžné se směrem afinity $\boldsymbol{s}$ se zobrazí na sebe,**

C) **každé přímce $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{\rho}$ rovnoběžné s osou $\boldsymbol{o}$ odpovídá přímka $\boldsymbol{b}' \in \boldsymbol{\rho}$ rovnoběžná s osou $\boldsymbol{o}$.**

Odpovídající si body či přímky (tedy např. A a A', nebo b a b') se nazývají **afinně sdružené** a též se jim může obecně říkat **vzor** a **obraz**. Dále body na ose afinity nebo přímky rovnoběžné se směrem afinity se nazývají **samodružné** (v afinitě mezi dvěma rovinami však samodružné přímky nenajdeme, vyjma osy afinity). Samodružné body jsou průsečíky odpovídajících si přímek v afinitě. Samodružné přímky, což jsou ty, které se zobrazí na sebe, však nejsou bodově samodružné (tj. neobsahují pouze samodružné body). Oproti tomu osa afinity je bodově samodružná.

V afinitě platí, že poměr vzdálenosti libovolného bodu od osy a vzdálenosti jemu odpovídajícího obrazu od osy je konstantní. Tomuto poměru se říká **charakteristika afinity** a lze ho vyjádřit rovností $\lambda = |A'o| : |Ao|$.

Dále je možné afinity rozdělit na **ortogonální** (tj. **pravoúhlé**, spojnice bodů A, A' je kolmá na o), **klinogonální** (tj. **kosoúhlé**, spojnice bodů A, A' není kolmá na o) a **elaci** (směr afinity je rovnoběžný s její osou, někde můžete najít i název *nevlastní elace*). Pravoúhlou afinitu s λ = 1 nazýváme **osová souměrnost**.

Afinita také zachovává incidenci (nebo-li náležení, tedy např.: obraz bodu ležícího na přímce leží na obrazu této přímky), rovnoběžnost a poměr délek úseček, ležících na téže přímce, se společným krajním bodem (tento poměr se nazývá *dělicí poměr*, více o tomto např. v [2] str. 99).

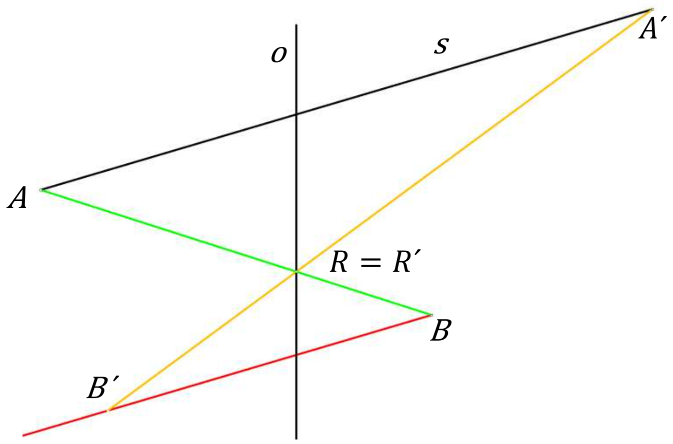
Na následujících příkladech si vše ukážeme názorněji.

Příklady:

Pozn.: V řešení těchto příkladů je využito následující barevné rozlišení kroků: 1. krok = červená, 2. krok = zelená, 3. krok = oranžová, 4. krok = modrá.

1) Určete obraz bodu $\boldsymbol{B}$, je-li dána osa afinity $\boldsymbol{o}$, bod $\boldsymbol{A}$ a jeho obraz $\boldsymbol{A}'$. (obr. 1.3.3)

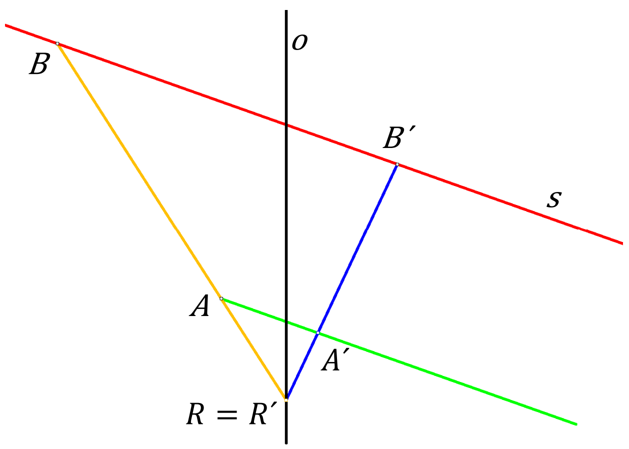
Z definice afinity víme, že B' musí ležet na přímce rovnoběžné se směrem afinity, jdoucí bodem B (což je také směr AA') – sestrojíme tuto přímku. Dále z definice víme, že spojnice dvou vzorů se protíná se spojnicí dvou obrazů těchto bodů na ose afinity. Tedy přímka AB protne o v bodě R, který je samodružný a tedy $R = R'$. Tento bod spojíme s bodem A' a kde tato přímka protne přímku rovnoběžnou se směrem s vedenou bodem B, tam je bod B'.



Obr. 1.3.3: Určení obrazu bodu v afinitě

2) Určete obraz bodu A, je-li dána osa afinity o, bod B a jeho obraz B'. (obr. 1.3.4)

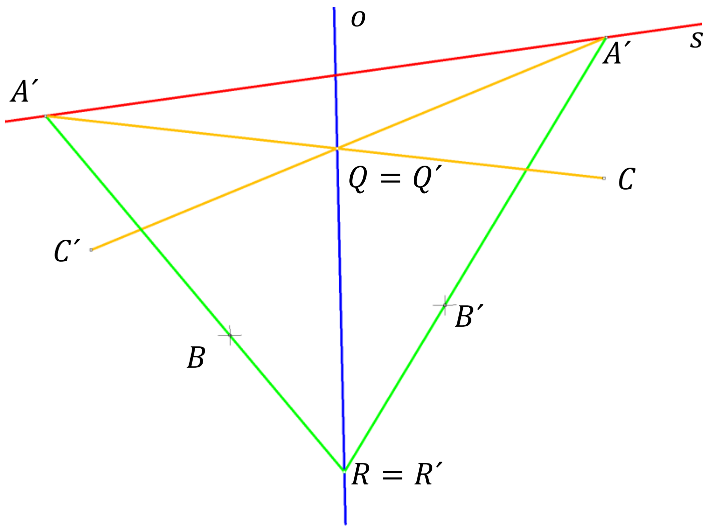
Směr afinity je ten, ve kterém se bod zobrazí na svůj obraz, tedy přímka BB' udává směr afinity. Bod A' sestrojíme stejně, jako v předchozím případě, tedy jen ve zkratce – v bodě A sestrojíme rovnoběžku se směrem s a na ose bod $R = R'$, který spojíme s B' a průsečíkem těchto přímek je bod A'.



Obr. 1.3.4: Určení obrazu bodu v afinitě

3) Určete osu afinity, jsou-li dány body A, B, C a jejich obrazy A', B', C'. (obr. 1.3.5)

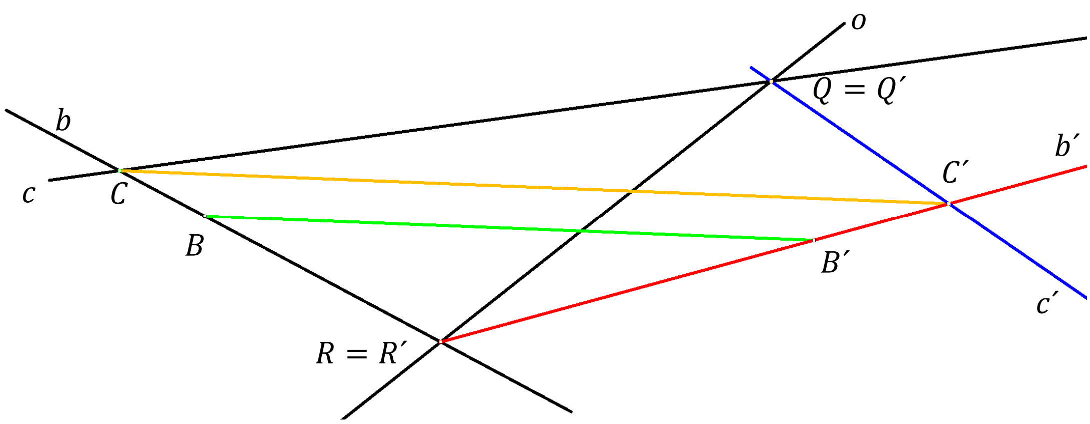
Směr afinity udává například přímka AA'. Spojnice bodů A, B a A', B' se protínají na ose afinity v bodě $R = R'$. Přímky AC a $A'C'$ se protínají na ose afinity v bodě $Q = Q'$. Tedy spojnice bodů R a Q je osa afinity o. (Mohly by se samozřejmě využít i přímky BC a $B'C'$.)



Obr. 1.3.5: Určení osy afinity

4) Určete obrazy přímek b a c, je-li dána osa, bod B a jeho obraz B'. (obr. 1.3.6)

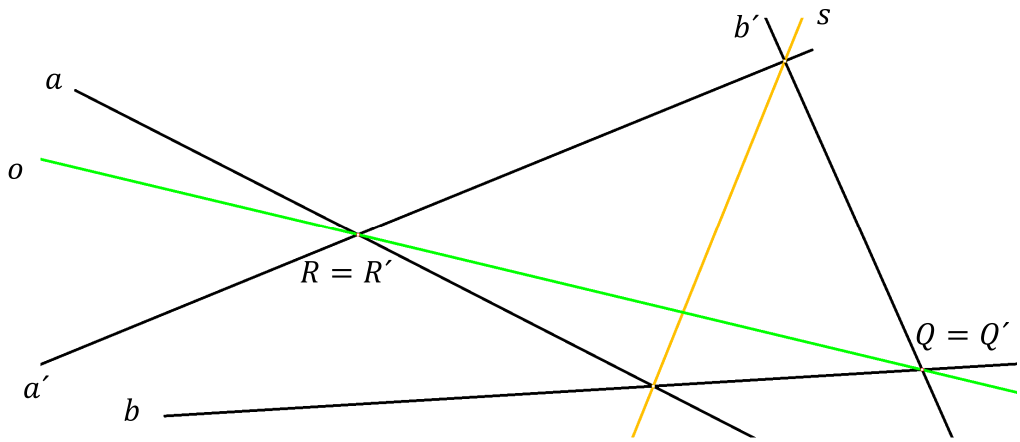
Bod B leží na přímce b, tedy i jeho obraz musí ležet na přímce b'. To znamená, že bodem B' bude procházet přímka b'. Navíc musí platit, že se b a b' protínají na o, tedy spojením $R = R'$ a bodu B' získáme přímku b'. Obraz c lze získat pomocí jejího průsečíku C s přímkou b (musí se opět zachovávat incidence). Na přímce b' tedy najdeme bod C' a jeho spojením se samodružným bodem $Q = Q'$ přímky c získáme přímku c'.



Obr. 1.3.6: Určení obrazů přímek v afinitě

5) Určete osu a směr afinity, jsou-li dány přímky a, b a jejich obrazy a', b'. (obr. 1.3.7)

Průsečík přímky a jejího obrazu musí ležet na ose afinity. Označme průsečík přímky a a $a´$, resp. b a $b´$, jako $R = R´$, resp. $Q = Q´$, což jsou samodružné body. Spojením R a Q získáme osu afinity o. Směr afinity můžeme určit spojením průsečíků $a \cap b$ a $a´ \cap b´$, neboť bod, ležící na obou přímkách (tedy průsečík), se musí zobrazit na bod, který leží opět na obou přímkách – ze zachování incidence v afinitě.

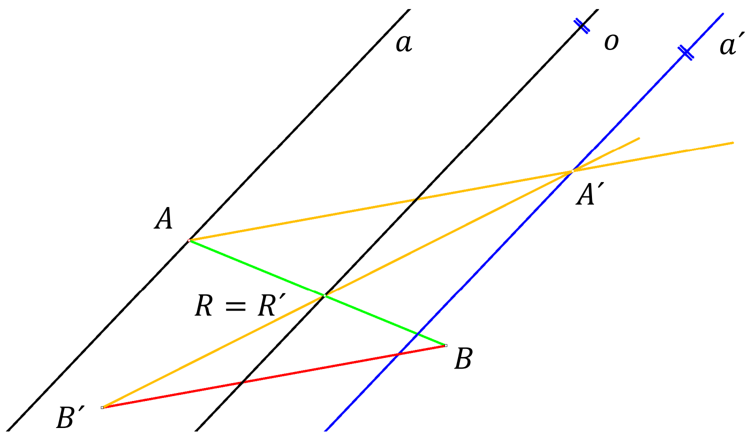


Obr. 1.3.7: Určení osy a směru afinity

6) Určete obraz přímky a, rovnoběžné s osou afinity, je-li dána osa a bod B a jeho obraz $B´$. (obr. 1.3.8)

Směr afinity je $BB´$, tedy pokud na přímce a zvolíme libovolný bod A, můžeme najít jeho obraz $A´$ (podle postupu popsaného výše). Jelikož je přímka rovnoběžná s o, nemá s ní žádný reálný průsečík a podle definice je její obraz také rovnoběžný s osou afinity. Stačí jen bodem $A´$ vést rovnoběžku s o a to je již $a´$.

(*Pozn.:* Průsečík dvou rovnoběžných přímek je nevlastní bod, který je na ose afinity, tedy je to samodružný bod. Pokud ho „spojíme“ s bodem $A´$, znamená to, že uděláme rovnoběžku s osou.)



Obr. 1.3.8: Určení obrazu přímky

1.4 Otočení roviny a sklopení promítací roviny

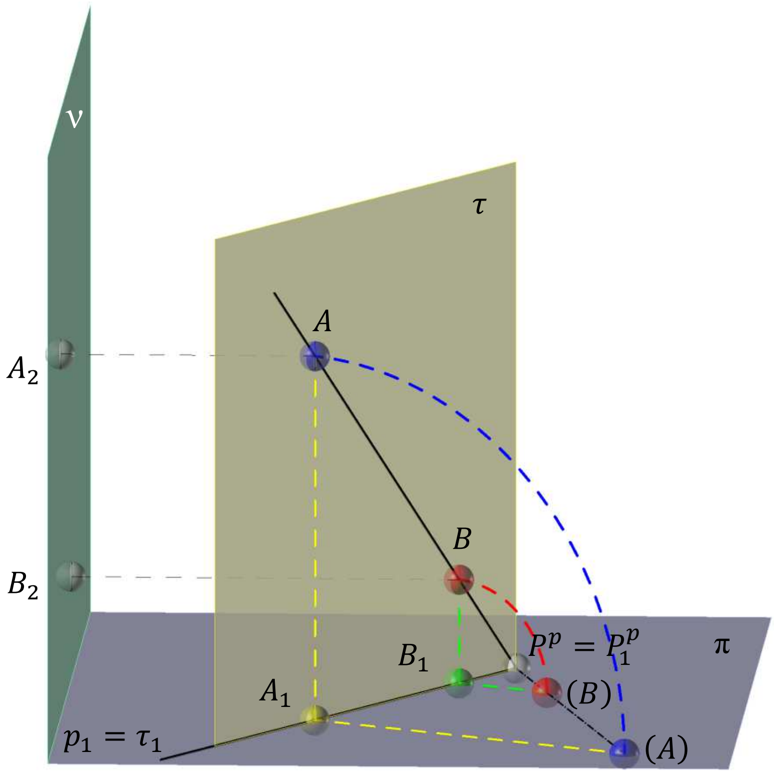
Otočení roviny je důležitý postup v Mongeově promítání, pomocí kterého můžeme sestrojit nebo zjistit skutečnou velikost úsečky nebo skutečný tvar objektu v obecné rovině (neboť objekt ležící v ní se rovnoběžným promítnutím zkreslí). Také pomocí otočení můžeme objekt v prostoru otočit do vhodné polohy například pro určování tečen ke křivce, konstrukci bodů průniku těles a podobně. Rovinu nejčastěji otáčíme do některé z průměten, přičemž není zapotřebí otáčet roviny rovnoběžné s průmětnou (tj. hlavní roviny), neboť se v nich velikosti nezkreslí (případně lze tedy otáčet rovinu i do libovolné hlavní roviny). Objekt otáčíme kolem osy, kterou je průsečnice průmětny nebo hlavní roviny s rovinou, ve které objekt leží. Pro obecnou rovinu budeme otáčení využívat při sestrojování podstav těles a případně sestrojování skutečné velikosti řezů. Ale nejprve se musíme seznámit se speciálním případem otočení, kterým je sklopení.

Sklopení promítací roviny (tj. roviny kolmé k průmětně, viz *Kapitola 1.1 – Zobrazení přímky*) je její otočení kolem průsečnice této roviny s průmětnou o 90° (tj. otočení do průmětny). Podle toho, kterou promítací rovinu bereme, do té průmětny sklápíme. Sklápět můžeme ale také promítací trojúhelník (*viz obrázek 1.4.1* – trojúhelník s vrcholy A, A_1 a P^{p}), či promítací lichoběžník (*viz obrázek 1.4.1* – lichoběžník s vrcholy A, B, A_1 a B_1).

Sklápění promítací roviny lze definovat takto:

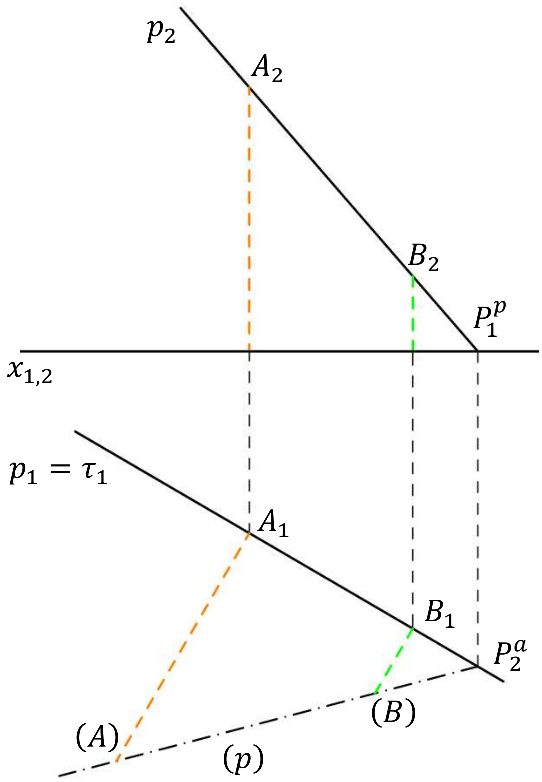
Při sklápění promítací roviny se každý bod této roviny pohybuje po tzv. kružnici otáčení, která leží v rovině kolmé k ose otáčení (tj. průsečnice promítací roviny a průmětny či hlavní roviny) a má střed na této ose (ten se nazývá střed otáčení) a poloměr (nazývaný poloměr otáčení) stejný, jako je absolutní hodnota y-ové či z-ové souřadnice tohoto bodu (opačné, než do které průmětny sklápíme).

Pozn.: Sklopení promítacího trojúhelníku lze využít i ke zjištění souřadnice dalšího bodu v rovině. Sklopení promítacího lichoběžníku je vhodné, pokud potřebujeme například zjistit jen velikost úsečky dané krajními body a známe její půdorys i nárys. V tomto případě lze také využít sklopení do hlavní roviny (to je užitečné, pokud nechceme nebo nemůžeme zjistit stopníky dané přímky, tedy nám stačí pouze průměty úsečky) – takovému postupu se říká sklopení rozdílového trojúhelníku a je znázorněn na *obrázku 1.4.3*. Navíc, pokud při sklápění promítacího lichoběžníku leží krajní body úsečky v opačných polorovinách, pak se lichoběžník rozpadne na dva trojúhelníky – takovému lichoběžníku se říká lichoběžník druhého řádu (někde bývá označován jako promítací zkřížený lichoběžník).



Obr. 1.4.1: Sklopení promítací roviny a promítacího lichoběžníku (a promítacího trojúhelníku A_1AP^p)

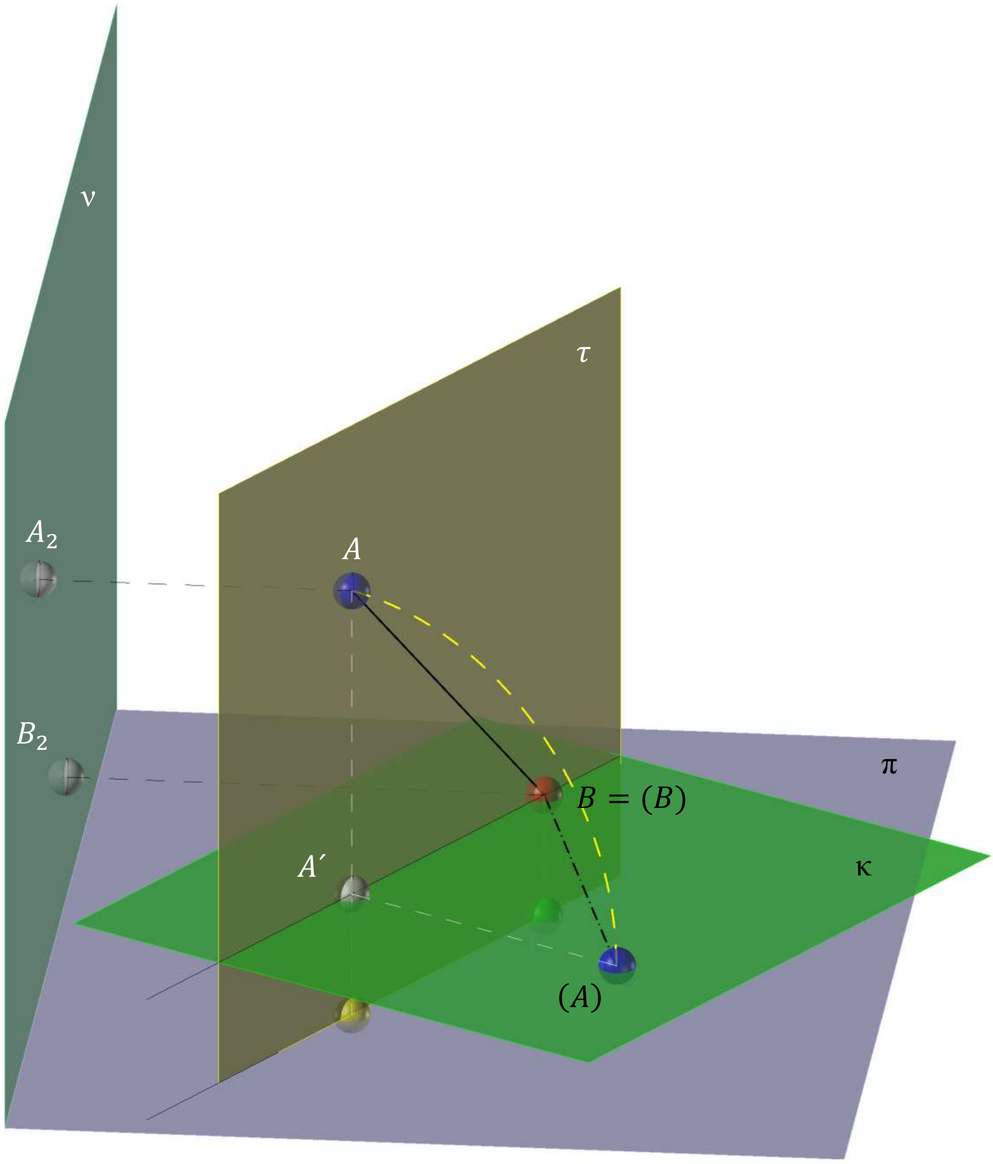
V *obrázku 1.4.1* je znázorněné sklopení půdorysně promítací roviny τ přímky $p = AB$ (tj. rovina kolmá na půdorysnu a obsahující přímku p) a zároveň také půdorysně promítacího lichoběžníku, který má za vrcholy body A, B, A_1 a B_1 a leží v rovině τ. Body A a B se pohybují po kružnicích, které leží v rovinách kolmých na průsečnici rovin π a τ. Části těchto kružnic, čtvrtkružnice, jsou vyznačeny modře a červeně a mají středy v bodech A_1 a B_1. Tento postup je také znázorněn v Mongeově promítání na *obrázku 1.4.2*. Můžeme si také všimnout, že jsme sklopili i promítací trojúhelník A_1AP^p, který leží také v promítací rovině τ. Další možností by bylo sklopení rozdílového trojúhelníku, který též leží v promítací rovině τ (*obrázek 1.4.3*) – postup je podobný, jako sklopení promítacího trojúhelníku A_1AP^p, jen se za stopník bere bod B (tzn. do hlavní roviny, procházející bodem B, se sklápí trojúhelník ABA', kde A' je průmět bodu A do této hlavní roviny), kružnice otáčení bodu A má za střed bod A' a za poloměr se bere absolutní hodnota rozdílu z-ových souřadnic bodů A a B (neboť sklápíme do roviny rovnoběžné s půdorysnou). Jak můžeme tedy vidět, vždy sklápíme promítací rovinu, ale pro usnadnění a pro daný problém bereme příslušný „útvar“.



Obr. 1.4.2: Sklopení promítací roviny a promítacího lichoběžníku v Mongeově promítání

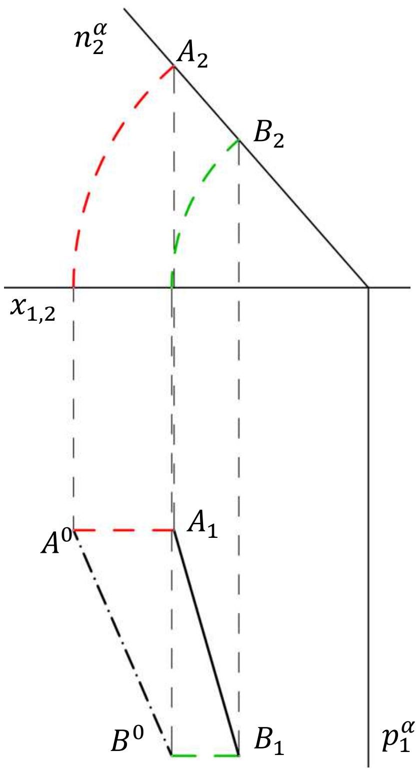
Nyní již přejděme k popisu samotného otáčení roviny, které můžeme definovat následovně:

Při otáčení roviny se každý její bod pohybuje po kružnici, která leží v rovině kolmé k průsečnici otáčené roviny s rovinou, do které otáčíme (to může být průmětna nebo hlavní rovina). Středy těchto kružnic leží na této průsečnici a jejich poloměry jsou rovny vzdálenosti otáčeného bodu od této průsečnice.

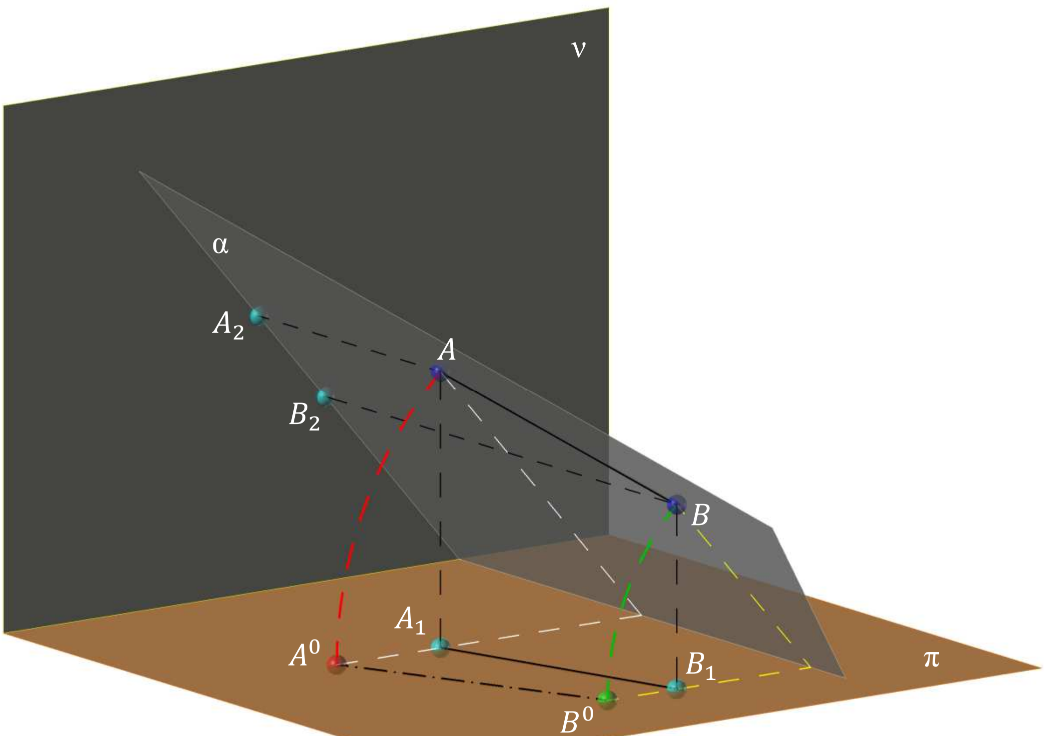


Obr. 1.4.3: Sklopení rozdílového trojúhelníku

Na *obrázku 1.4.4* je v Mongeově promítání sestrojené otočení roviny α (která je kolmá na nárysnu), ve které leží úsečka AB. Body se při otáčení pohybují po částech kružnic, které jsou vyznačeny pro bod B zeleně a pro bod A červeně. V půdorysu se tyto kružnice (díky speciální volbě roviny – α je kolmá na nárysnu, tedy rovina, která bude kolmá k její půdorysné stopě, bude rovnoběžná s nárysnou) zobrazí jako úsečky, které jsou rovnoběžné s osou $x_{1,2}$, a v nárysu jako kružnice ve skutečné velikosti, tj. kružnice se středem v průsečíku n_2^α a $x_{1,2}$ a s poloměrem rovným vzdálenosti tohoto průsečíku od nárysů bodů A a B. Ve skutečnosti mají tyto kružnice otáčení středy na p_1^α a jeden z jejich poloměrů leží na spádové přímce vedené daným bodem (poloměr je tedy roven vzdálenosti bodu od průsečnice roviny a průmětny, jak bylo uvedeno v definici otáčení roviny). Na *obrázku 1.4.5* je tato situace znázorněna prostorově – části kružnic otáčení leží v rovinách kolmých na průsečnici rovin α a π, tedy na p_1^α.

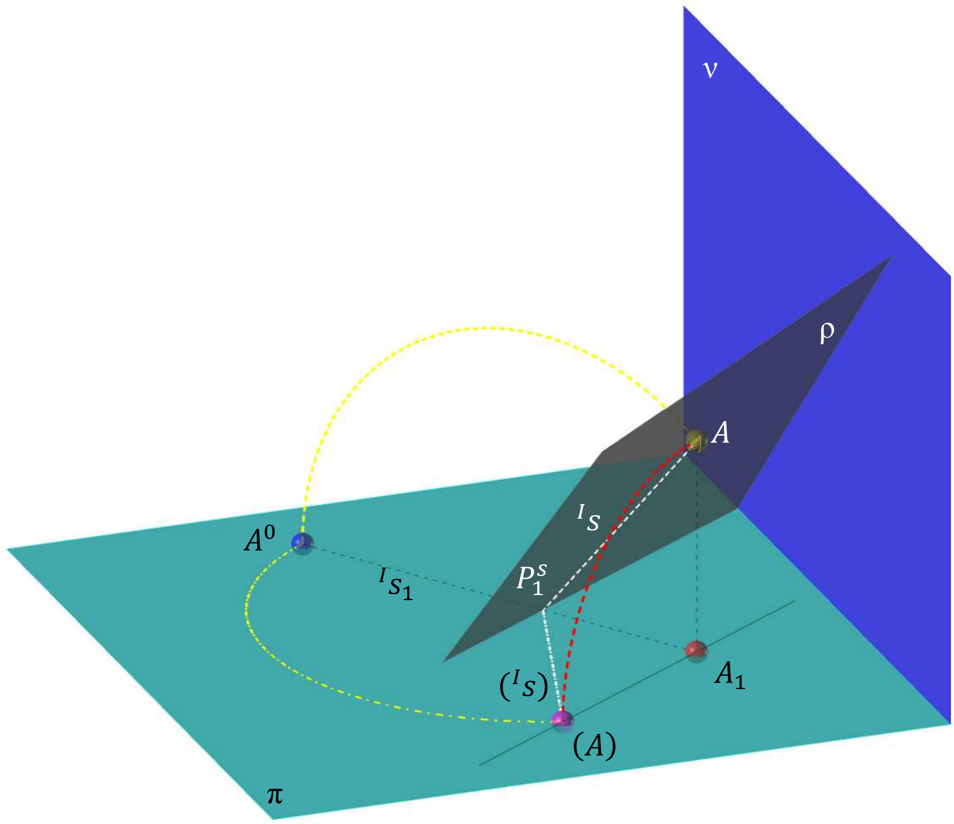


Obr. 1.4.4: Otočení úsečky v Mongeově promítání

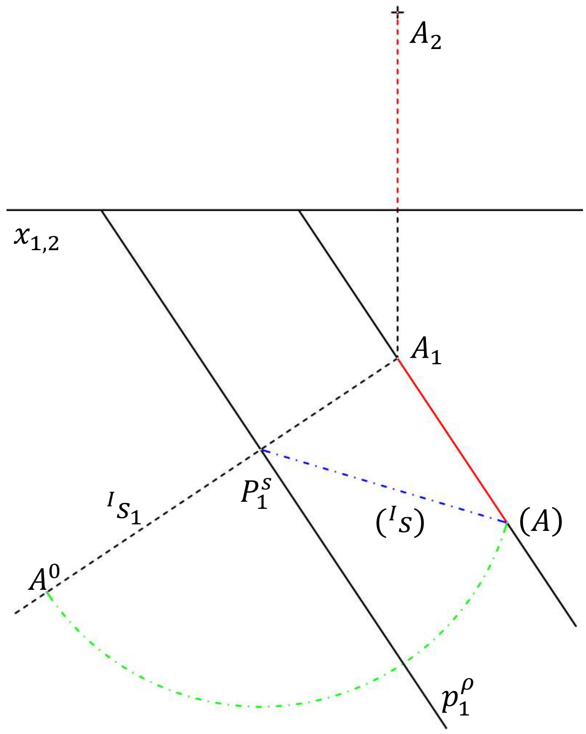


Obr. 1.4.5: Otočení úsečky ležící v rovině kolmé na nárysnu

Pro otočení bodu ležícího v obecné rovině do jedné z průměten bude zapotřebí získat jeho poloměr otáčení, který je možné vidět při sklopení promítací roviny spádové přímky jdoucí tímto bodem, nebo-li sklopením promítacího trojúhelníku, daného tímto bodem, jeho průmětem a stopníkem spádové přímky, která jím prochází. *Obrázek 1.4.6* znázorňuje prostorovou situaci: bod A se otáčí kolem přímky s_1^{I} do půdorysny (kružnice, po které se pohybuje je znázorněna červeně, má střed v bodě A_1 a poloměr rovný vzdálenosti bodu A od půdorysny, tedy rovný z-ové souřadnici bodu A); v půdorysně pak na (s^{I}) vidíme vzdálenost bodu A od stopy roviny (tj. vzdálenost bodů (A) a P_1^s); pokud tedy v půdorysně sestrojíme kružnici o středu P_1^s a poloměru $|P_1^s(A)|$ (je to vlastně sklopená kružnice otáčení bodu A a je znázorněna žlutě), tak její průsečík s přímkou ${}^{I}s_1$ bude bod A^0. Situace je opět znázorněna i v Mongeově promítání na *obrázku 1.4.7*. Při otáčení více bodů se pro rychlejší řešení používá osová afinita (viz *Kapitola 1.3*) – konkrétně afinita mezi průměty bodů a jejich otočenými obrazy (*Pozn.*: toto se využívá v praxi, kde zobrazujeme prostorovou situaci do roviny, ale v prostoru se jedná o afinitu mezi obecnou rovinou a rovinou, do které otáčíme), kde osa je půdorysná stopa roviny a směr se určí pomocí otočení jednoho bodu z této roviny – jelikož se otáčí v rovině kolmé na stopu roviny, bude směr afinity na ni také kolmý). Nejlépe si ale vše ukážeme na konkrétních příkladech.



Obr. 1.4.6: Otočení obecné roviny do průmětny



Obr. 1.4.7: Otočení obecné roviny v Mongeově promítání

Příklad:

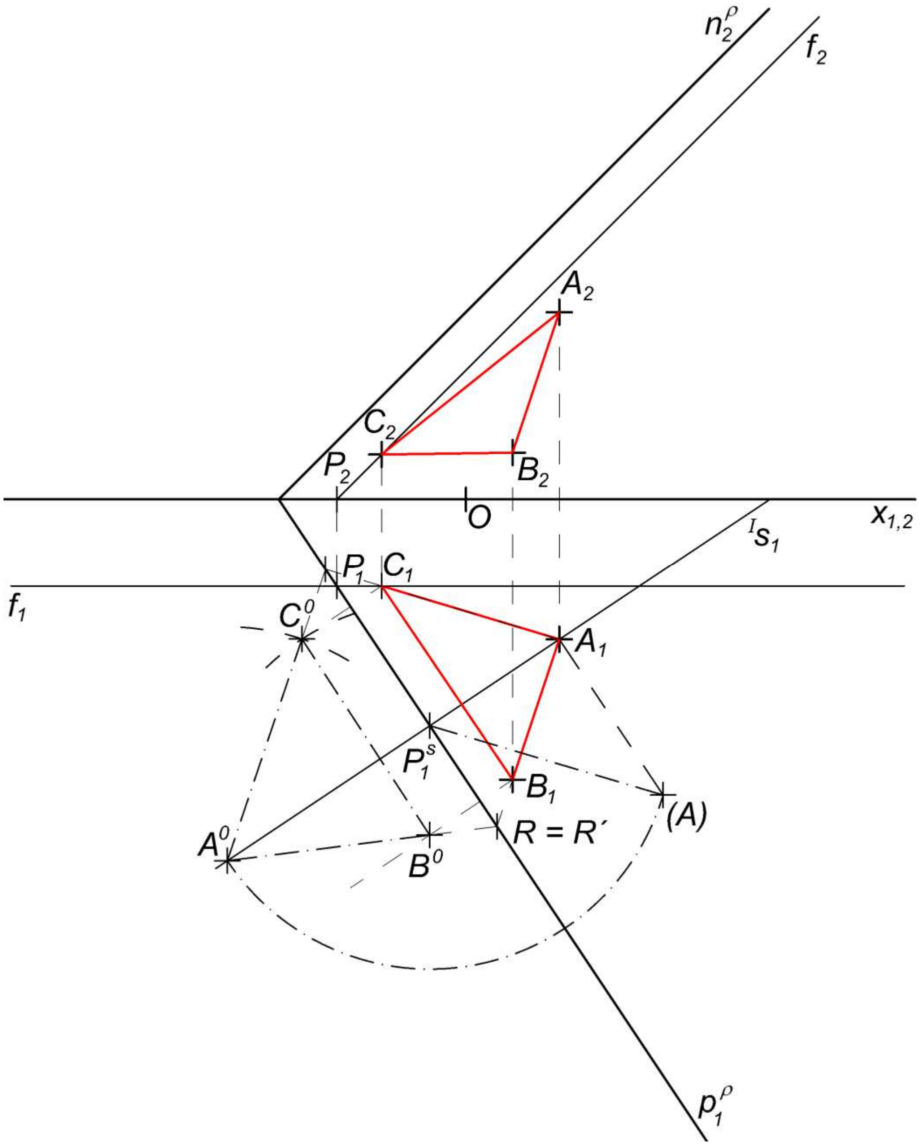
Sestrojte průměty rovnoramenného trojúhelníku ležícího v rovině $\rho = (-4;\ 6;\ 4)$, který je dán body na základně $A = [2;\ 3;\ 4]$, $B = [1;\ 6;\ 1]$. Strany AC a BC jsou ramena trojúhelníku a jejich délka je 5 cm. Bod C volte tak, aby jeho y-ová souřadnice byla menší, než u bodu A. (obr. 1.4.8)

Řešení:

Nejprve si narýsujme zadání. Bude zapotřebí jeden bod nejprve sklopit a poté otočit, využít afinitu a po dorýsování trojúhelníku vše otočit do původní roviny ρ.

1) **Nyní budeme muset sklopit promítací rovinu i se spádovou přímkou** (promítací rovina se bere taková, aby procházela touto spádovou přímkou, tedy její stopa je kolmá na stopu roviny ρ a navíc splývá s průmětem spádové přímky daného bodu) **jednoho z bodů A, či B, abychom nalezli jeho poloměr otáčení a mohli ho otočit třeba do půdorysny. Tedy pro sklopení promítací roviny spádové přímky např. bodu A využijeme promítací trojúhelník, jehož vrcholy jsou A, A_1 a P_1^s.** Bod P_1^s je půdorysný stopník spádové přímky prvního druhu vedené bodem A, nebo-li ${}^I s_1$. Pokud naneseme z-ovou souřadnici bodu A na rovnoběžku s půdorysnou stopou v bodě A_1, získáme sklopený bod A, tedy (A).

Vzdálenost $|(A)P_1^s|$ je poloměr otáčení bodu A, nebo-li je to vzdálenost bodu A od p_1^ρ. Nyní sestrojíme v půdorysu kružnici se středem v bodě P_1^s a tímto poloměrem (což je sklopená kružnice otáčení bod A). Tato kružnice protne přímku ${}^I s_1$ v otočeném bodě A^0. **Nyní pomocí afinity sestrojíme i $\boldsymbol{B^0}$, přičemž osa afinity je $\boldsymbol{p_1^\rho}$ a směr je $\boldsymbol{{}^I s_1}$.** Tedy bodem B_1 vedeme rovnoběžku s ${}^I s_1$, na níž bude ležet B^0. Dále spojíme B_1 a A_1 a kde tato přímka protne p_1^ρ, je samodružný bod $R = R'$. Tento bod spojíme s bodem A^0 a tato přímka protne rovnoběžku s ${}^I s_1$ v bodě B^0.



Obr. 1.4.8: Zobrazení trojúhelníku

2) Nyní sestrojíme vrchol C^0 tak, aby v trojúhelníku platilo $|AC| = |BC| = 5$ cm. Navíc by bod C měl mít menší y-ovou souřadnici než vrchol A

(tj. z variant si vybereme tu, kde je C^0 blíže k ose $x_{1,2}$). Opět užitím afinity sestrojíme bod C_1. Vyznačíme hotový půdorys trojúhelníku.

3) **Pro sestrojení bodu C_2 budeme potřebovat libovolnou přímku roviny**, využijme například frontální**.** Bodem C_1 tedy veďme rovnoběžku s $x_{1,2}$, což je frontální přímka f_1. Ta protne půdorysnou stopu roviny v prvním průmětu půdorysného stopníku P_1. Nárys tohoto stopníku leží na ordinále a na $x_{1,2}$, tedy je to bod P_2. Pokud jím vedeme rovnoběžku s nárysnou stopou roviny, získáme druhý průmět frontální přímky f_2. A na této přímce a též na ordinále musí ležet bod C_2. Nyní už jen vyznačme nárys trojúhelníku ABC.

1.5 Středová kolineace mezi dvěma rovinami a v rovině

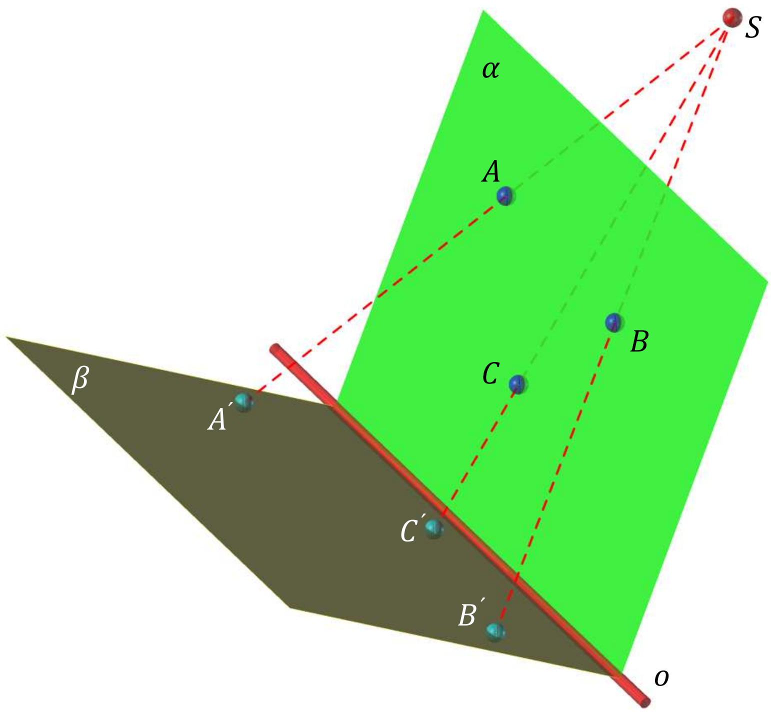
Další užitečné zobrazení vedle afinity je středová kolineace (někde se také můžete setkat s pojmem centrická nebo perspektivní kolineace), zkráceně nazývaná jen kolineace. Kolineaci se využívá například při konstrukcích řezů jehlanů a kuželů, nebo také konstrukcích kuželoseček z kružnice (to souvisí s řezy kuželu). Kolineace a afinita mají mnoho společného a tak budeme o kolineaci hovořit jen krátce (využití kolineace u konstrukcí kuželoseček nebude tématem této práce, neboť se nejedná o středoškolskou látku). S pojmem kolineace také souvisí pojmy úběžník a úběžnice, které se zejména využívají ve středovém promítání či perspektivě (zájemci mohou více o tom nalézt v [2], str. 104).

Mějme opět dány (jako v kapitole 1.3) dvě různoběžné roviny α a β, které se protínají v přímce o, a bod S, který neleží v žádné z rovin (viz *obrázek 1.5.1*). Průsečnici o nazvěme **osa kolineace** a bod S **střed kolineace**. Nyní zvolíme několik bodů v rovině α a z bodu S je promítneme do roviny β. Zvoleným bodům A, B a C z roviny α odpovídají body A', B', a C' v rovině β. Máme tedy opět zobrazení mezi rovinami α a β, které je dáno těmito rovinami a středem S. Může se ale také stát, že některé body roviny α (které leží v rovině rovnoběžné s rovinou β a procházející bodem S) se zobrazí do nevlastních bodů roviny β. Nyní tedy definujme kolineaci mezi dvěma rovinami:

Kolineace mezi dvěma různoběžnými rovinami $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ se středem $\boldsymbol{S}$, který neleží ani v jedné z rovin, je vzájemně jednoznačné zobrazení bodů roviny $\boldsymbol{\alpha}$ na body roviny $\boldsymbol{\beta}$, přičemž platí:

A) **každému bodu $\boldsymbol{A \in \alpha}$ je přiřazen bod $\boldsymbol{A' \in \beta}$ tak, že spojnice $\boldsymbol{AA'}$ prochází bodem $\boldsymbol{S}$, přičemž každý bod na ose $\boldsymbol{o}$ se zobrazí na sebe,**
B) **každé přímce $\boldsymbol{a \in \alpha}$ různoběžné s osou $\boldsymbol{o}$ odpovídá přímka $\boldsymbol{a' \in \beta}$, která je různoběžná s osou $\boldsymbol{o}$, a platí, že přímky $\boldsymbol{a, a'}$ se protínají na této ose,**
C) **každé přímce $\boldsymbol{b \in \alpha}$ rovnoběžné s osou $\boldsymbol{o}$ odpovídá přímka $\boldsymbol{b' \in \beta}$ rovnoběžná s osou $\boldsymbol{o}$.**

Pozn.: Opět platí, že definice je platná i pro rovnoběžné roviny (osa kolineace je tedy v tomto případě nevlastní přímka), kdy se jedná o stejnolehlost. Pokud by byly tyto roviny různoběžné, ale bod S by ležel v rovině β, všechny body roviny α by se zobrazily do bodu S, ležel-li by bod S v rovině α, všechny body této roviny by se zobrazily na přímku o. V těchto dvou případech se tedy nejedná o vzájemně jednoznačné zobrazení.



Obr. 1.5.1: Kolineace mezi dvěma rovinami

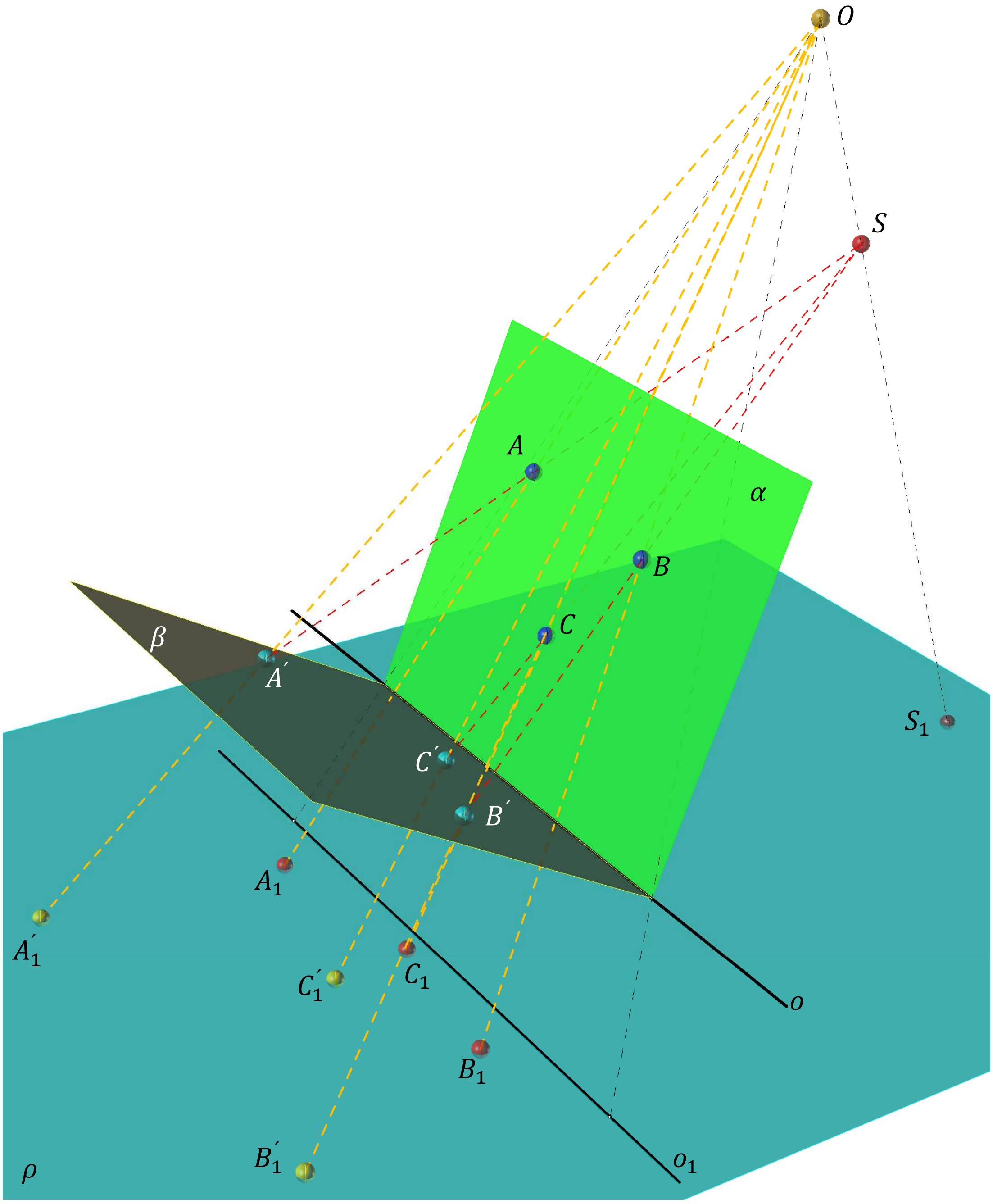
Pokud kolineaci mezi dvěma rovinami středově či rovnoběžně promítneme do roviny ρ (která však neprochází středem promítání nebo není rovnoběžná se směrem promítání), získáme kolineaci v rovině – *obrázek 1.5.2*. Nyní si definujme kolineaci v rovině:

Kolineace v rovině ρ se středem S a osou o, která neprochází středem kolineace, je vzájemně jednoznačné zobrazení bodů roviny ρ, přičemž platí:

A) každému bodu $A \in \rho$ je přiřazen bod $A´ \in \rho$ tak, že spojnice $AA´$ prochází bodem S, přičemž každý bod na ose o se zobrazí na sebe,

B) každé přímce $a \in \rho$ různoběžné s osou o odpovídá přímka $a´ \in \rho$, která je různoběžná s osou o, a platí, že se přímky a, $a´$ protínají na této ose, přičemž přímky procházející bodem S se zobrazí na sebe,

C) každé přímce $b \in \rho$ rovnoběžné s osou o odpovídá přímka $b´ \in \rho$ rovnoběžná s osou o.



Obr. 1.5.2: Kolineace v rovině, vzniklá středovým promítnutím (z bodu O) kolineace mezi dvěma rovinami (průměty do roviny ρ jsou označeny indexem)

Opět se zde hovoří o samodružných bodech a přímkách, vzorech a obrazech bodů a afinně sdružených objektech, které jsou definovány obdobně jako v *Kapitole 1.3*.

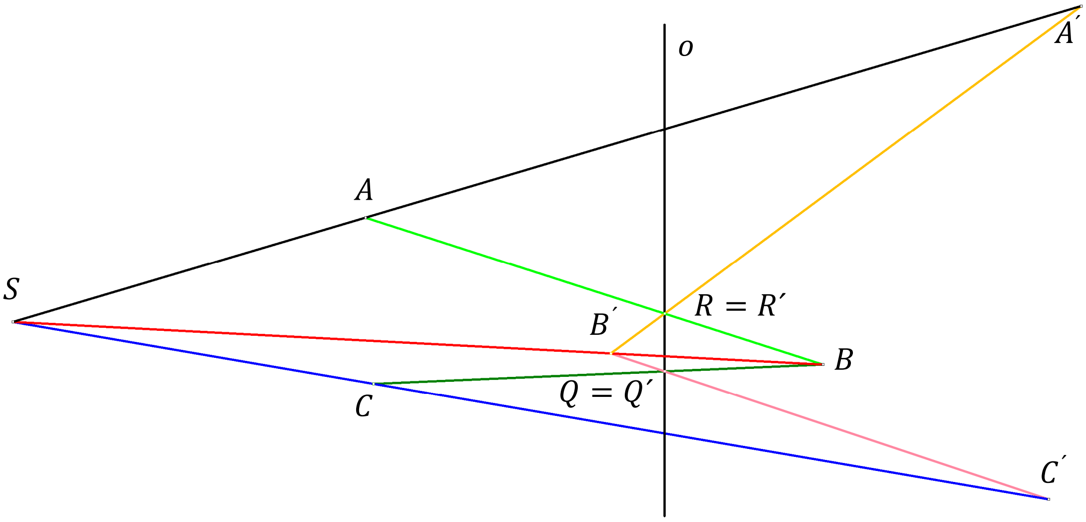
Spojitost mezi afinitou a kolineací je následující: pokud si vzpomeneme na nevlastní body a přímky, tak zjistíme, že afinita, je vlastně kolineace, ale s nevlastním středem (*Pozn.:* zde také platí, že pokud dosadíme do charakteristiky kolineace za bod S nevlastní bod, bude rovnost stále platná a navíc z ní vznikne charakteristika afinity), tzn. nevlastní střed je určen směrem a to je přesně směr afinity.

Definici kolineace v rovině (která se v praxi používá, ačkoliv v prostoru se vlastně jedná o kolineaci mezi dvěma rovinami) si názorně ukážeme na několika příkladech.

Příklady:

Pozn.: V řešení těchto příkladů je využito následující barevné rozlišení kroků: 1. krok = červená, 2. krok = zelená, 3. krok = oranžová, 4. krok = modrá, 5. krok = růžová, 6. krok = tmavě zelená. Předkreslená zadání příkladů je možné najít na přiloženém CD.

1) Určete obraz bodu B a vzor bodu C', je-li dána osa kolineace o a střed kolineace S, bod A a jeho obraz A'. (obr. 1.5.3)

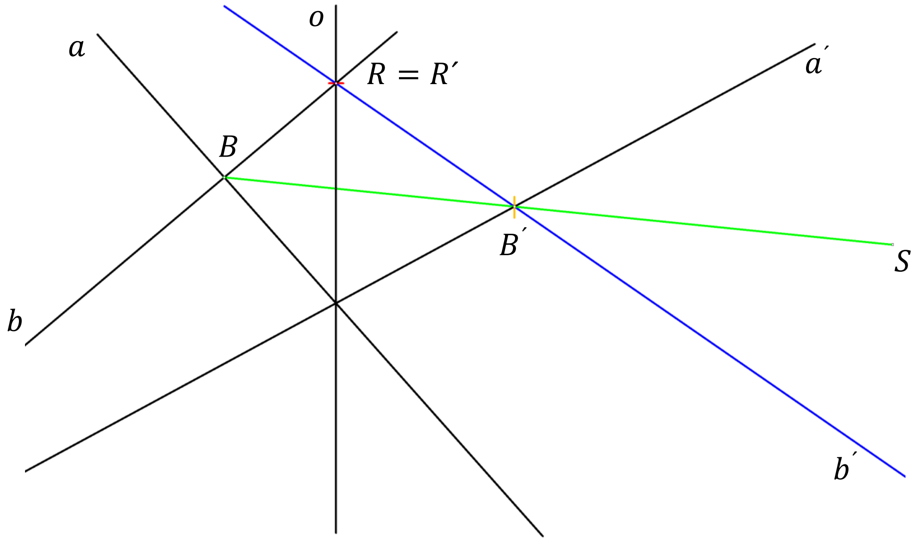


Obr. 1.5.3: Obraz a vzor bodu v kolineaci

Z definice víme, že spojnice odpovídajících si bodů prochází středem kolineace - $S \in \overleftrightarrow{AA'}$, $S \in \overleftrightarrow{BB'}$ a $S \in \overleftrightarrow{CC'}$. Dále musí dle definice platit, že odpovídající si přímky se protínají na ose kolineace - $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} \in o$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} \in o$, průsečíky jsou samodružné body $R = R'$ a $Q = Q'$. Takto snadno určíme obraz bodu B i vzor bodu C'.

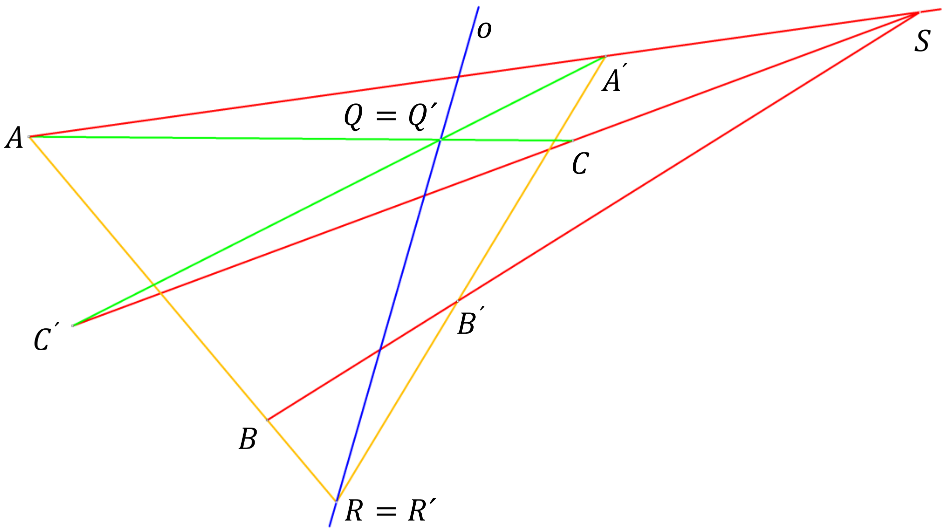
2) Určete obraz přímky b, je-li dána osa kolineace o, střed kolineace S a pár odpovídajících si přímek a, a'. (obr. 1.5.4)

Opět z definice víme, že odpovídající si přímky se protínají na ose, $a \cap a' \in o$, také $b \cap b' = \{R = R'\} \in o$. Máme tedy jeden bod, který leží na přímce b' a dalším bodem ji již dourčíme. Jelikož máme vzor i obraz přímky a, využijeme její průsečík s přímkou b, $a \cap b = \{B\}$. Najdeme obraz bodu B a jím bude procházet i obraz přímky b - $B' \in a'$ a navíc $\overleftrightarrow{BB'} \ni S$.



Obr. 1.5.4: Obraz přímky v kolineaci

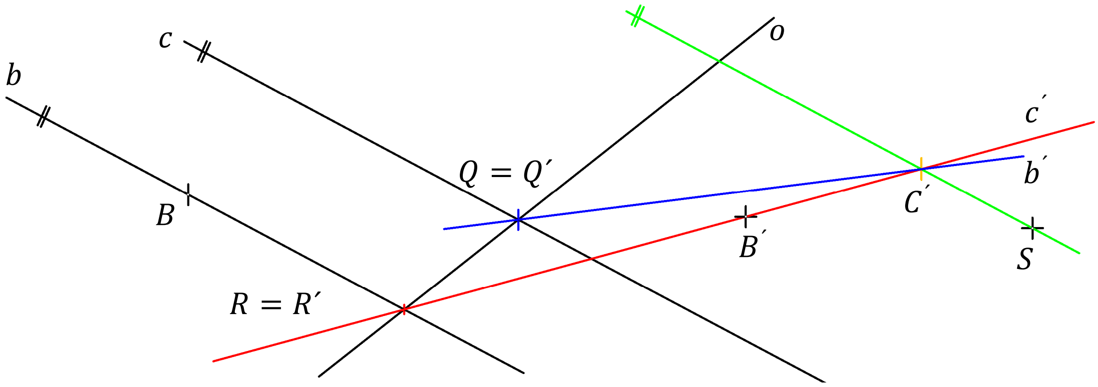
3) Určete osu a střed kolineace, jsou-li dány body A, B, C a jejich obrazy A', B', C'. (obr. 1.5.5)



Obr. 1.5.5: Určení osy a středu kolineace

Postup opět vychází z definice kolineace: spojnice odpovídajících si bodů prochází středem kolineace (*Pozn.*: je zapotřebí si ověřit, že tyto spojnice prochází jedním bodem, jinak by se totiž nejednalo o kolineaci!) a odpovídající si přímky se protínají na ose kolineace. Tedy $\overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{BB'} = \{S\}$, navíc $\overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{CC'} = \{S\}$, $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = \{Q = Q'\} \in o$ a $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = \{R = R'\} \in o$.

4) Určete obrazy přímek $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$, je-li dána osa a střed kolineace, bod $\boldsymbol{B}$ a jeho obraz $\boldsymbol{B'}$. (obr. 1.5.6)

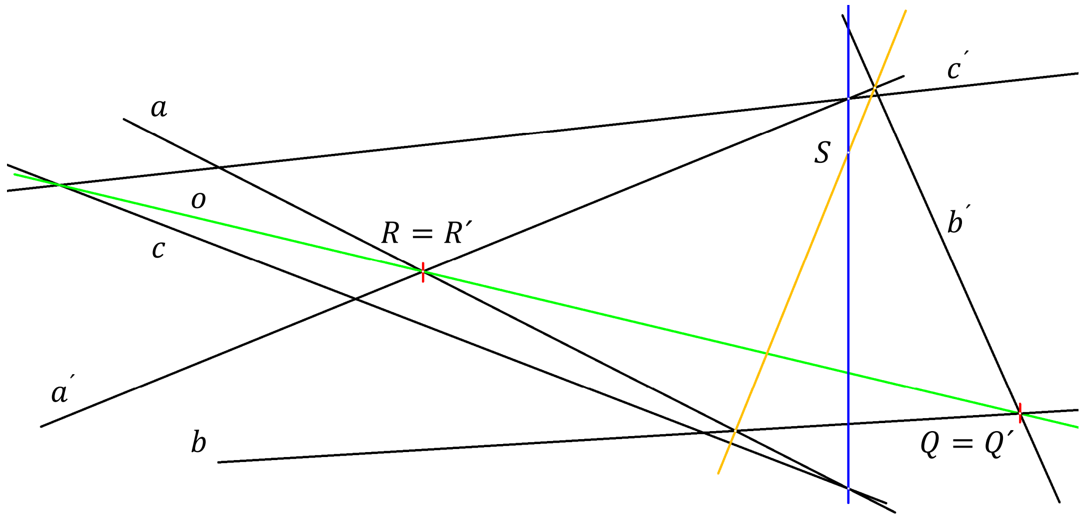


Obr. 1.5.6: Obraz přímek v kolineaci

Opět musí platit, že $b \cap b' = \{R = R'\} \in o$ a $c \cap c' = \{Q = Q'\} \in o$. Obraz přímky b určíme jednoduše, neboť na ní leží bod B, tedy obraz této přímky musí procházet obrazem bodu (neboť kolineace zachovává incidenci). Nyní pro určení c' můžeme buď využít libovolný bod, který leží na přímce c a najít jeho obraz, který musí ležet na obrazu přímky. Nebo (a tak je to uděláno v tomto případě) využijeme znalost nevlastního bodu. Rovnoběžné přímky b a c se protínají v nevlastním bodě, který můžeme označit C^∞. Obraz tohoto bodu musí ležet na obrazech obou přímek, přičemž obraz přímky b již máme - $C' \in b'$ a $\overleftrightarrow{CC'} \ni S$. Stačí tedy určit spojnici bodů C^∞ a S a její průsečík s přímkou b' bude bod C'. Spojnici získáme jednoduše: leží na ní body S, C' a C^∞, kde C^∞ a S můžeme spojit, tedy vedeme bodem S rovnoběžku s přímkami b a c.

5) Určete osu a střed kolineace, jsou-li dány přímky $\boldsymbol{a, b, c}$ a jejich obrazy $\boldsymbol{a', b', c'}$. (obr. 1.5.7)

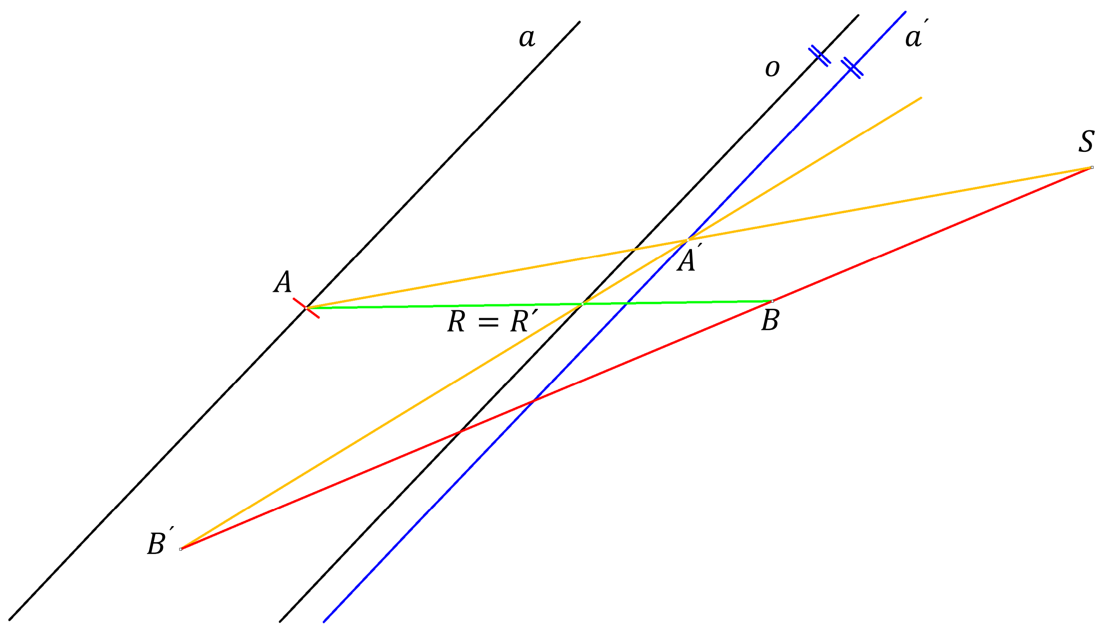
Pro určení osy využijeme definici (neboť můžeme ověřit, že průsečíky odpovídajících si přímek a jejich obrazů leží na jedné přímce; *pozn.*: jinak by to opět nebyla kolineace!) - $a \cap a' = \{R = R'\} \in o$, $b \cap b' = \{Q = Q'\} \in o$. Pro určení středu kolineace využijeme průsečíky $a \cap b$ a $a' \cap b'$, resp. $a \cap c$ a $a' \cap c'$ (tj. pár odpovídajících si bodů), jejichž spojnice musí procházet bodem S.



Obr. 1.5.7: Určení osy a středu kolineace

6) Určete obraz přímky a, rovnoběžné s osou kolineace, je-li dána osa, střed kolineace, bod B a jeho obraz B'. (obr. 1.5.8)

Z definice opět víme, že obraz přímky a bude rovnoběžný s osou o. Stačí tedy najít jen obraz jednoho bodu, který na této přímce leží - $A \in a$, pak i $A' \in a'$. Bod A' najdeme pomocí bodů B, B' s využitím definice. Potom jen bodem A' vedeme rovnoběžnou přímku s osou, tj. přímka a'.



Obr. 1.5.8: Určení obrazu přímky

2. Zobrazení těles

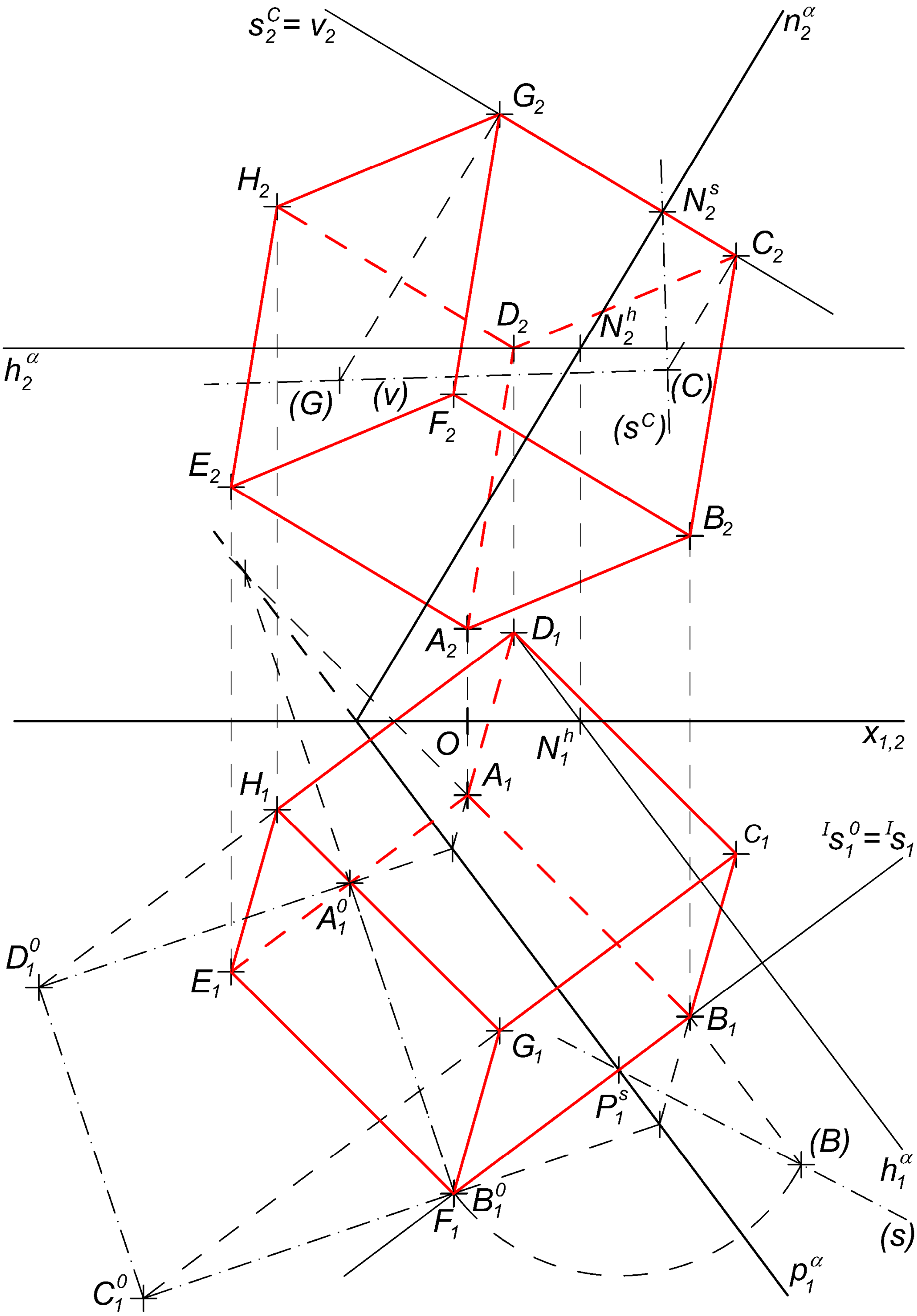
V této kapitole se budeme zabývat příklady na zobrazení těles, kde v první části budeme zobrazovat hranatá tělesa (krychle, kvádr, hranol, jehlan) a v druhé čísti se zaměříme na rotační tělesa (válec, kužel, koule).

Úvodem by bylo také dobré zavést pojem **zdánlivý a skutečný obrys tělesa**. Skutečný obrys tělesa je uzavřená prostorová křivka (případně i více křivek), jejíž body jsou body dotyku promítacích paprsků a tělesa. Zdánlivý obrys je průmětem skutečného obrysu, tj. jedná se o hranici průmětu tělesa. Jiné vysvětlení těchto pojmů můžete nalézt v [4], str. 195.

Příklady jsou seřazeny tak, že část *2.1* tvoří hranatá tělesa a část *2.2* rotační tělesa, přičemž jsou uspořádány podle náročnosti. Dále je ke každému příkladu připojen rys (není ve skutečné velikosti) a prostorový obrázek. Krokovaná zadání i prostorové situace (jak ve formátu PNG, tak jako manipulovatelný soubor v Rhinoceru) najdete na přiloženém CD.

Příklad 2.1.1:

Narýsujte obraz krychle $ABCDEFGH$, která má podstavu $ABCD$ v rovině $\alpha = (-3; 4; 5)$ zadanou vrcholy $A = [0; 1{,}6; 2]$, $B = [4{,}8; 6{,}4; 4]$. Z-ové souřadnice vrcholů C a E uvažujte větší, než vrcholu A. (obr. 2.1.1)



Obr. 2.1.1 a)

Řešení:

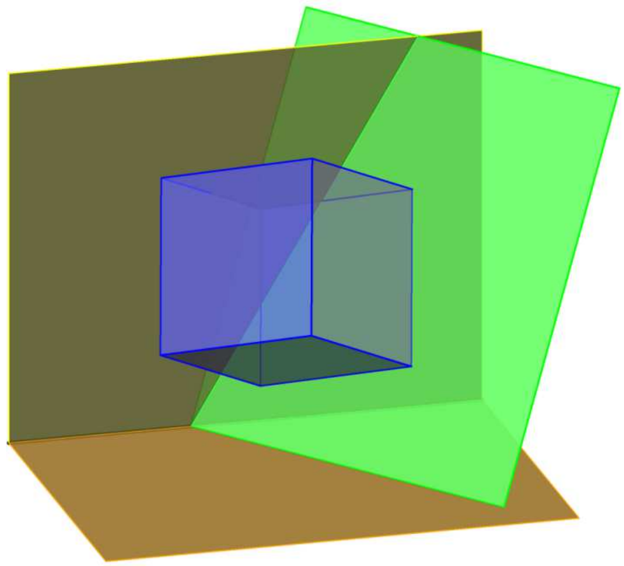
Nejprve si narýsujeme zadání: p_1^α, n_2^α, A_1, A_2, B_1 a B_2. Poté postupujeme takto:

1) ***K sestrojení celé podstavy $ABCD$ budeme muset otočit rovinu α např. do půdorysny.*** To znamená, že potřebujeme sestrojit body A_1^0 a B_1^0. Abychom rovinu α mohli otočit, musíme zjistit poloměr otáčení např. pro bod B – to je vzdálenost bodu od osy otáčení, tedy vzdálenost bodu od průsečíku spádové přímky jdoucí tímto bodem a stopy roviny (resp. půdorysny). Půdorys s_1 spádové přímky s bodu B (nebo-li kolmice k půdorysné stopě vedená bodem B) je totožný s jejím otočeným průmětem, nebo-li s_1^0, a protne p_1^α v bodě P_1^s. Na kolmici k s_1, resp. na rovnoběžce s p_1^α, která prochází bodem B_1, sestrojíme ve vzdálenosti rovné z_B bod (B). Pokud spojíme P_1^s a (B), dostaneme sklopenou spádovou přímku (s), velikost poloměru otáčení bodu B je pak rovna vzdálenosti těchto bodů. Narýsujeme tedy kružnici o tomto poloměru se středem v bodě P_1^s. Tato kružnice protne přímku $P_1^s B_1$ v otočeném bodě B, nebo-li B_1^0 (podle potřeby a přehlednosti obrázku si můžeme vybrat jeden ze dvou průsečíků kružnice a přímky). ***Pomocí afinity mezi půdorysnou a rovinou α získáme bod A_1^0.*** Nyní dorýsujeme zbylé vrcholy C_1^0 a D_1^0 otočeného čtverce podstavy, přičemž podle podmínek v zadání budeme uvažovat pouze variantu, kdy bod C_1^0 leží ve stejné polorovině určené p_1^α jako A_1^0. ***Pomocí afinity otočíme body D_1^0 a C_1^0 zpět do roviny α a tak získáme C_1 a D_1. Pomocí hlavní přímky (například horizontální) sestrojíme druhý průmět bodu D.*** (Bodem D_1 vedeme rovnoběžku s p_1^α, tedy přímku h_1. Ta protne osu $x_{1,2}$ ve stopníku N_1^h. Na ordinále a na nárysné stopě roviny leží stopník N_2^h. Tím vedeme rovnoběžku s osou $x_{1,2}$, tedy přímku h_2. Nárys horizontální přímky h_2 protne ordinálu vedenou bodem D_1 v bodě D_2.) Bod C_2 sestrojíme obdobně jako bod D_2, nebo můžeme využít toho, že v Mongeově promítání se čtverec zobrazí jako rovnoběžník a tedy platí, že $A_2B_2 \parallel C_2D_2$ a $A_2D_2 \parallel B_2C_2$.

2) ***Nyní potřebujeme narýsovat jeden z vrcholů stěny $EFGH$ (zbylé vrcholy se dourčí snadno). Tedy například pro sestrojení vrcholu G potřebujeme znát zkreslenou velikost hrany CG. Víme, že její skutečná velikost bude $|A_1^0 B_1^0|$, neboť krychle má všechny hrany stejně dlouhé. Dále víme, že průmět přímky kolmé k dané rovině je v půdoryse i v náryse kolmý na půdorysnou***

resp. nárysnou stopu roviny. Tedy například v C_2 vedeme kolmici na n_2^α, což je s_2^C nebo též v_2 (přímka kolmá k rovině α). ***Nyní potřebujeme na tuto kolmici nanést zkreslenou velikost hrany krychle, což provedeme pomocí sklopení nárysně promítací roviny této hrany.*** V bodě C_2 vedeme rovnoběžku s n_2^α a na ní naneseme y-ovou souřadnici bodu C, což je vzdálenost C_1 od $x_{1,2}$, resp. vzdálenost bodu C od nárysny. Opět si zobrazíme sklopenou spádovou přímku jdoucí bodem C, tedy (s^C), která prochází bodem (C) a průsečíkem s_2 s n_2^α, nebo-li N_2^s. Sklopená kolmice k rovině vedená bodem C tedy (v), bude na (s^C) kolmá (neboť kolmá přímka k rovině je kolmá ke všem přímkám dané roviny). Na tuto přímku (v) naneseme od (C) velikost strany čtverce $|A_1^0 B_1^0|$ a získáme tak (G). Rovnoběžně se stopou n_2^α vedeme z bodu (G) přímku, která protne druhý v_2 v bodě G_2. Vrcholy E_2, F_2 a H_2 získáme tak, že na nárysy přímek kolmých na n_2^α v bodech A_2, B_2 a D_2 naneseme vzdálenost $|C_2 G_2|$. ***Víme totiž, že rovnoběžné, stejně dlouhé úsečky se v Mongeově promítání zobrazí jako navzájem rovnoběžné a stejně dlouhé úsečky.*** Vrcholy E_1, F_1, G_1 a H_1 získáme tak, že z druhých průmětů těchto bodů vedeme ordinály, které protnou odpovídající kolmé přímky na p_1^α vedené body A_1, B_1, C_1 a D_1 v těchto vrcholech (též je možné najít jen jeden z vrcholů stěny $EFGH$ a zbylé najít pomocí rovnoběžnosti nebo nanesením právě zjištěného zkreslení kolmé hrany k rovině α.

3) ***Zbývá již jen určit viditelnost hran krychle.*** Zde je pravidlo, že všechny okrajové hrany v prvním i druhém průmětu jsou vidět (nemusí si odpovídat, tedy například hrana GH je v nárysu okrajová, ale v půdorysu nikoliv). Viditelnost vnitřních hran zjistíme pomocí porovnání vzdáleností vrcholů od nárysny či půdorysny – bod, který má větší y-ovou resp. z-ovou souřadnici (tedy je nejdále od ní v kladném smyslu) bude v náryse resp. v půdoryse vidět. Tedy například bod F_2 bude vidět (i s hranami z něj vycházejícími), neboť má z bodů F a D větší y-ovou souřadnici.



Obr. 2.1.1 b)

Příklad 2.1.2:

Zobrazte kvádr $ABCDEFGH$ s podstavou v rovině $\rho = (13; 9; 9)$, jehož podstava $ABCD$ je dána bodem $A = [5; y; 2]$ a středem podstavy $S = [1; y; 4{,}5]$. Přičemž hrana AB má délku 4 cm a hrana AE má délku 10 cm. Výšku volte opět tak, aby byl kvádr nad rovinou ρ a bod B s menší y-ovou souřadnicí, než má bod A. (obr. 2.1.2)

Řešení:

Nejprve si narýsujeme zadání, tj. S_2, A_2, n_2^{ρ} a p_1^{ρ}. Dále budeme postupovat podobně jako v *Příkladu 2.1.1*.

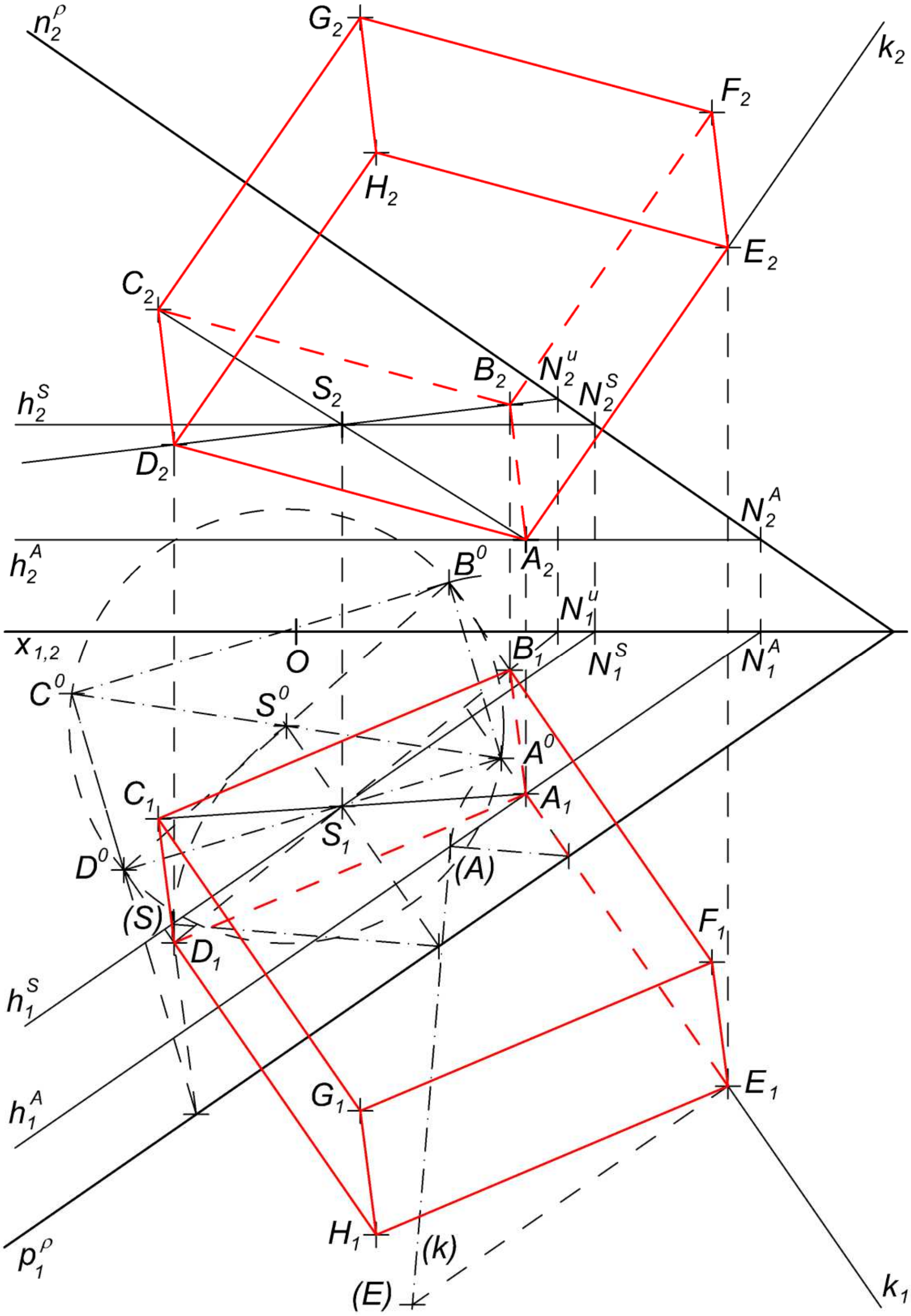
1) ***Pomocí hlavních*** (např. horizontálních) ***přímek*** roviny ρ ***najdeme půdorysy bodů A a*** $\boldsymbol{S}$. Snadno také ***sestrojíme průměty bodu*** $\boldsymbol{C}$, neboť v rovnoběžném promítání se musí střed úsečky zobrazit jako střed jejího obrazu. Takže C_1 musí ležet na přímce $\overleftrightarrow{S_1A_1}$ a navíc $|C_1S_1| = |S_1A_1|$. Stejné pravidlo platí i v nárysu. Nyní ***sklopíme*** (např. půdorysně) ***promítací rovinu spádové přímky jdoucí bodem*** $\boldsymbol{S}$ (*pozn.*: pro přehlednost není označena), tedy získáme bod (S) – na h_1^S naneseme výšku bodu S, tj. z_S. ***Pomocí sklopené kružnice otáčení sestrojíme bod*** $\boldsymbol{S^0}$. Stejný postup aplikujeme na bod A_1 (mohli bychom tento bod samozřejmě sestrojit i s využitím afinity mezi rovinou podstavy a půdorysnou). ***Bod*** $\boldsymbol{C^0}$ ***musí být opět středově souměrný s bodem*** $\boldsymbol{A^0}$ ***podle středu*** $\boldsymbol{S^0}$. Snadno ***sestrojíme i bod*** $\boldsymbol{B^0}$, neboť musí platit: $|A^0B^0| = 4$ cm. ***Dorýsujeme*** tedy ***obdélník***

$\boldsymbol{A^0B^0C^0D^0}$. Nyní ***využijeme afinitu mezi půdorysnou a rovinou $\boldsymbol{\rho}$ (přesněji mezi půdorysy bodů a otočenými body roviny $\boldsymbol{\rho}$)***: přímky $\overleftrightarrow{C^0D^0}$ a $\overleftrightarrow{C_1D_1}$ se musí protínat na p_1^{ρ}; průsečík této přímky (afinně sdružené s $\overleftrightarrow{C^0D^0}$) s přímkou jdoucí bodem D^0 kolmo k p_1^{ρ} je bod D_1; bod B_1 sestrojíme pomocí úhlopříčky a kolmice z bodu B^0 na p_1^{ρ}. Nyní sestrojme celý půdorys podstavy kvádru. ***Pomocí úhlopříčky $\boldsymbol{BD}$***, která i v nárysu musí procházet bodem S_2 a leží v rovině ρ, ***sestrojme body $\boldsymbol{B_2}$ a $\boldsymbol{D_2}$***. Máme tedy nárys podstavy kvádru.

2) ***Hrany $\boldsymbol{AE}$, $\boldsymbol{BF}$, $\boldsymbol{CG}$ a $\boldsymbol{DH}$ kvádru musí být kolmé k rovině podstavy, tj. k rovině $\boldsymbol{\rho}$, a jsou navzájem rovnoběžné***. Sestrojíme kolmici například v bodě A k rovině ρ a s ní budou hrany AE, BF a další rovnoběžné. Ještě se však jejich velikost zkreslí, takže ***musíme nalézt například půdorys bodu E*** a to pomocí ***sklopení promítací roviny přímky $\boldsymbol{k}$*** a na ní od bodu A^0 naneseme požadovanou vzdálenost 10 cm, tj. ***sestrojíme bod $(\boldsymbol{E})$***. ***Sestrojili jsme tak bod $\boldsymbol{E_1}$***. Najděme jeho nárys a sestrojme zbylé vrcholy. ***V půdorysu jsme nyní získali zkreslení hrany*** AE, tj. velikost $|A_1E_1|$, kterou naneseme na zbylé, s ní rovnoběžné hrany, a sestrojíme tak půdorys kvádru.

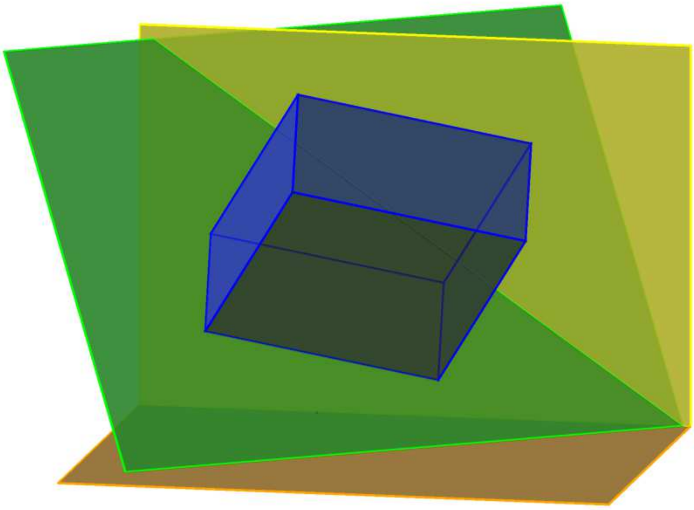
3) ***Viditelnost hran*** je jednoduchá: ***obvodové hrany budou v průmětu viditelné***; dále stačí ***určit viditelnost vrcholů, které leží uvnitř obrysu*** (resp. jednoho, neboť viditelnost druhého bude opačná). V nárysu bude bod H a hrany z něj vycházející vidět, protože jeho půdorys je nejdál od osy x v kladném směru. To znamená, že bod B a hrany z něj vycházející, nebudou v nárysu vidět. Bod G je v nárysu nejvýše, takže v půdorysu bude se svými hranami vidět a bod D s hranami nebude v půdorysu vidět.

Pozn.: Viditelnost bychom mohli řešit také pomocí tzv. **krycích bodů**, tj. bodů, které jsou v jednom průmětu např. průsečíky průmětů hran – např. v půdorysu by byl průnik přímek $\overleftrightarrow{C_1G_1}$ a $\overleftrightarrow{D_1A_1}$ bod $U_1 = V_1$, kde bod $U \in \overleftrightarrow{CG}$ a $V \in \overleftrightarrow{DA}$, pomocí polohy jejich nárysů by se určila též viditelnost průmětů hran.



n_2^ρ
G_2
k_2
F_2
H_2
E_2
C_2
B_2
N_2^u
N_2^S
h_2^S
S_2
D_2
N_2^A
h_2^A
A_2
B^0
N_1^u
$x_{1,2}$
O
B_1
N_1^S
N_1^A
C^0
S^0
A^0
C_1
A_1
S_1
D^0
(A)
(S)
D_1
F_1
h_1^S
h_1^A
G_1
E_1
H_1
(k)
p_1^ρ
(E)
k_1

Obr. 2.1.2 a)



Obr. 2.1.2 b)

Příklad 2.1.3:

Sestrojte pravidelný pětiboký hranol $ABCDEFGHIJ$, jehož podstava $ABCDE$ leží v rovině $\delta = (-8; 6; 8)$, je-li zadán vrcholem $A = [1; 5; z_A]$ a středem $S = [4; 5; z_S]$. Bod C volte tak, aby měl větší z-ovou souřadnici než bod B. Hrana AF měří 7 cm a je umístěna tak, aby bod F měl větší z-ovou souřadnici, než bod A. (obr. 2.1.3)

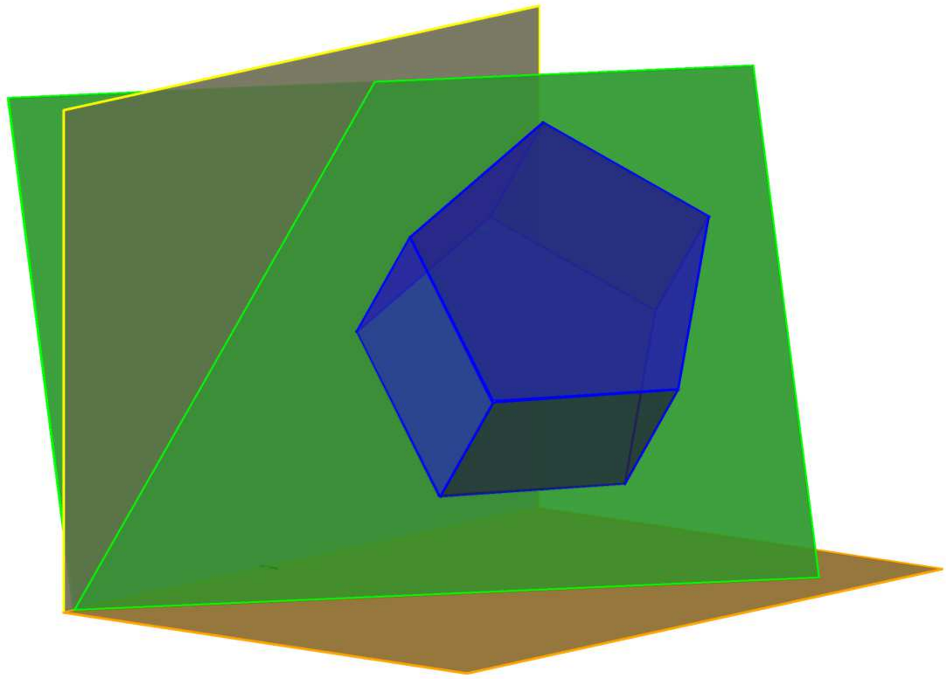
Řešení:

Nejprve narýsujme zadání - A_1, S_1, p_1^δ a n_2^δ. Dále postupujeme podobně jako v předchozích příkladech:

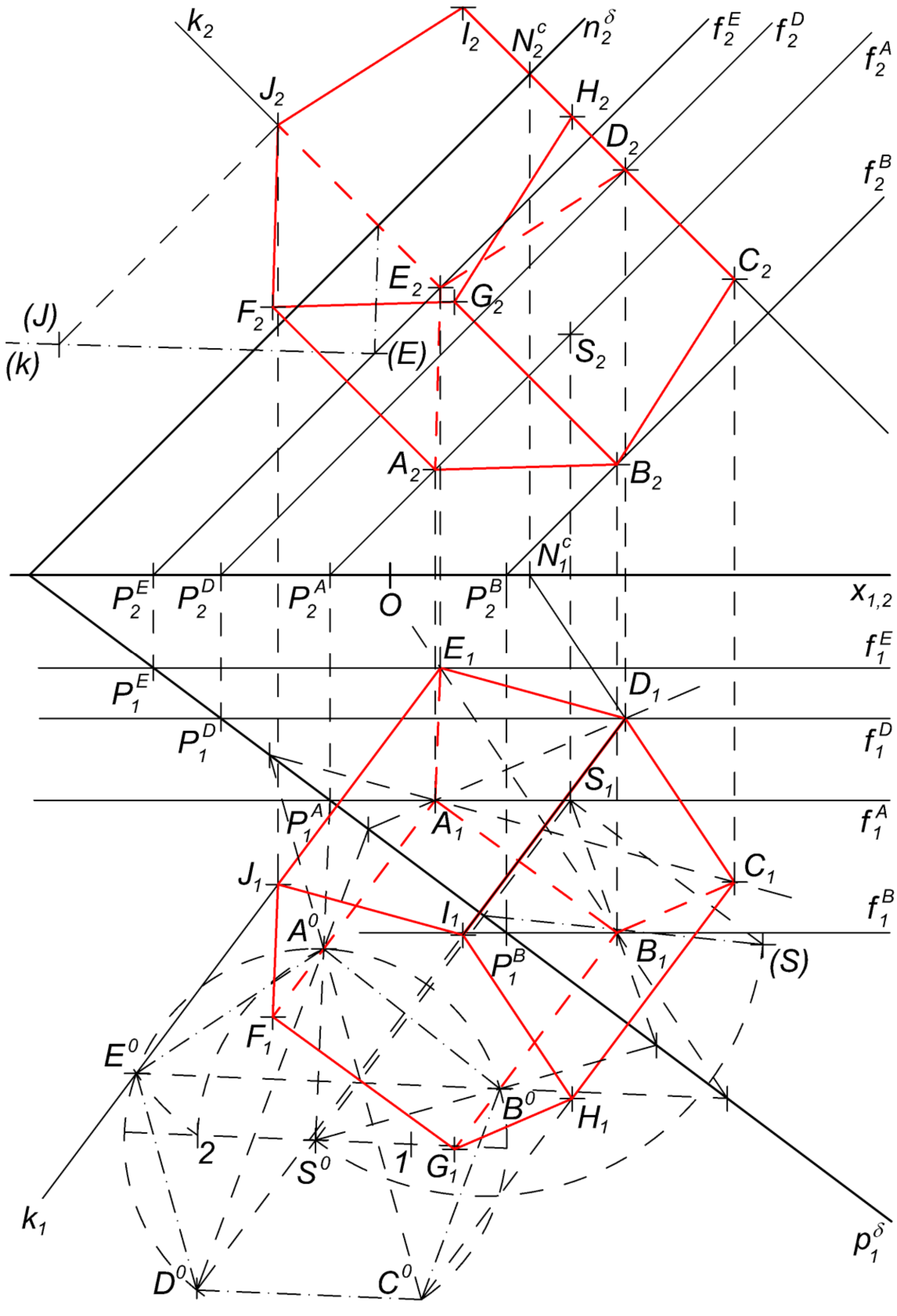
1) Pomocí např. frontální přímky ***najděme nárysy bodů A a S***. Nyní ***musíme sestrojit pětiúhelník podstavy v otočení***. Tedy sklopíme promítací rovinu spádové přímky procházející bodem S (např. v půdorysně). Musí proto platit: $\overleftrightarrow{S_1(S)} \parallel p_1^\delta$, $|S_1(S)| = |z_S|$; a pro kružnici otáčení k_S^0 musí opět platit, že její střed je půdorysný stopník spádové přímky a poloměr je jeho vzdálenost od (S). Takto ***sestrojíme bod S^0 a pomocí afinity i bod A^0***.
2) Nyní musíme ***sestrojit pravidelný pětiúhelník*** podstavy. Sestrojme tedy kružnici se středem v bodě S^0, která prochází bodem A^0, na níž budou ležet i zbylé vrcholy pětiúhelníku. Kolmo na úsečku A^0S^0 sestrojme průměr kružnice a najděme na něm bod 1, jehož vzdálenost od S^0 je polovina poloměru kružnice. Nyní tento bod vezměme jako střed kružnice, která bude procházet bodem A^0. Tato kružnice protne již sestrojený průměr v bodě 2, jehož vzdálenost od bodu A^0 je stejná jako velikost strany pětiúhelníku. Takže můžeme sestrojit vrcholy B^0, C^0, D^0 i E^0, tj. otočený pětiúhelník.

Pomocí afinity je přeneseme do roviny $\boldsymbol{\delta}$ a sestrojíme půdorys podstavy hranolu. ***Např. pomocí frontálních přímek zkonstruujeme i nárysy bodů*** B, E a D. Bod C je (pro zpestření a přehlednost) sestrojen pomocí bodu D a ordinály. Máme tedy nárys podstavy hranolu. Nyní sestrojíme zkreslení hrany kolmé k podstavě – např. hrany EJ. Postupujeme podobně jako v *Příkladu 2.1.2* (jen budeme sklápět do nárysny). Stejně pak sestrojíme i body F_2, G_2, H_2 a I_2 a půdorysy těchto bodů.

3) Viditelnost se řeší opět podobně jako v *Příkladu 2.1.2* – obvodové strany jsou vidět. Nyní stačí zjistit viditelnost jednoho z bodů A či B v půdorysu – hrana AB je v nárysu nejníž, tedy v půdorysu vidět nebude (spolu s hranami z těchto bodů vycházejících). V náryse rozhodneme pomocí jednoho z bodů E či G – bod G je v půdorysně nejdál od osy x v kladném směru, tedy bude vidět i s hranami z něj vycházejícími.



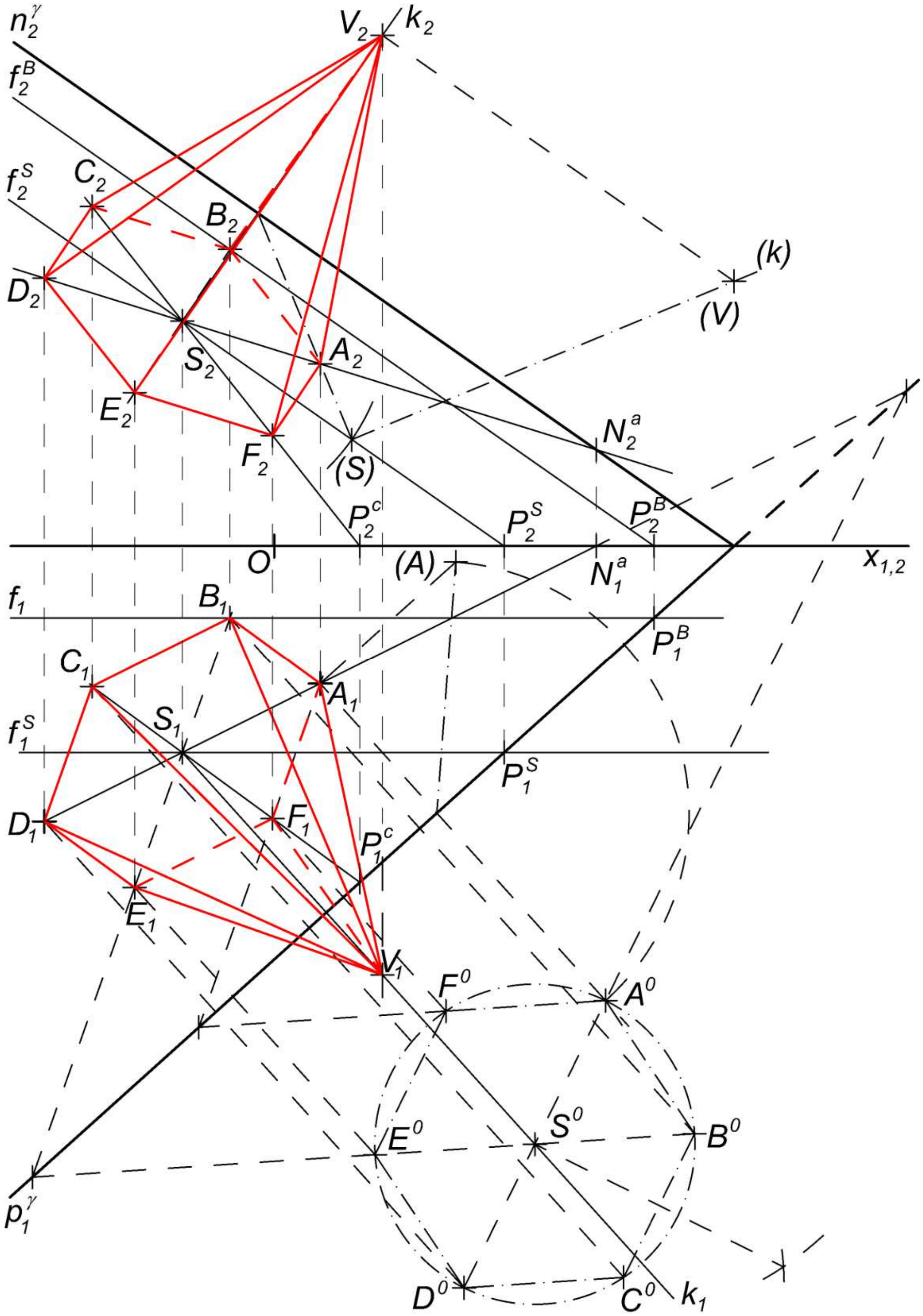
Obr. 2.1.3 a)



Obr. 2.1.3 b)

Příklad 2.1.4:

Sestrojte pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$, jehož podstava $ABCDEF$ leží v rovině $\gamma = (10; 9; 7)$ a je dána vrcholy $A = [1; 3; z_A]$ a $D = [-5; 6; z_D]$, jeho výška je 9 cm. Vrchol jehlanu volte nad rovinou γ (tzn. aby měl větší z-ovou souřadnici než střed podstavy). (obr. 2.1.4)



Obr. 2.1.4 a)

Řešení:

Postup bude obdobný jako v *Příkladu 2.1.1*, proto některé kroky budou popsány jen stručně.

1) Po narýsování zadání potřebujeme nejprve sestrojit nárysy bodů A a D (sestrojili jsme nejprve střed úsečky AD, který se v Mongeově promítání zobrazí jako střed obrazu této úsečky, a poté jsme sestrojili jeho nárys

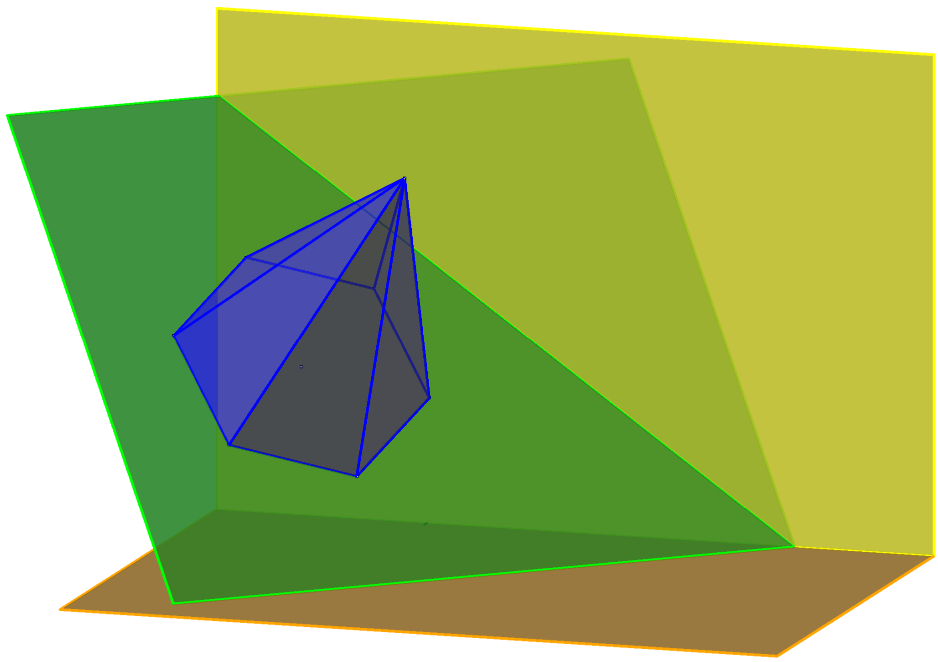
pomocí frontální přímky; přímka AD leží v rovině γ, tedy má stopníky na stopách roviny, a navíc prochází bodem S, jehož nárys již). Nyní ***otočíme rovinu γ*** např. do půdorysny, abychom mohli sestrojit i zbývající vrcholy šestiúhelníku. Tedy nejprve musíme ***promítací rovinu spádové přímky*** roviny γ (pro přehlednost rysu ji nebudeme nijak označovat), která prochází bodem A, ***sklopit a sestrojit tak poloměr otáčení***. Poté ***pomocí afinity sestrojíme i druhý bod v otočení*** a dorýsujeme šestiúhelník. Sestrojený šestiúhelník ***otočíme pomocí afinity zpět*** do roviny γ. Pro otočení zbylých bodů šestiúhelníku lze využít afinitu, nebo toho, že protilehlé strany jsou rovnoběžné anebo, že je šestiúhelník souměrný podle svého středu.

2) Nyní ***sestrojíme nárys šestiúhelníku*** a to pomocí libovolných přímek roviny γ. Využijme například frontálních přímek roviny γ, nejprve například pro sestrojení bodu B_2. Nárysy ostatních vrcholů dorýsujeme pomocí středové souměrnosti šestiúhelníku.

3) Pro ***sestrojení vrcholu V jehlanu*** je zapotřebí narýsovat střed podstavy (ten už máme v nárysu i v půdorysu) a ***kolmici k rovině podstavy vedenou tímto středem***. Jak víme, kolmice k rovině se v půdorysu i v nárysu zobrazí jako kolmice ke stopě roviny. Sestrojme tedy tuto kolmici k v bodě S_1 a S_2. Abychom mohli narýsovat i vrchol V, musíme promítací rovinu kolmice sklopit (stačí jen do jedné průmětny) a na ní nanést 9 cm od (S) na danou stranu – v nárysu „nad“ (S), čímž vznikne bod (V). Tím vedeme rovnoběžku s n_2^γ a kde protne přímku k_2, tam je bod V_2. Bod V_1 pak leží na ordinále vedené bodem V_2 a též na k_1.

4) Nyní ***spojíme vrchol V se všemi vrcholy podstavy*** $ABCDEF$ a samozřejmě ***určíme viditelnost*** jehlanu v půdorysně a v nárysně. Obrysové hrany průmětu budou viditelné, tj. v nárysu úsečky V_2C_2, C_2D_2, D_2E_2, E_2F_2, F_2A_2 a A_2V_2 a v půdorysu úsečky A_1V_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1 a E_1V_1. Nyní musíme určit viditelnost bodů F_1 a B_2. V půdorysu stačí určit polohu bodu F vůči stěně VBC (nebo můžeme využít krycí přímku, která prochází bodem F_1, ale ve skutečnosti leží ve stěně VBC) – v nárysu je bod F „pod“ nárysem stěny, tedy v půdorysu nebude vidět, spolu s úsečkami E_1F_1 a F_1A_1. V nárysu určíme viditelnost bodu B pomocí jeho polohy vzhledem ke stěně VDE (nebo můžeme opět využít krycí přímku procházející bodem B_2, která ve skutečnosti leží ve stěně VDE) – v půdorysně je stěna dále

od základnice (v kladném směru), než bod B, tedy bod v nárysu vidět nebude a s ním i úsečky C_2B_2 a B_2A_2.



Obr. 2.1.4 b)

Příklad 2.2.1:

Zobrazte rotační kužel s podstavou v rovině $\varphi = (-3; -5; 2)$, která je dána středem $S = [2; y_S; 7]$ a poloměrem $r = 5$ cm. Výška kuželu je 8 cm, vrchol V volte tak, aby měl větší z-ovou souřadnici, než bod S. (obr 2.2.1)

Řešení:

1) Pokud máme narýsované zadání, ***sestrojíme první průmět bodu S*** pomocí horizontální přímky roviny φ. Dále víme, že ***v rovinách rovnoběžných s průmětnou se nezkreslí velikosti***, což znamená, že v rovině φ se ve skutečné velikosti zobrazí ty úsečky, které jsou rovnoběžné se stopou roviny (je to vlastně průnik roviny φ s rovinami rovnoběžnými s průmětnou). To znamená, že průměr kužele, který je rovnoběžný s p_1^{φ} nebo s n_2^{φ} bude mít skutečnou velikost 8 cm. Tedy v půdorysu ***na h_1 v bodě S_1 naneseme od středu na každou stranu* 5 cm** a tím získáme jeden průměr elipsy, která je obrazem kružnice podstavy kuželu. Tím jsme získali body K_1 a L_1 a k nim sestrojíme na odpovídající přímce h_2 i nárysy. Stejným

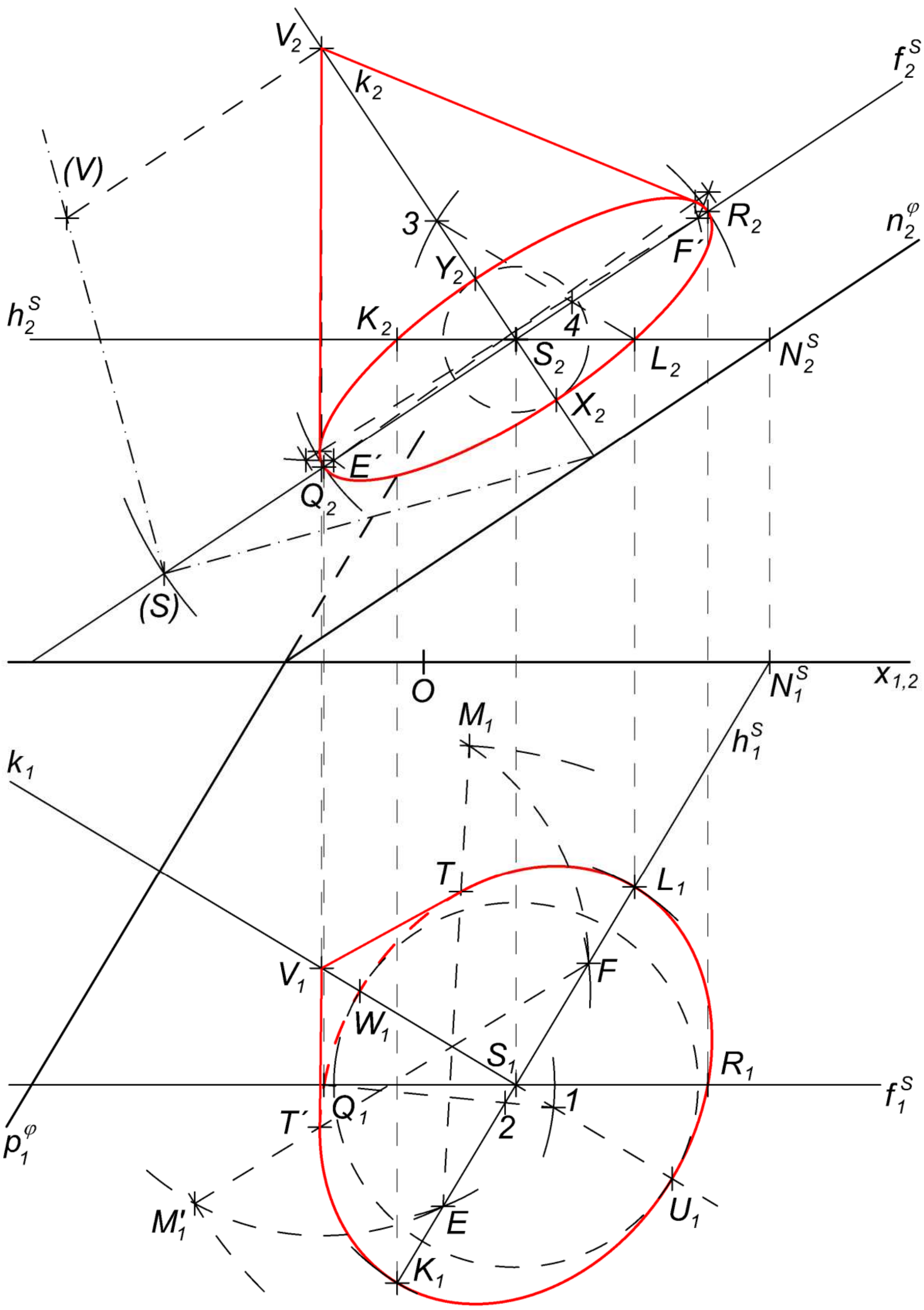
postupem ***v nárysu naneseme průměr na $\boldsymbol{f_2}$***. Máme body Q_2 a R_2 a opět sestrojíme jejich půdorysy na f_1.

2) Nyní zkonstruujeme celou elipsu v půdorysu a v nárysu. Využijeme k tomu **proužkovou konstrukci**, jelikož známe hlavní průměr elipsy. Pomocí ní zjistíme velikost vedlejší poloosy elipsy v půdorysu a stejným postupem i v nárysu. Tedy nejprve sestrojíme vedlejší osu (tj. kolmici na K_1L_1). Nyní narýsujeme kružnici se středem v bodě Q_1 (lze samozřejmě i v bodě R_1), o poloměru rovném velikosti hlavní poloosy. Tato kružnice protne vedlejší osu v bodě 1, kterým vedeme přímku procházející bodem Q_1. Tato přímka protne hlavní osu v bodě 2, jehož vzdálenost od bodu Q_1 je stejná jako velikost vedlejší poloosy. (*Pozn.*: podle toho, zda jsme vzali průsečík kružnice a hlavní osy blíže ke středu elipsy či dále, se proužková konstrukce dělí na: **součtovou proužkovou konstrukci –** bod 1 je dále od středu, **rozdílovou proužkovou konstrukci –** bod 1 je blíže ke středu; více o tomto viz [4], str. 49 a 52)

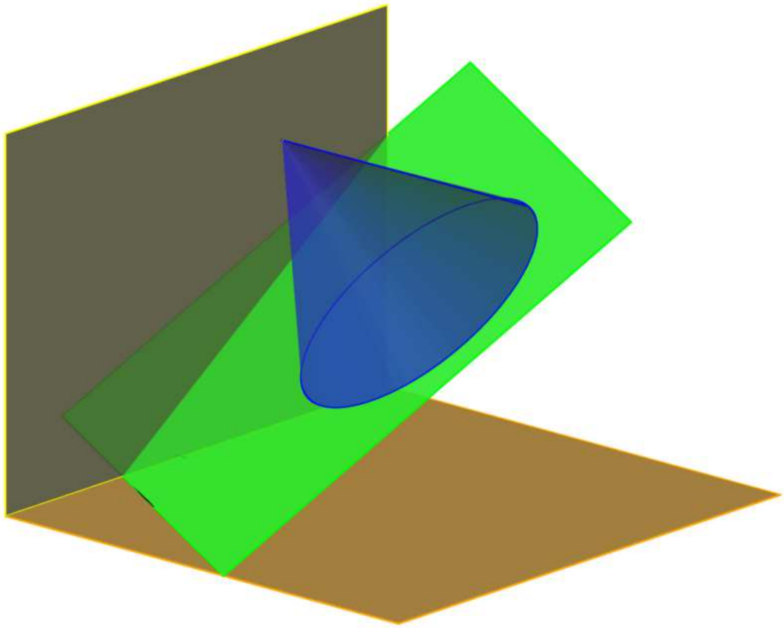
3) ***Sestrojení vrcholu V*** (resp. výšky) je stejné, jako u předchozích příkladů. Zbývá sestrojit jen obrysové přímky jdoucí vrcholem. ***Obrysové přímky kuželu jsou tečny k elipse podstavy z vrcholu***. **Tečny k elipse** sestrojíme následovně: sestrojíme ohniska elipsy E a F (tj. průsečíky kružnice o poloměru rovném velikosti hlavní poloosy, se středem ve vedlejším vrcholu, a hlavní osy), těmito ohnisky vedeme kružnici se středem ve vrcholu V, tato kružnice se protíná s **řídicí kružnicí** (tj. kružnicí o středu v jednom z ohnisek a poloměru rovném velikosti hlavní osy) v bodě souměrně sdruženém s druhým ohniskem podle tečny, tj. v bodech M_1 a M'_1 (*pozn.*: samozřejmě by stačila k jejich sestrojení jen jedna řídicí kružnice, ale pro přehlednost jsme využili obě), pokud spojíme bod M_1 (resp. M'_1) s příslušným ohniskem a uděláme osu této úsečky, získáme tečnu; body dotyku se sestrojí jako průsečíky tečny a přímky procházející odpovídajícím bodem (sdruženým s ohniskem) a druhým ohniskem. (*Pozn.*: podrobněji o popisu konstrukce viz např. [4], str. 41)

4) Nakonec jen ***viditelnost podstavy***: tečny k elipse průmětu podstavy tvoří obrys pláště kužele a budou vždy viditelné. Body dotyku tečen a elipsy mohou být body, kde se mění viditelnost podstavy. Při pohledu do půdorysu je vrchol „výše“ než podstava, což znamená, že zde bude docházet k změně viditelnosti elipsy průmětu podstavy ve zmíněných bodech dotyku,

tedy pouze část elipsy, která je obrysem průmětu kuželu, bude viditelná. V nárysu bude část elipsy, kde leží např. bod L_2, viditelná (neboť tvoří část obrysu kuželu), a zbylá část je také viditelná, neboť např. bod K (který leží v této části) má větší y-ovou souřadnici z bodů K a L.



Obr. 2.2.1 a)



Obr. 2.2.1 b)

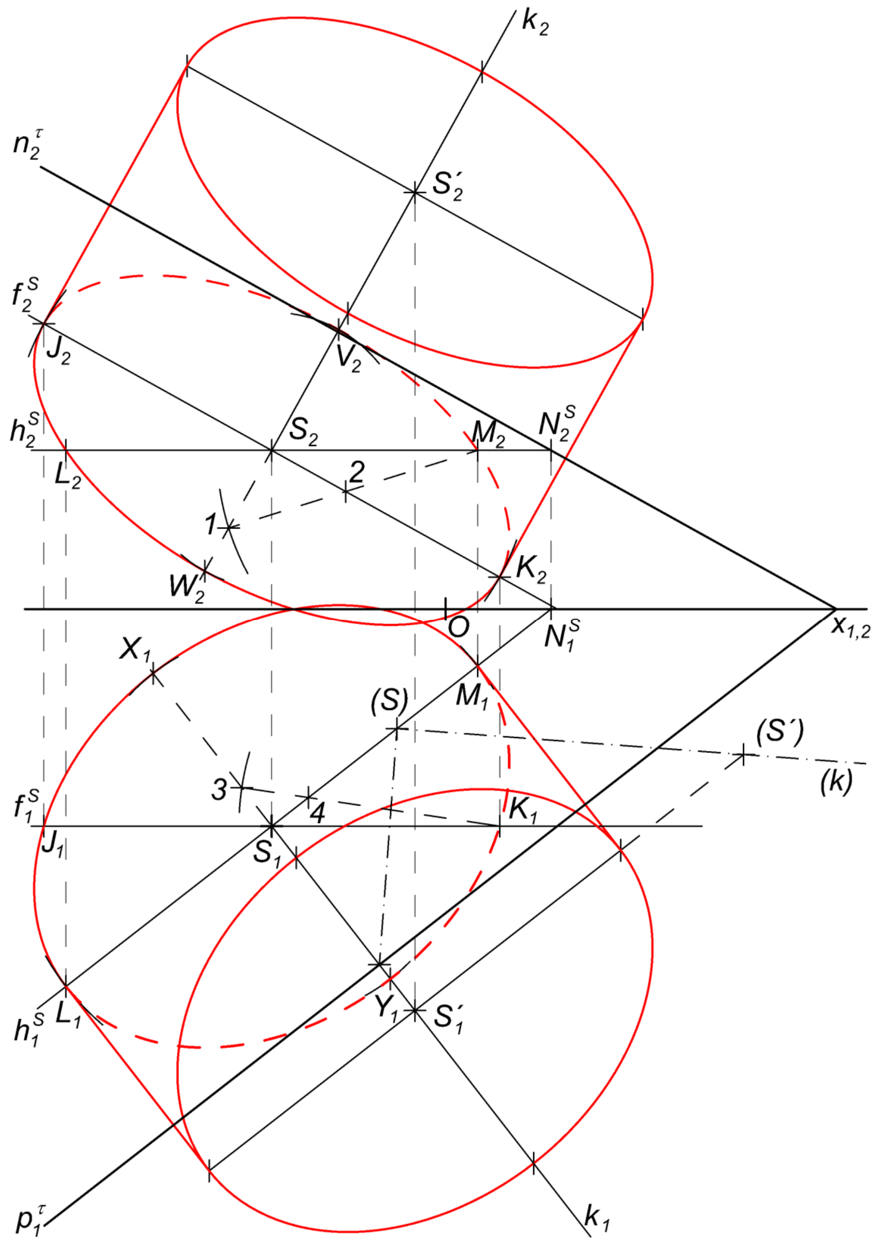
Příklad 2.2.2:

Zobrazte rotační válec s podstavou v rovině $\tau = (9; 7; 5)$, která je dána středem $S = [4; 5; z_S]$ a poloměrem $r = 6$ cm. Výška válce je 8 cm. Válec umístěte nad rovinu τ (tj. střed horní podstavy musí mít větší z-ovou souřadnici než střed S). (obr. 2.2.2)

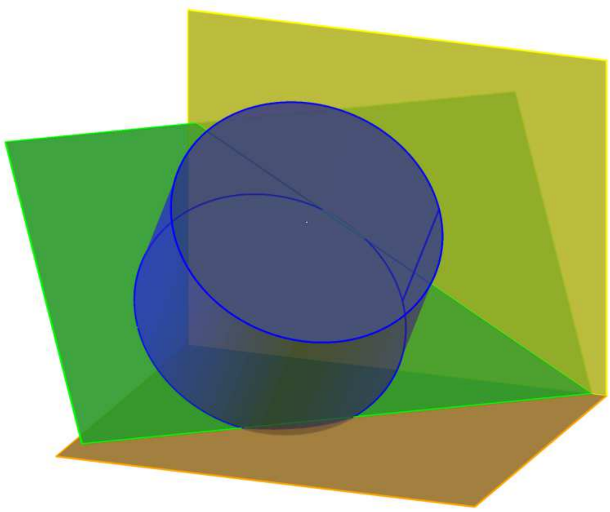
Řešení:

Postup je stejný jako v *Příkladu 2.2.1*, pouze se musí dorýsovat horní podstava:

1) Platí, že ***obraz podstavy***, která neleží v rovině τ, se zobrazí jako elipsa shodná s elipsou podstavy v rovině τ. Je to proto, že rovina horní podstavy je rovnoběžná s rovinou τ, tedy se shodně zkreslují velikosti ve stejných směrech. A to znamená, že stačí „přesunout" elipsu dolní podstavy do roviny horní podstavy (tzn. odpovídající si osy budou rovnoběžné a budou mít stejnou velikost).
2) ***Površky válce tvořící obrys*** jsou spojnice hlavních vrcholů elips obou podstav a jejich viditelnost v jednom průmětu se určí opět pomocí polohy zvoleného bodu v druhé průmětně (viz např. *Příklad 2.2.1*).



Obr. 2.2.2 a)



Obr. 2.2.2 b)

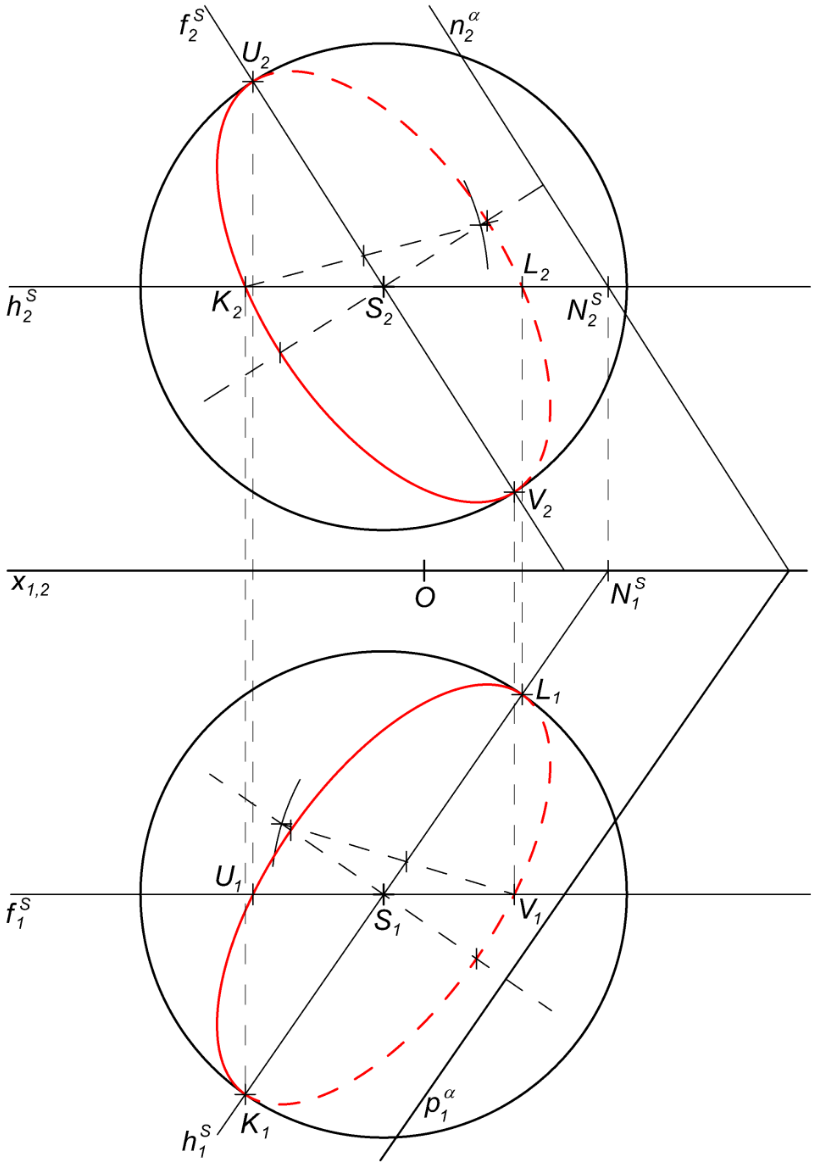
Příklad 2.2.3:

Zobrazte kulovou plochu, jejíž střed je $S = [-1; 8; 7]$ a poloměr $r = 6$ cm, a její **hlavní kružnici** (tj. kružnice se středem totožným jako je střed kulové plochy a i s totožným poloměrem), která leží v rovině $\alpha = (9; 13; z_\alpha)$. (obr. 2.2.3)

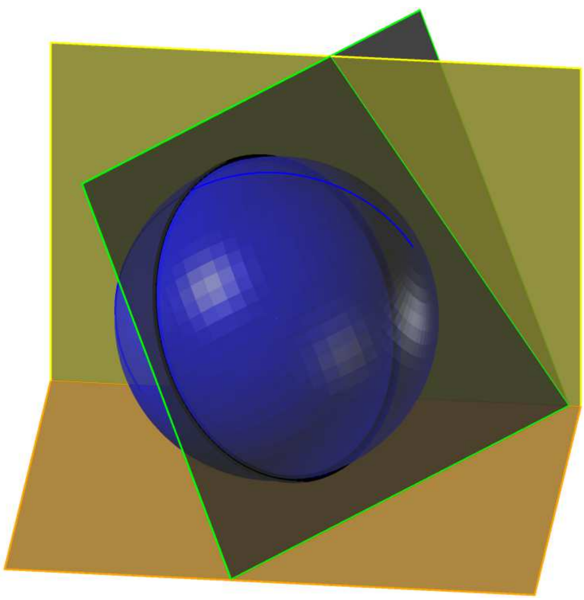
Řešení:

Nejprve si narýsujeme zadání. Sestrojení průmětů koulové plochy je jednoduché:

1) ***Průmětem kulové plochy jsou kruhy se středy v odpovídajících průmětech středu S a s poloměry totožnými s poloměrem kulové plochy***. Prvním zdánlivým obrysem (viz úvod *Kapitoly 2*) je tedy kruh, který je půdorysem prvního skutečného obrysu. První skutečný obrys (viz úvod *Kapitoly 2*) kulové plochy je hlavní kružnice, která leží v rovině rovnoběžné s půdorysnou (tzn. je kolmá na směr promítání). Tato kružnice se nazývá **rovník**. Druhý zdánlivý obrys je nárysem druhého skutečného obrysu, což je hlavní kružnice, která leží v rovině rovnoběžné s nárysnou (tedy je kolmá na směr promítání do nárysny). Této kružnici se říká **hlavní poledník** nebo také **meridián**. Rovník a meridián rozdělují kulovou plochu na dvě a dvě polokoule, kde vždy jedna z dvojice (tj. „spodní" resp. „zadní") polokoulí v daném průmětu nebude viditelná – takto lze tedy snadno určit i viditelnost bodů na kulové ploše.
2) ***Rovinu*** α dourčíme snadno, neboť musí ***procházet středem kulové plochy***. ***Hlavní kružnice ležící v rovině*** α ***se zobrazí jako elipsa*** (neboť rovina není rovnoběžná ani s jednou z nákresen) v půdorysu i v nárysu. ***Hlavní vrcholy elipsy sestrojíme jako v předchozích příkladech*** – na h_1 a na f_2 naneseme 6 cm od středu S na každou stranu. Vedlejší vrcholy elips zkonstruujeme pomocí proužkové konstrukce a to tak, že sestrojíme na h_2 nárys jednoho z jejích bodů. Podobně s pomocí f_1 sestrojíme vedlejší průměr elipsy v půdorysu. ***Viditelnost elips*** určíme například pomocí bodů U_1 a K_2 (jako v předchozích příkladech) a můžeme využít i polohy bodů na polokoulích určených zmíněným meridiánem či rovníkem.



Obr. 2.2.3 a)



Obr. 2.2.3 b)

3. Řezy těles

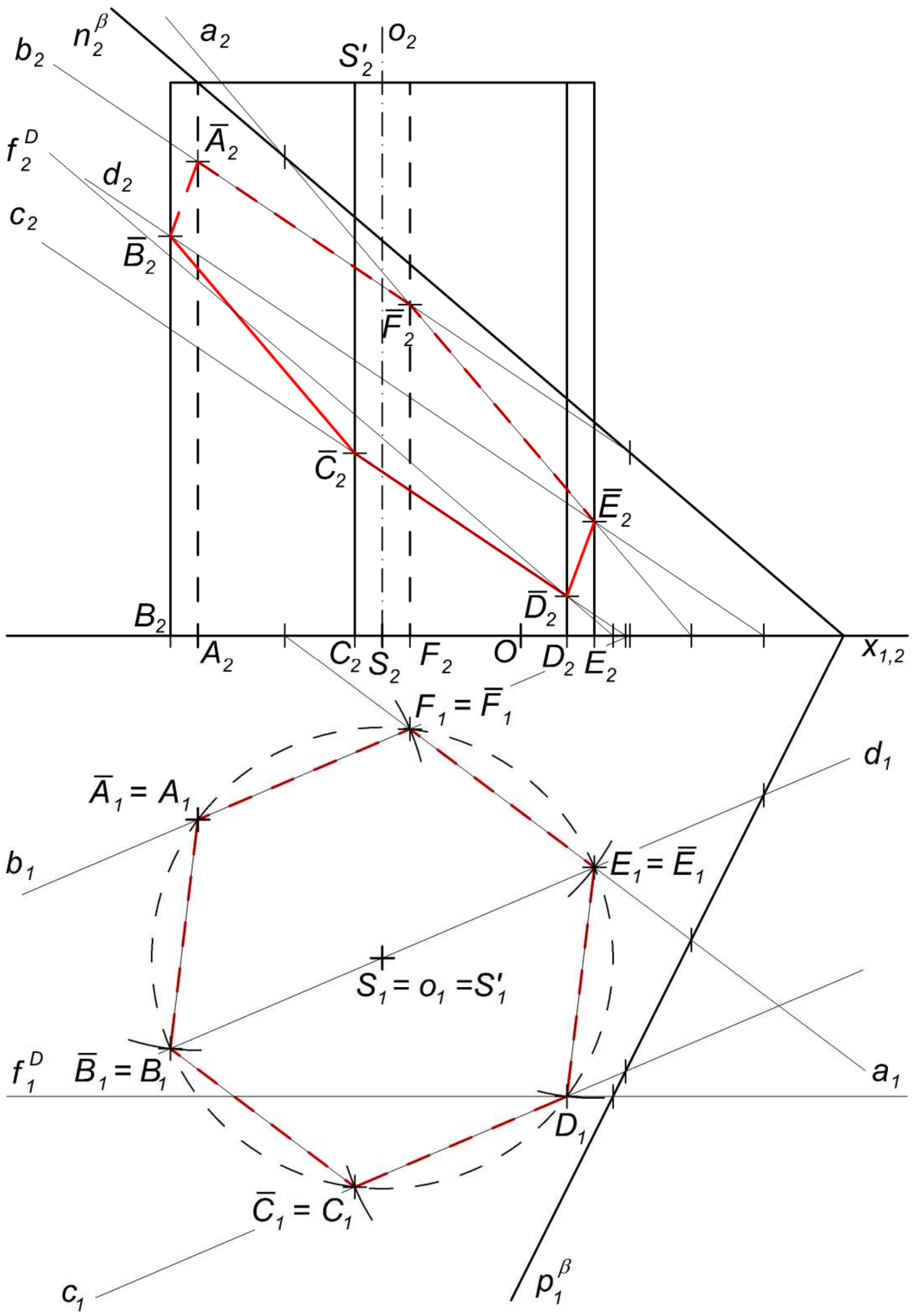
Tato kapitola se věnuje řezům těles – nejprve hranatým a poté i rotačním. Je dobré zmínit, že se v části o řezu kuželu budou využívat znalosti kuželoseček. Základní konstrukce jsou např. v [4], kde je vše přehledně vysvětleno. Pro stručnost budeme tedy tyto znalosti předpokládat (neboť se probírají též v matematice).

Dohodněme se ještě, že (pro jednoduchost) budeme v příkladech uvažovat jen průnik povrchu tělesa s rovinou (tj. průnikem bude pouze křivka).

U příkladů je vždy přiložen rys (není ve skutečném měřítku) a též prostorové znázornění. Příklady jsou členěny takto: část *3.1* obsahuje hranatá tělesa a část *3.2* tvoří rotační tělesa (vždy od jednodušších k těžším). Krokovaná zadání i prostorové situace (jak ve formátu PNG, tak jako manipulovatelný soubor v Rhinoceru) najdete na přiloženém CD.

Příklad 3.1.1:

Sestrojte řez pravidelného šestibokého hranolu s podstavou v půdorysně, který je dán středem podstavy $S = [-3; 7; 0]$ a jedním jejím vrcholem $A = [-7; 4; 0]$. Výška hranolu je $v = 12$ cm, umístěte ji tak, aby střed horní podstavy měl větší z-ovou souřadnici než bod S. Rovina řezu je $\beta = (7; 14; 6)$. (obr. 3.1.1)



Obr. 3.1.1 a)

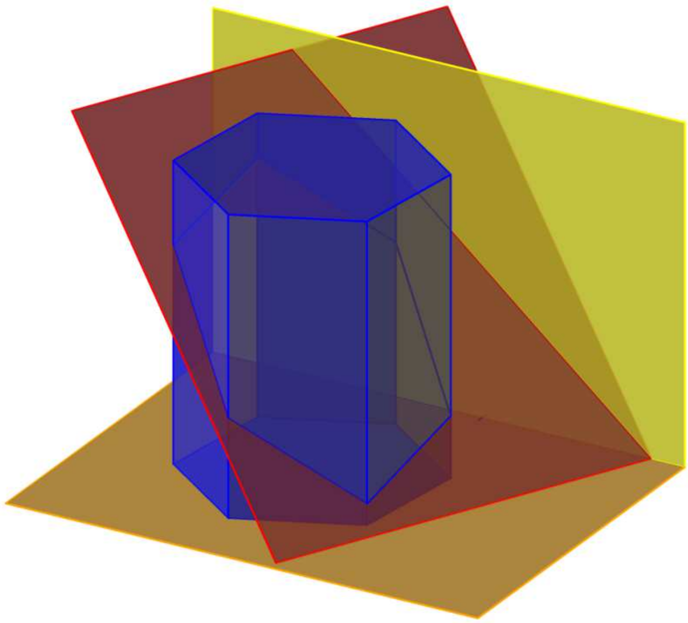
Řešení:

Nejprve si narýsujeme zadání, tj. S_1, S_2, A_1, A_2, p_1^β a n_2^β. Dále budeme postupovat následovně:

1) Jelikož je ***osa hranolu kolmá k půdorysně, zobrazí se v ní jako bod***, tedy $S_1 = o_1$. ***V nárysně to bude přímka $\boldsymbol{o_2}$ kolmá k základnici***, procházející bodem S_2. Vzhledem k poloze osy se ani vzdálenost mezi podstavami (tj. výška hranolu) nezkreslí. Můžeme tedy sestrojit na ose o_2 střed horní podstavy S'_2 ve vzdálenosti 12 cm od bodu S_2, přičemž $S_1 = S'_1$. Protože má hranol podstavu v půdorysně, zobrazí se v ní ve skutečné velikosti (to by platilo i pro podstavu v libovolné hlavní rovině). ***Narýsujme tedy šestiúhelník*** – na kružnici se středem S_1 a poloměrem $|S_1A_1|$ leží vrcholy šestiúhelníku, pro který platí, že jeho strany jsou stejně dlouhé, jako je poloměr této kružnice. Máme tedy body B_1, C_1, D_1, E_1 a F_1. Sestrojme také jejich nárysy, které leží na základnici. ***Jednotlivé hrany hranolu***, které vycházejí z bodů A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 a F_2, ***budou rovnoběžné s osou $\boldsymbol{o_2}$ a jejich délka je rovna $\boldsymbol{|S_2S'_2|}$***. Vrchní podstava hranolu se zobrazí (stejně jako spodní podstava) do úsečky. ***Viditelnost hran*** je snadná: hrany z bodů C_2 a F_2 jsou částí obrysu, tedy jsou viditelné a jelikož body A a B jsou v půdorysu nejblíže k ose $x_{1,2}$, nebudou v nárysu vidět. Hrany z bodů D_2 a E_2 viditelné budou.

2) Nyní ***sestrojme řez hranolu***. Využijme například krycí přímku a roviny β, která prochází stěnou $EFE'F'$, tj. je součástí řezu hranolu. Pomocí stopníků sestrojíme její nárys. Tato přímka protíná hranu bodu E přesně v jednom z vrcholů pětiúhelníku řezu. Tento bod v půdorysu splývá s bodem $E_1 = \bar{E}_1$, v nárysu je to pak průsečík a_2 a hrany vycházející z bodu E_2. Přímka také protíná hranu bodu F v bodě $\bar{F}$, pro který platí to samé, jako pro bod $\bar{E}$. Stejným postupem pomocí krycí přímky b ve stěně $AFA'F'$ a toho, že prochází již sestrojeným bodem $\bar{F}$, zkonstruujeme i bod $\bar{A}$. Nyní pro přesnější konstrukci využijme frontální přímku k sestrojení bodu $\bar{D}$: $f_1^D \parallel x_{1,2}$, $D_1 = \bar{D}_1$ a $\bar{D}_2$ je průsečík f_2^D a hrany jdoucí bodem D_2. Opět pomocí krycí přímky c a již sestrojeného bodu $\bar{D}$ sestrojíme bod $\bar{C}$ a podobně i bod $\bar{B}$.

3) ***Viditelnost řezu*** se určí snadno: v půdorysně nebude vidět, neboť ho „zakrývá“ horní podstava. V nárysně budou vidět ty strany šestiúhelníku řezu, které leží na viditelných stěnách hranolu.



Obr. 3.1.1 b)

Příklad 3.1.2:

Sestrojte řez kosého hranolu s podstavou pravidelného osmiúhelníku, který leží v půdorysně. Hranol je dán středem dolní podstavy $S = [1; 5; 0]$, středem horní podstavy $S' = [6; 4; 10]$ a bodem na jedné hraně $M = [-3; 2; 1]$. Rovinou řezu je **normálová rovina** (tj. rovina kolmá k hranám hranolu), která prochází bodem $R = [-6; 3; 2]$. (obr. 3.1.2)

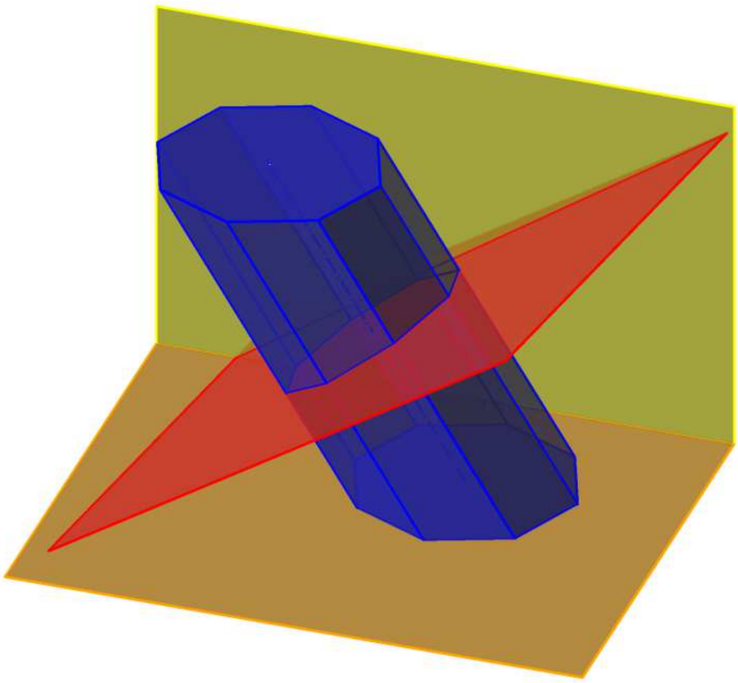
Řešení:

Nejprve si narýsujeme zadání, tj. S_1, S_2, S'_1, S'_2, R_1, R_2, M_1 a M_2. Dále budeme postupovat následovně:

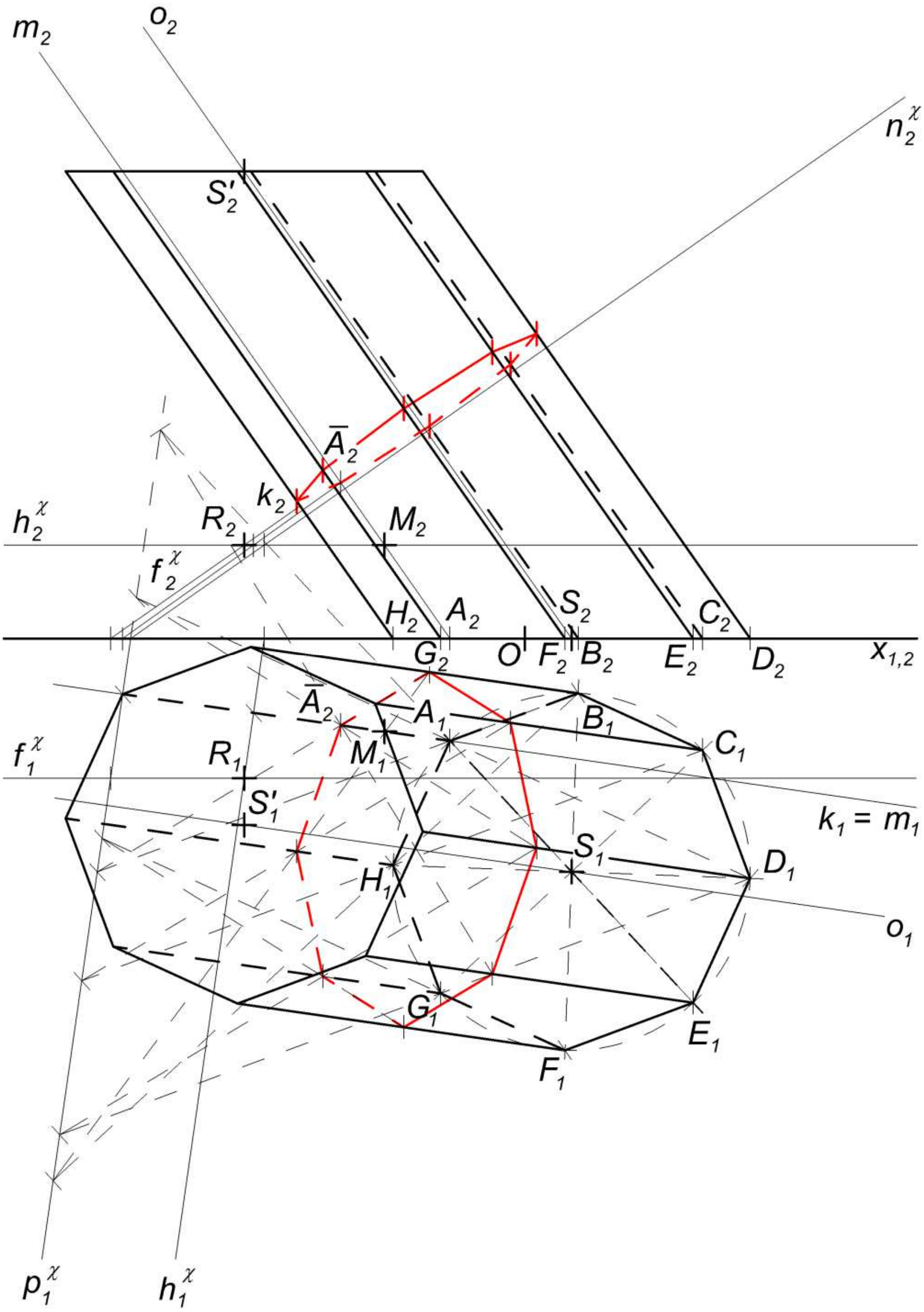
1) Sestrojme spojnici o středů podstav S a S' kosého hranolu. ***Tato přímka je rovnoběžná se všemi hranami hranolu***. To znamená, že stačí z bodu R udělat rovnoběžku m s přímkou o a na ní bude ležet jedna hrana. ***Průsečík této přímky m s půdorysnou*** (což je rovina podstavy hranolu) ***je jeden vrchol podstavy***, např. A. Jelikož je podstava v půdorysně, zobrazí se ve skutečné velikosti. ***Narýsujme tedy osmiúhelník podstavy*** a najděme nárysy jeho vrcholů. ***Stejný osmiúhelník pak bude tvořit i horní podstavu*** – stačí jen tento osmiúhelník „posunout“ ze středu S_1 do středu S'_1 (*pozn.*: pro přehlednost nejsou vrcholy horní podstavy pojmenovány). Nyní jen spojíme v půdorysu odpovídající vrcholy osmiúhelníků a určíme

viditelnost (jako např. v *Příkladu 3.1.1*). ***Nárysy podstav budou úsečky se středy v bodech S_2 a S'_2. Nárysy hran hranolu musí být opět rovnoběžné s přímkou o_2 a dlouhé stejně jako úsečka $S_2S'_2$***. Opět určíme viditelnost nárysu hranolu.

2) Nyní ***sestrojíme normálovou rovinu*** χ procházející bodem R. ***Pomocí horizontální a frontální přímky*** jdoucí bodem R tedy sestrojme stopy roviny χ. Při konstrukci řezu ***budeme v půdorysu využívat afinitu mezi rovinou podstavy a rovinou řezu***, kde osou afinity bude průsečnice rovin (tj. stopa p_1^{χ}) a směr bude rovnoběžný s přímkou o. Nejprve ***sestrojme jeden průsečík roviny χ a např. hrany z bodu A*** – pomocí krycí přímky $m_1 = k_1$ najdeme $m \cap \chi = \{\bar{A}\}$. V půdorysně nyní máme vzor a obraz (tj. body A_1 a $\bar{A}_1$), takže můžeme sestrojit i obrazy bodů B_1, D_1, E_1, H_1, G_1 a F_1. ***Sestrojili jsme tak osmiúhelník řezu*** (*pozn.*: pro přehlednost opět nejsou body nijak označeny). ***Viditelnost řezu*** opět odpovídá viditelnosti jednotlivých stěn (resp. hran). ***Narýsujme ještě druhé průměty bodů řezu*** (na odpovídajících hranách a na ordinálách z daných bodů) a podobně jako v půdorysu určíme ***viditelnost osmiúhelníku řezu***.



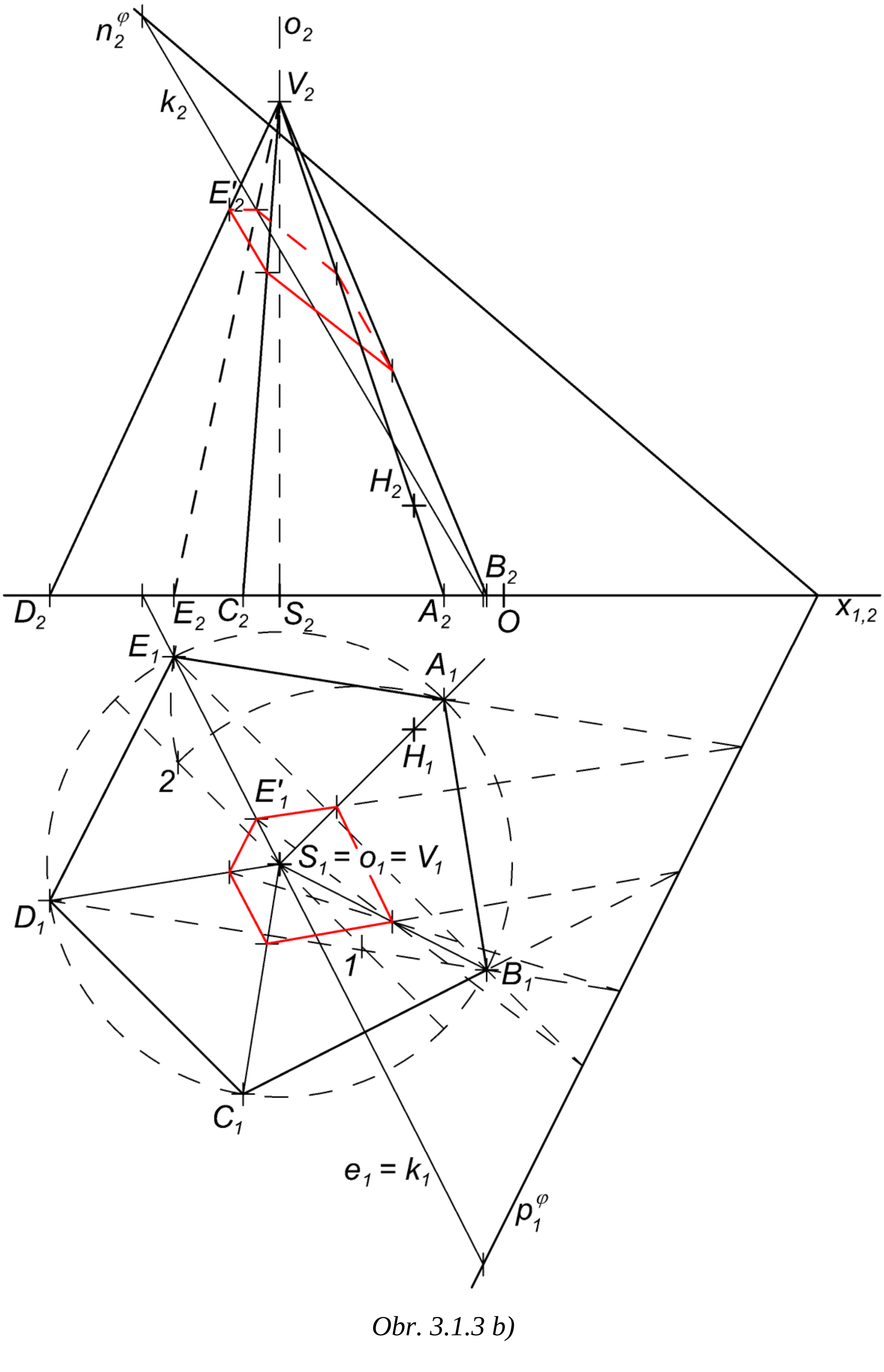
Obr. 3.1.2 a)



Obr. 3.1.2 b)

Příklad 3.1.3:

Sestrojte řez pravidelného pětibokého jehlanu $ABCDEV$ s podstavou v půdorysně, který je dán středem podstavy $S = [-5; 6; 0]$, bodem $H = [-2; 3; 2]$ na jedné jeho hraně a výškou $v = 11$ cm. Rovina řezu je $\varphi = (7; 14; 6)$. (obr. 3.1.3)



Obr. 3.1.3 b)

Řešení:

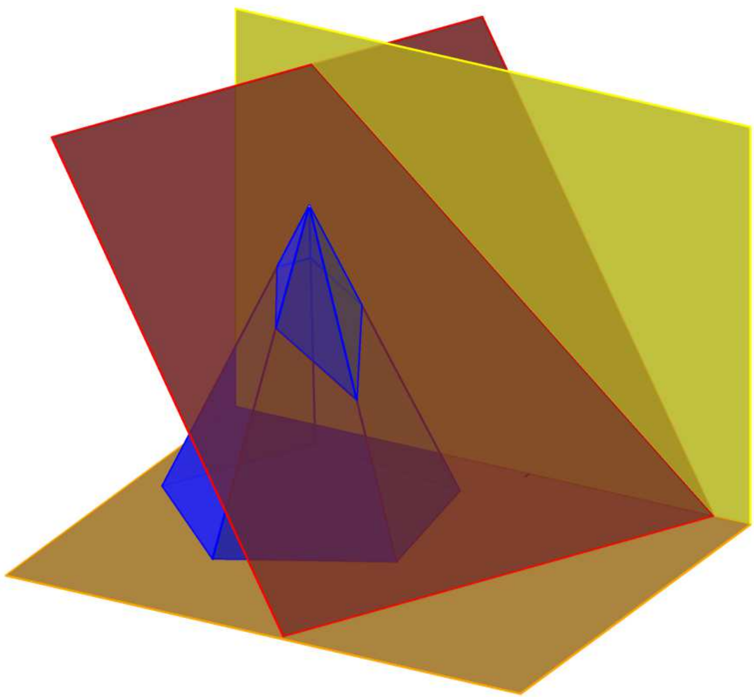
Nejprve si narýsujeme zadání, tj. S_1, S_2, H_1, H_2, p_1^{φ} a n_2^{φ}. Dále budeme postupovat podobně jako v *Příkladu 3.1.1*:

1) ***Sestrojme osu a vrchol jehlanu V***, pro něž platí: $S_1 = o_1$ a $o_2 \perp x_{1,2}$, $V_1 = S_1$, $V_2 \in o_2$ a $|S_2V_2| = 11$ cm. Na spojnici bodů H a V bude ležet

jeden vrchol (např. A) podstavy jehlanu, který je průsečíkem této přímky a půdorysny (tj. roviny podstavy). Máme střed a jeden vrchol pětiúhelníku podstavy, tedy podle postupu v *Příkladu 2.1.3* ***sestrojme celý pětiúhelník***. Narýsujme také nárysy vrcholů pětiúhelníku podstavy. Tyto nárysy spojme s vrcholem a ***určeme viditelnost jednotlivých hran jehlanu***: E_2V_2 a A_2V_2 nebudou vidět, neboť body A a E mají nejmenší y-ovou souřadnici z vrcholů podstavy.

2) ***Při konstrukci řezu budeme využívat kolineaci*** mezi rovinou podstavy jehlanu a rovinou řezu, kde osou je průsečnice těchto rovin a střed kolineace je vrchol V. Nejprve tedy sestrojme obraz jednoho z vrcholů podstavy – např. E. ***Pomocí krycí přímky k hrany e sestrojíme její průsečík s rovinou*** $\boldsymbol{\varphi}$, tedy bod E'. Nyní již pro konstrukci půdorysu řezu ***využijeme kolineaci a zobrazíme na odpovídajících hranách jednotlivé obrazy vrcholů*** A_1, B_1, C_1 a D_1 (*pozn.*: pro přehlednost nejsou již tyto body řezu, resp. obrazy vrcholů v kolineaci, nijak označeny).

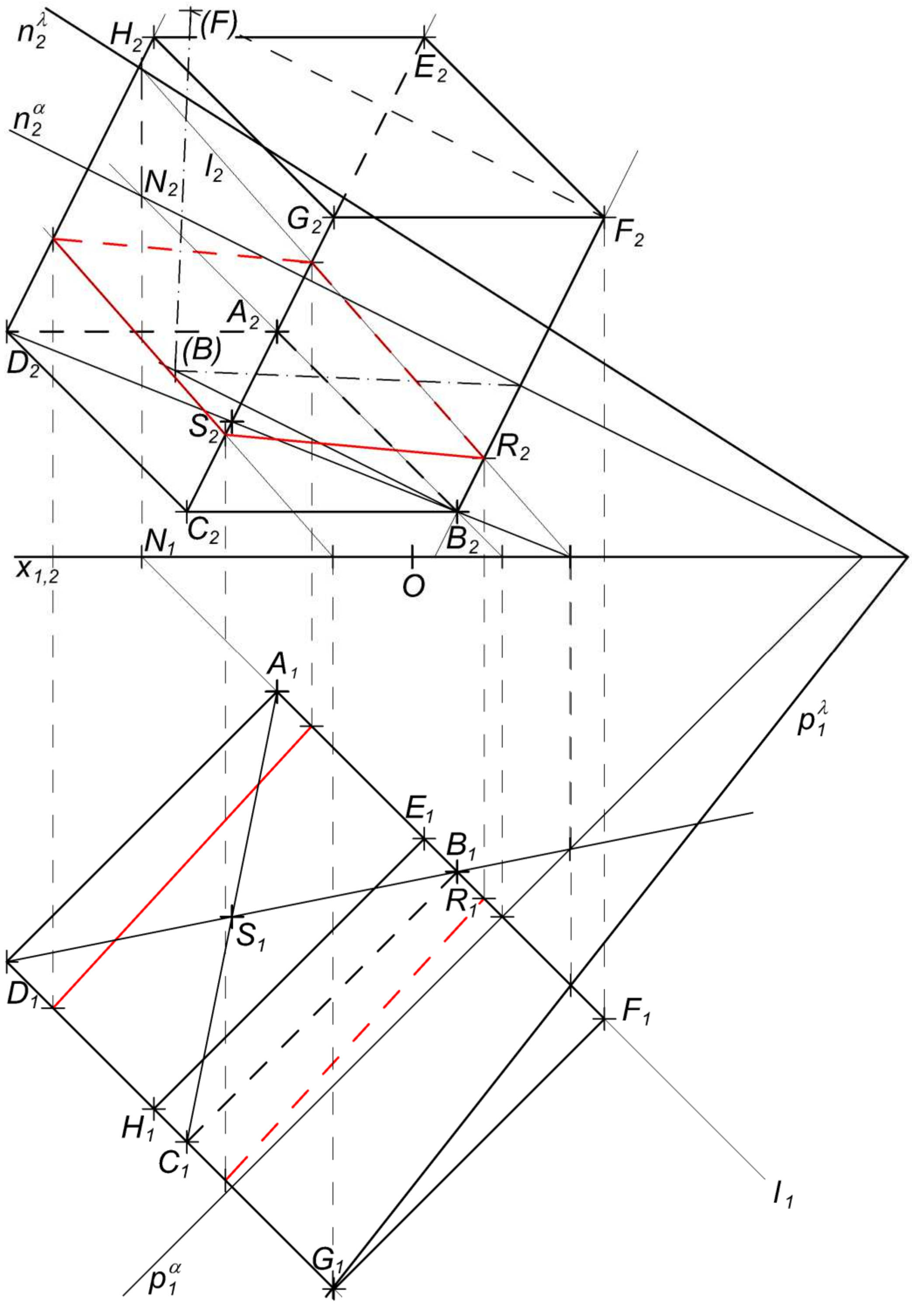
3) ***Viditelnost řezu*** je jednoduchá, neboť všechny hrany jsou vidět, bude vidět i celý řez. Sestrojme nárysy bodů řezu a opět určeme viditelnost podle viditelnosti jednotlivých hran.



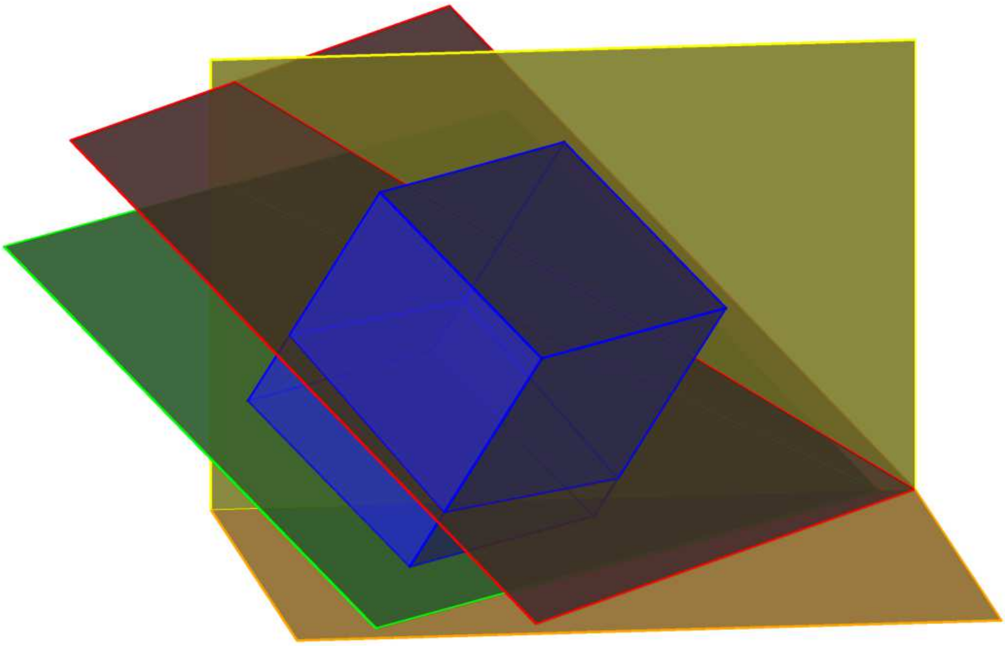
Obr. 3.1.3 a)

Příklad 3.1.4:

Sestrojte řez kvádru $ABCDEFGH$ rovinou $\lambda = (11; 14; 7)$. Kvádr je určen vrcholy podstavy $A = [-3; 3; 5]$, $B = [1; 7; 1]$, středem podstavy $S = [-4; 8; 3]$ a výškou $v = 8$ cm. (obr. 3.1.4)



Obr. 3.1.4 a)



Obr. 3.1.4 b)

Řešení:

1) Po narýsování zadání ***sestrojíme stopy roviny*** dané body A, B a S (*viz kapitola 1.1*), nebo-li roviny podstavy, kterou nazveme například α. Po sestrojení p_1^α a n_2^α zjistíme, že přímka A_1B_1 je kolmá na p_1^α, což znamená, že hrana C_1B_1 bude rovnoběžná s p_1^α a tedy i kolmá k A_1B_1. Můžeme bez otáčení roviny α ***sestrojit*** rovnou ***obdélník podstavy*** (úhlopříčky obdélníku jsou půleny bodem S, neboť v Mongeově promítání se střed úsečky zachovává).
2) Nyní ***sestrojíme vrchol horní podstavy kvádru*** například pomocí sklopení nárysně promítací roviny hrany BF do roviny rovnoběžné s nárysnou, která prochází bodem B. Dále sestrojíme body G, H a E.
3) ***K sestrojení řezu využijeme krycí přímky***. Vzhledem k poloze kvádru můžeme za krycí přímku l vzít tu, která leží např. ve stěně $ABFE$ a sestrojit její průsečnici s rovinou λ (pomocí stopníků). Takto sestrojíme průsečík R hrany BF s rovinou λ a podobně i pro hranu AE. (*Pozn.:* pro přehlednost rysu již nebudou popsány stopníky krycích přímek a ani jejich průsečíky s hranami) Sestrojme i půdorysy těchto dvou bodů, které jsou vrcholy rovnoběžníku řezu. Podobný postup aplikujeme na stěnu $DCGH$, kde zvolíme krycí přímku totožnou s jejím půdorysem. Sestrojíme tak průsečíky hran DH a CG s rovinou řezu. Samozřejmě by stačilo najít jen tři

průsečíky hran kvádru s rovinou λ a poté pomocí rovnoběžnosti sestrojit celý řez kvádru.

4) ***Viditelnost řezu*** se určí snadno pomocí viditelnosti jednotlivých hran – např. jako v *Příkladu 3.1.2.*

Příklad 3.1.5:

Sestrojte řez trojbokého jehlanu $ABCV$ rovinou $\psi = (-7; 15; 8)$. Pro podstavu jehlanu platí: $A = [-5; 3; 9]$, $B = [-2; 8; 3]$ a $C = [2; 4; 4]$. Velikost výšky jehlanu je 8 cm a prochází těžištěm podstavy, vrchol volte tak, aby měl větší z-ovou souřadnici, než těžiště. (obr. 3.1.5)

Řešení:

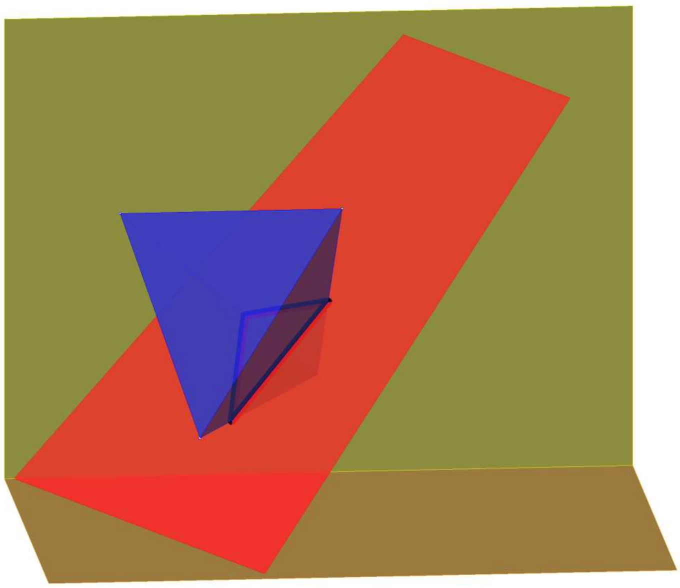
Nejprve zkonstruujeme stopy roviny ψ a průměty bodů A, B a C.

1) Nyní ***sestrojíme stopy roviny*** $\boldsymbol{\beta}$, dané vrcholy trojúhelníku podstavy jehlanu (*viz kapitola 1.1*). Poté ***určíme průsečnici rovin*** $\boldsymbol{\psi}$ ***a*** $\boldsymbol{\beta}$. (*viz kapitola 1.2*) ***Průsečnice*** $\boldsymbol{r}$ ***protíná nárys i půdorys hranice trojúhelníku ve dvou bodech, které jsou body řezu*** (leží totiž nejen v rovině β, ale i v rovině ψ). (*Pozn.:* Tento krok je samozřejmě možné udělat i po zkonstruování vrcholu jehlanu, ale pro přehlednost ho udělejme nyní.)

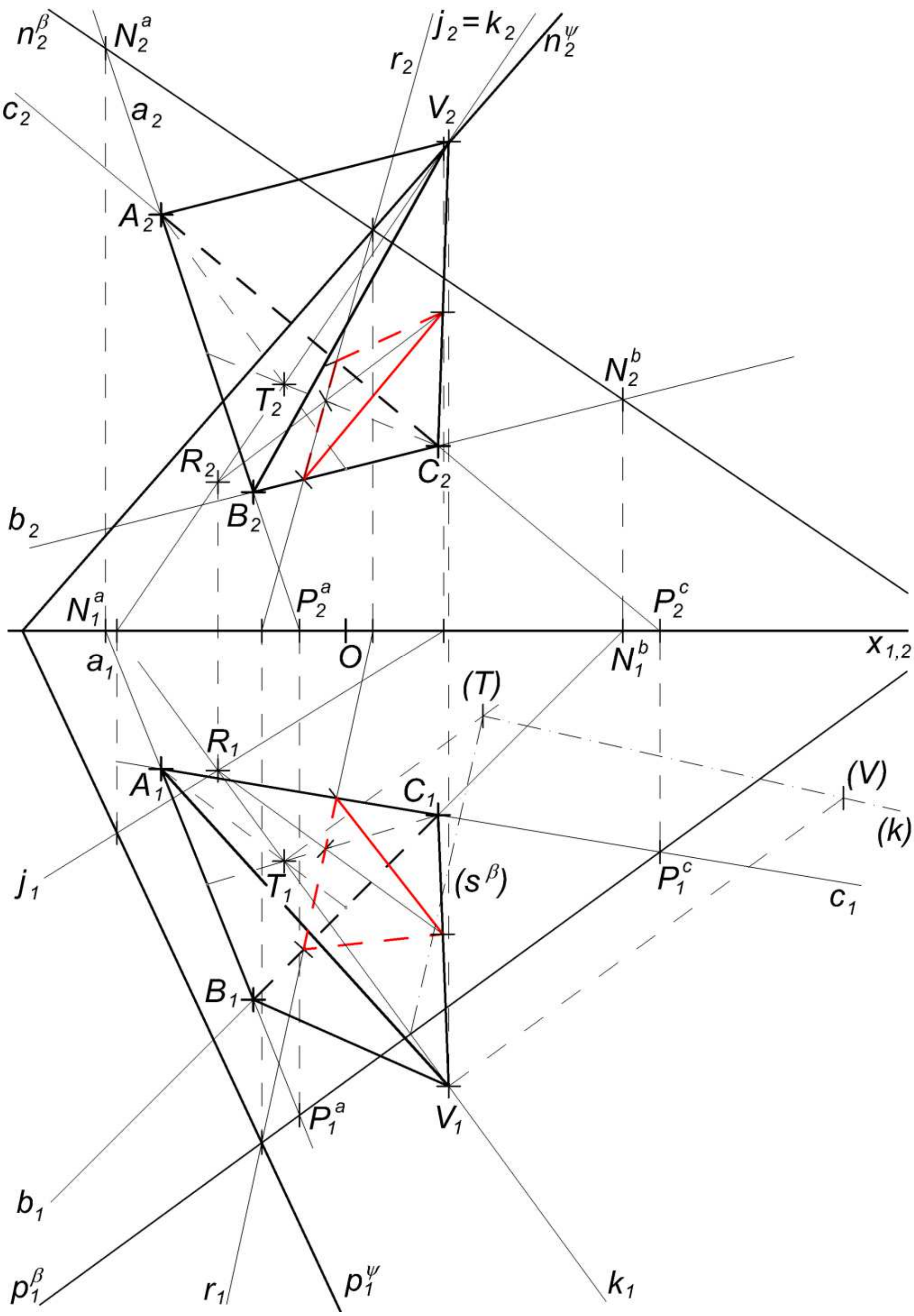
2) Dále ***sestrojíme vrchol jehlanu*** V. Tedy potřebujeme nejprve sestrojit těžiště trojúhelníku. To je snadné, neboť víme, že je to průsečík těžnic (tj. spojnic vrcholů se středy protilehlých stran). Navíc víme, že v Mongeově promítání se střed úsečky zachovává. Aplikací tohoto postupu na nárys a půdorys trojúhelníku jsme získali body T_1 a T_2. Výška je kolmá k rovině β, tedy vedeme bodem T_1 kolmici k_1 k p_1^{β} a také bodem T_2 kolmici k_2 k n_2^{β} (*viz kapitola 1.1*). Nyní musíme promítací rovinu (kolmou ke stopě roviny β) přímky k sklopit, například do půdorysny. Na (k), která je kolmá na spojnici bodu (T) a průsečíku k_1 a p_1^{β} (tj. kolmá na (s^{β}), sklopenou spádovou přímku roviny β, která prochází bodem T) naneseme od (T) výšku 8 cm a máme tak bod (V). Nyní sestrojíme bod V_1, který je patou kolmice spuštěné z (V) na k_1. K němu sestrojíme i nárys. Viditelnost jehlanu je velice jednoduchá, neboť všechny hrany směřující do vrcholu V budou vidět, pouze hrany A_2C_2 a B_1C_1 nebudou vidět (určení je podobné, jako v *Příkladu 2.1.4*).

3) Již jsme sestrojili průsečnici rovin ψ a β, jejíž část je součástí řezu jehlanu, neboť leží v jeho podstavě. Ještě tedy schází ***určit zbylou část řezu***. Jelikož rovina již protíná podstavu, bude protínat buď hranu CV, nebo hrany AV a BV (z polohy roviny bychom mohli usoudit, že bude protínat hranu CV). Vzhledem k tomu, že nelze snadno sestrojit pomocí krycí přímky hrany CV její průsečík s rovinou ψ, bude vhodné ***sestrojit průsečík přímky k*** (tj. kolmice k rovině podstavy) ***a roviny ψ a poté využít kolineaci*** (která se však zde již využije jen pro konstrukci průsečíku hrany CV s rovinou ψ). Například v nárysu tedy ***vytvoříme krycí přímku*** j_2 k přímce k_2, která bude náležet rovině ψ a pomocí ní ***sestrojíme půdorys průsečíku R přímky k s rovinou ψ***. Sestrojíme i jeho nárys R_2. Nyní ***pomocí kolineace se středem V a osou r sestrojíme průsečík hrany CV s rovinou ψ*** (pokud se podíváme, kam směřuje rovina a kde protla průsečnice r podstavu jehlanu, zjistíme, že musí protnout tuto hranu a hranu AV již neprotne). Tedy v půdorysu provedeme tyto kroky: bod T_1 roviny β se zobrazí na bod R_1 roviny ψ, tedy spojíme R_1 a průsečík r_1 s přímkou T_1C_1 a tato spojnice protne hranu V_1C_1 v bodě řezu. Stejným postupem získáme i bod řezu na hraně V_2C_2.

4) ***Viditelnost řezu*** se jednoduše určí pomocí viditelnosti hran, se kterými se protíná (resp. pomocí viditelnosti stěn, ve kterých leží) – všechny hrany stěny ACV jsou v půdorysu vidět, tedy i průsečnice v této stěně bude vidět; jelikož hrana BC v půdorysu není vidět, nebudou ani strany trojúhelníku řezu protínající tuto hranu vidět; v nárysu určíme viditelnost stejně.



Obr. 3.1.5 a)



Obr. 3.1.5 b)

Příklad 3.2.1:

Sestrojte řez rotačního válce, který má podstavu v půdorysně a který je dán středem podstavy $S = [-4; 5; 0]$, jejím poloměrem $r = 4$ cm a výškou $v = 15$ cm. Válec umístěte tak, aby všechny jeho body měly nezápornou z-ovou souřadnici. Rovina řezu je $\gamma = (-5; -3; 4)$. (obr. 3.2.1)

Řešení:

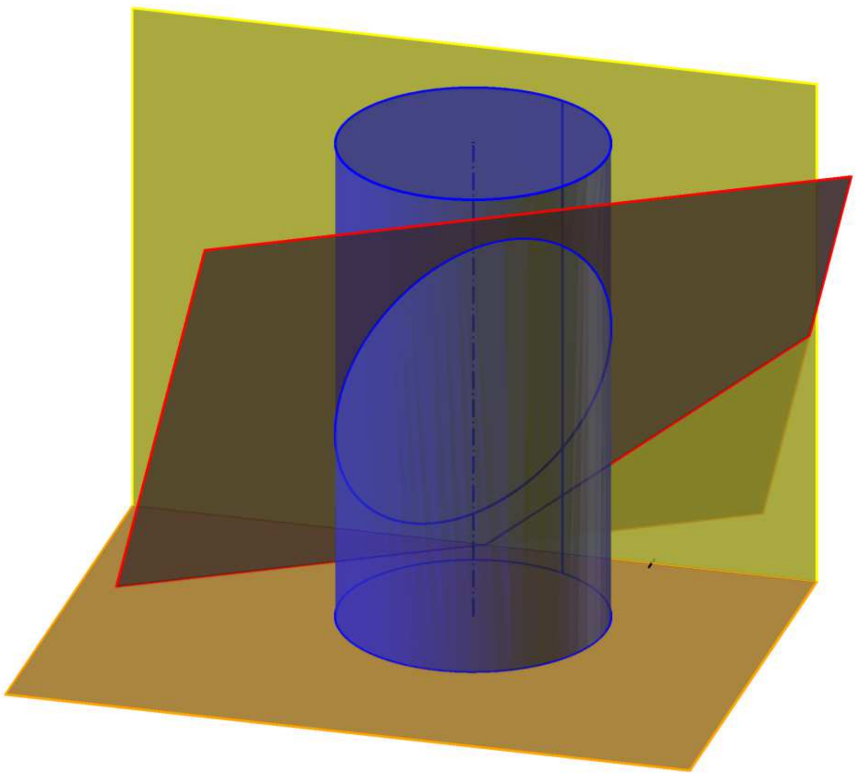
Nejprve sestrojme zadání, tj. S_1, S_2, p_1^γ a n_2^γ.

1) ***Jelikož má válec podstavu v půdorysně, zobrazí se tato podstava ve skutečné velikosti***. Narýsujeme tedy kružnici se středem v bodě S_1 a s poloměrem 4 cm. ***Nárys této kružnice*** (jelikož kružnice leží v rovině kolmé k nárysně) ***bude úsečka*** A_2B_2 o délce 8 cm, jejíž střed bude bod S_2 (body A_1 a B_1 odpovídají krajním bodům průměru půdorysu koule, který je rovnoběžný se základnicí (*pozn.*: je to proto, že tyto body jsou při pohledu „zepředu nejvíce vlevo a vpravo" a zobrazí se tedy opět na krajní body nárysu). ***Osa válce je kolmá k půdorysně, což znamená, že*** $\boldsymbol{o_1}$ ***splývá s bodem*** $\boldsymbol{S_1}$, $\boldsymbol{o_2}$ ***bude kolmá k základnici a bude procházet bodem*** $\boldsymbol{S_2}$. Vzhledem ke speciální poloze osy (resp. celého válce) se výška nezkreslí, tzn. na ose o_2 sestrojíme bod S'_2, který je od bodu S_2 vzdálen 15 cm. ***Nyní můžeme narýsovat obrys válce*** – horní podstava bude opět úsečka délky 8 cm a površky válce tvořící část obrysu budou úsečky kolmé k půdorysně, které spojují odpovídající koncové body úseček nárysů podstav. ***Obrysem půdorysu válce je již sestrojená kružnice*** se středem v bodě S_1, neboť celý povrch i kružnice (resp. „hrana") horní podstavy se zobrazí na kružnici spodní podstavy.

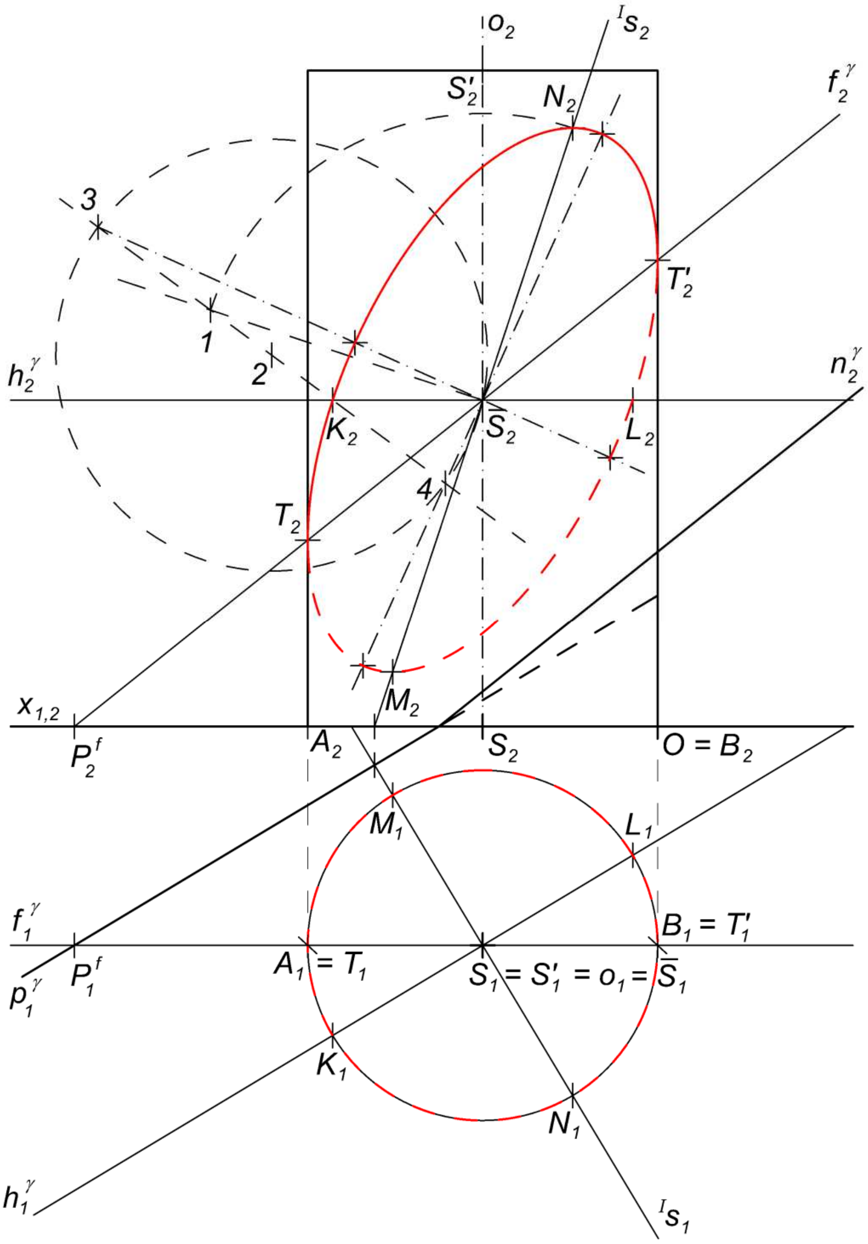
2) Dále budeme uvažovat jen povrch válce. ***Sestrojíme řez touto válcovou plochou***, přičemž půdorysem řezu bude opět kružnice podstavy (neboť rovina žádnou z podstav neprotíná). Řezem bude elipsa, neboť rovina řezu je různoběžná s osou válce a není k ní kolmá (viz Quételetova-Dandelinova věta např. v [4], str. 263). Hlavní osa elipsy leží v rovině, která obsahuje osu válce a která je kolmá ke stopě roviny γ (neboť elipsa řezu je podle ní symetrická). Pomocí např. frontální přímky roviny γ, procházející bodem $\bar{S}_1$, který je totožný v půdorysu s S_1, sestrojíme na ose o_2 bod $\bar{S}_2$. (*Pozn.*: Hlavní osa elipsy řezu ve skutečnosti leží na spádové přímce a vedlejší osa na horizontální přímce procházející bodem $\bar{S}$.) Abychom sestrojili elipsu v nárysu, musíme najít dva její sdružené průměry. Víme, že půdorys vedlejší osy elipsy řezu leží na horizontální přímce jdoucí bodem $\bar{S}_1$, tedy sestrojme její nárys a vedlejší vrcholy K_2 a L_2. Půdorys hlavní osy elipsy řezu musí být na spádové přímce s_1, kolmé k p_1^γ. Sestrojme její nárys a odpovídající vrcholy M_2 a N_2. Máme tedy sdružené průměry K_2L_2 a M_2N_2 a pomocí **Rytzovy konstrukce** sestrojíme hlavní a vedlejší vrcholy nárysu

eliptického řezu. Konstrukce probíhá takto: na jeden z průměrů (vyberme např. ten větší) sestrojíme ze středu elipsy kolmici, kam naneseme velikost poloviny tohoto průměru (takto získáme bod 1); střed úsečky $K_2 1$ je bod 2; nyní sestrojíme kružnici se středem v bodě 2 a poloměrem $|2\bar{S}_2|$, která protne přímku $K_2 1$ v bodech 3 a 4; spojnice bodu 3 se středem elipsy je hlavní osa a spojnice bodu 4 se středem elipsy je vedlejší osa; hlavní osa prochází menším z úhlů sevřených přímkami $K_2 L_2$ a $M_2 N_2$; velikost hlavní poloosy je rovna $|K_2 3|$ (resp. $|41|$) a velikost vedlejší poloosy je rovna $|K_2 4|$ (resp. $|13|$). Dále víme, že frontální přímka leží v rovině, která obsahuje površky válcové plochy, které prochází body A a B. Nárysy těchto površek jsou částí obrysu plochy a jsou také řezem válcové plochy rovinou, která prochází osou a je rovnoběžná s nárysnou. To znamená, že přímka f^γ protne válcovou plochu v bodech T a T', které v půdorysně leží na kružnici obrysu. Jejich nárysy jsou pak opět body obrysu řezu, které jsou „nejvíce vpravo“ a „nejvíce vlevo“ na průmětu elipsy, tzn. ***body dotyku elipsy nárysu řezu a přímek $\boldsymbol{A_2 T'_2}$ a $\boldsymbol{B_2 T_2}$.***

3) ***Viditelnost řezu*** se určí snadno např. pomocí polohy bodu K, podobně jako v předchozích příkladech.



Obr. 3.2.1 a)



Obr. 3.2.1 b)

Příklad 3.2.2:

Sestrojte řez rotačního kuželu, který má podstavu v půdorysně a je dán středem podstavy $S = [2; 6; 0]$, jejím poloměrem $r = 5$ cm a výškou $v = 13$ cm, kužel umístěte tak, aby jeho vrchol V měl větší z-ovou souřadnici než bod S. Rovina řezu je $\lambda = (-9; 12; 6)$. (obr. 3.2.2)

Řešení:

Nejprve si opět narýsujeme zadání – S_1, S_2, p_1^λ a n_2^λ. Dále budeme postupovat obdobně jako v předchozím příkladu:

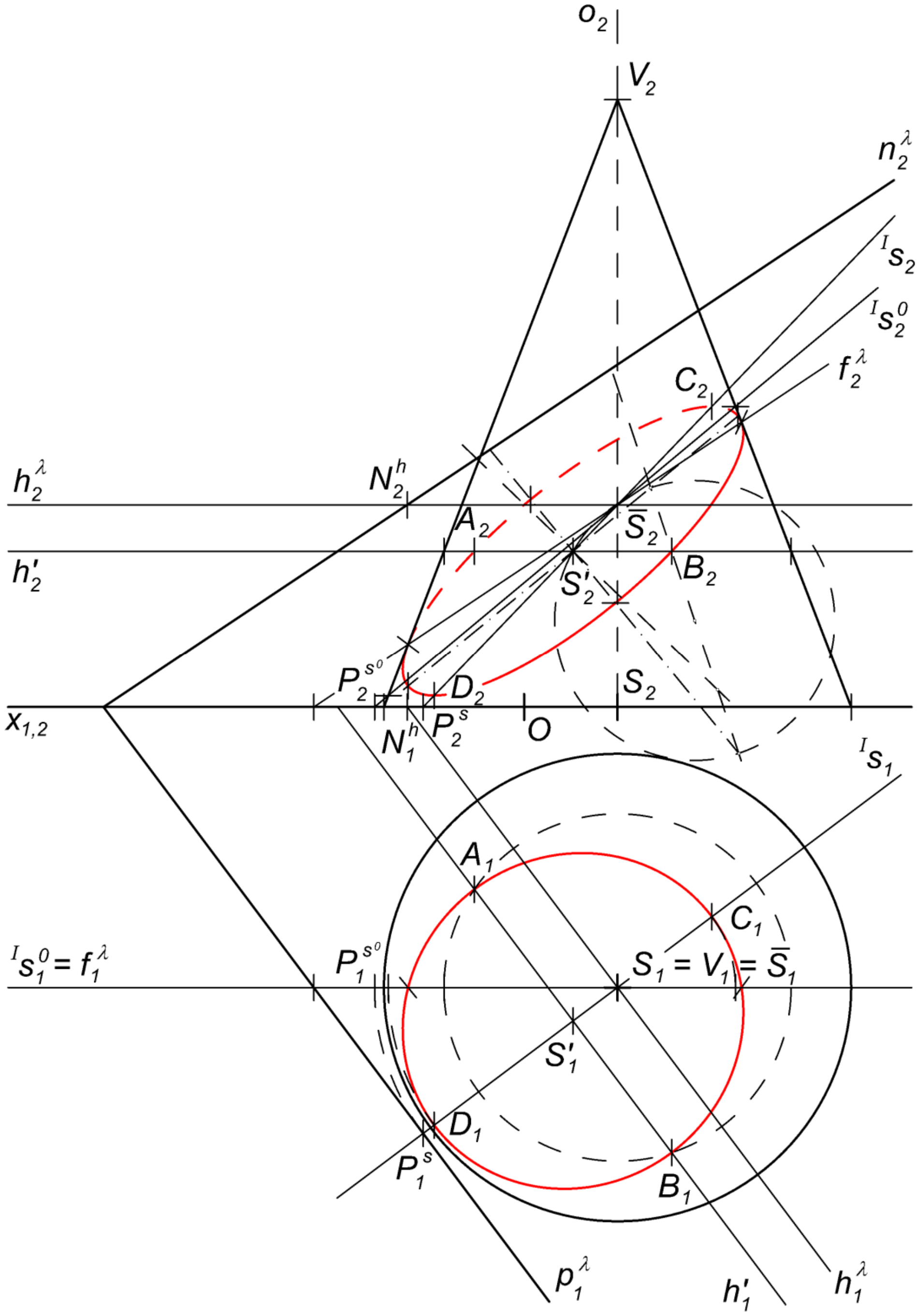
1) ***Půdorysem kuželu bude kruh***, který bude mít střed v bodě S_1 a poloměr $r = 5$ cm. Jelikož je osa válce kolmá k půdorysně, zobrazí se v půdorysu do bodu S_1, tj. $S_1 = o_1$, navíc bude i $S_1 = V_1$. V nárysu bude tedy průmětem podstavy úsečka o délce 10 cm a její střed bude bod S_2. Dále bude $o_2 \perp x_{1,2}$ a vrchol V_2 bude ležet na o_2 ve vzdálenosti 13 cm od S_2 (neboť je osa rovnoběžná s nárysnou). ***Nárys kuželu je tedy trojúhelník***.

2) ***Nyní sestrojíme řez kuželu***. Využijeme zde kolineaci mezi rovinou podstavy (tj. půdorysnou) a rovinou řezu – řez bude v kolineaci odpovídat podstavě. Osa kolineace bude průsečnice rovin, tedy stopa p_1^λ a střed kolineace je bod V. Nejprve sestrojíme jeden bod a jeho obraz v kolineaci. Využijme průsečíku $\bar{S}$ osy kužele s rovinou řezu: $\bar{S}_1 = S_1$ a např. $\bar{S}_1 \in h_1^\lambda$. Tedy pomocí zvolené horizontální přímky (nebo i libovolné jiné přímky z roviny λ, jejíž půdorys prochází bodem S_1) najdeme na o_2 jeho nárys. Také budeme potřebovat spádovou přímku roviny λ, procházející bodem $\bar{S}$, která bude osou symetrie řezu.

   Řezem kuželu může být přímka, dvě různoběžky, bod nebo libovolná kuželosečka – bod bude řezem rovinou, která prochází vrcholem kuželu a neprotíná podstavu (ani se jí nedotýká); přímka (resp. dvě přímky) je řezem rovinou, která prochází vrcholem a dotýká se (resp. protíná) podstavy kuželu; kuželosečka je řezem v ostatních případech. Typ kuželosečky lze určit pomocí polohy pomocné roviny, která je rovnoběžná s rovinou řezu a prochází vrcholem kuželu – neprotíná-li tato rovina kužel, bude řezem elipsa; je-li tato rovina tečnou rovinou kuželu, bude řezem parabola; ve zbylých případech bude řezem hyperbola (podrobněji viz [4], str. 272).

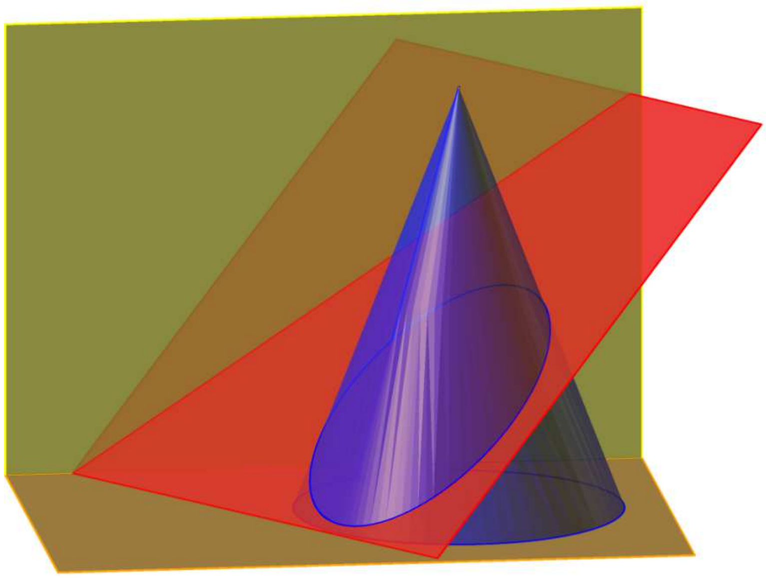
   V tomto příkladu ***bude řezem elipsa*** (*pozn.*: snadno můžeme zjistit pomocí vrcholové roviny, která pro přehlednost není uvedena). ***Hlavní osa elipsy bude ležet na spádové přímce*** ${}^I s$. Abychom dokázali sestrojit její průsečíky s kuželem, musíme si spádovou přímku otočit (kolem osy kuželu) do roviny rovnoběžné s nárysnou, kde pak bude přímka ${}^I s_2$ protínat nárysný obrys kuželu v hledaných bodech (můžeme si to představit tak, že uděláme řez kuželu půdorysně promítací rovinou přímky ${}^I s$ a ten otočíme kolem osy kuželu do pozice rovnoběžné s nárysnou), tj. získáme přímku ${}^I s_1^0$. Přímku i s jejím stopníkem otočíme v půdorysu kolem bodu S_1 a sestrojíme její nárys ${}^{I}s_2^0$ – prochází bodem $P_2^{s^I}$ a bodem $\bar{S}_2$. Její průsečíky s nárysným obrysem kuželu jsou otočené hledané body. Najdeme tedy půdorysy těchto bodů na přímce ${}^{I}s_1^0$ a ty otočíme kolem bodu $\bar{S}_1$ na přímku ${}^{I}s_1$. Máme tak body C_1 a D_1, které jsou vedlejšími vrcholy elipsy půdorysu řezu, a najdeme jejich nárysy (buď pomocí ordinál, nebo pomocí kružnic na povrchu kuželu, které se zobrazí jako úsečky procházející průsečíky ${}^{I}s_1^0$ a nárysného obrysu kuželu). Dále ***potřebujeme sestrojit hlavní osu elipsy***. Ta musí procházet středem úsečky C_1D_1 a musí ležet na horizontální přímce. Sestrojme tedy střed S'_1 této úsečky a jím procházející horizontální přímku h'_1 a jejich nárysy. Průsečíky h' s kuželem sestrojíme díky tomu, že musí ležet v hlavní rovině, která prochází bodem S', a na kružnici řezu kuželu touto rovinou. Tato kružnice se v nárysu zobrazí jako úsečka, která leží na přímce h'_2 a její koncové body jsou průsečíky h'_2 s nárysným obrysem kuželu. Najděme tedy půdorysy těchto bodů na přímce ${}^{I}s_1^0$ (což je vlastně půdorys roviny, která je rovnoběžná s nárysnou a prochází osou kuželu – nárys jejího řezu kuželem je totožný s nárysem kuželu). Tyto body leží na kružnici onoho řezu, jejíž půdorys je kružnice se středem v bodě S_1. Tato kružnice protíná přímku h'_1 ve vrcholech elipsy, tj. v bodech A_1 a B_1. Najděme nárysy bodů A a B a sestrojme v půdorysu elipsu řezu. V nárysu jsou průměry A_2B_2 a C_2D_2 sdružené průměry elipsy nárysu řezu. Využijme tedy Rytzovu konstrukci (viz *Příklad 3.2.1*) a sestrojme její hlavní a vedlejší vrcholy a vyrýsujme elipsu.

3) ***Určení viditelnosti*** v půdorysu je snadné, neboť zde bude celý řez viditelný. V nárysu pak musíme najít body dotyku obrysu a elipsy, ve kterých se bude viditelnost měnit. V půdorysu to jsou průsečíky elipsy a přímky ${}^{I}s_1^0$, přesněji jsou to průsečíky površek kuželu, které leží v rovině rovnoběžné s nárysnou, procházející osou kuželu, a roviny řezu λ. Pomocí průsečíků frontální přímky roviny λ (ta je v půdorysu shodná s průmětem roviny procházející osou kuželu) a nárysného obrysu kuželu tak snadno sestrojíme body průniku elipsy a přímky ${}^{I}s_1^0$. Viditelnost jednotlivých částí elipsy určíme např. pomocí viditelnosti bodu A.



o_2
V_2
n_2^λ
${}^I s_2$
${}^I s_2^0$
f_2^λ
C_2
h_2^λ
N_2^h
A_2
$\bar{S}_2$
h_2'
S_2'
B_2
$P_2^{s^0}$
D_2
S_2
$x_{1,2}$
N_1^h
P_2^s
O
${}^I s_1$
A_1
C_1
${}^I s_1^0 = f_1^\lambda$
$P_1^{s^0}$
$S_1 = V_1 = \bar{S}_1$
S_1'
D_1
P_1^s
B_1
p_1^λ
h_1'
h_1^λ

Obr. 3.2.2 a)



Obr. 3.2.2 b)

Příklad 3.2.3:

Sestrojte řez rotačního kuželu, který má podstavu v půdorysně a je dán středem podstavy $S = [0; 6; 0]$, jejím poloměrem $r = 4$ cm a výškou $v = 12$ cm. Kužel umístěte tak, aby jeho vrchol V měl kladnou z-ovou souřadnici. Rovinu řezu φ proložte bodem $R = [4; 4; 14]$ kolmo k nárysně tak, aby řezem kuželu byla část paraboly. Dále sestrojte skutečnou velikost parabolického řezu. (obr. 3.2.3)

Řešení:

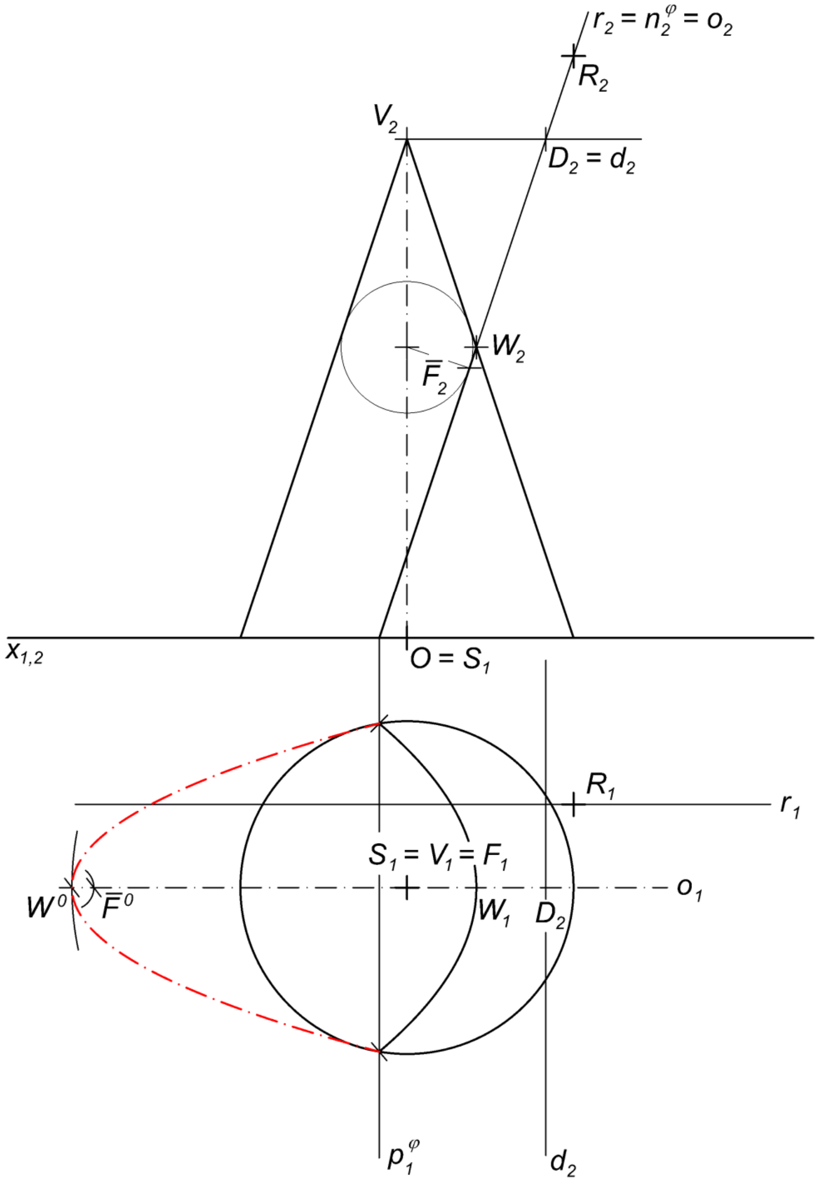
Nejprve si narýsujeme zadání – S_1, S_2, R_1 a R_2. Dále sestrojíme průměty kuželu (viz *Příklad 3.2.2*). Rovinu řezu a řez sestrojíme takto:

1) ***Aby byla řezem část paraboly, musí být rovina rovnoběžná s právě jednou povrchovou přímkou kuželu.*** Navíc má být kolmá k nárysně. To znamená, že její půdorysná stopa bude kolmá k základnici a její nárysná stopa bude procházet nárysem bodu R. (*Pozn.*: Můžeme si představit, že rovinu φ posuneme do vrcholu kuželu a chceme, aby se kuželu dotýkala v površce, rovinu pak posuneme zpět do původního bodu R.) Sestrojíme tedy pomocnou rovinu, jejíž půdorysná stopa bude kolmá na základnici a nárysná stopa (vzhledem k poloze roviny) bude splývat s obrysovou površkou kuželu. Takové roviny jsou však dvě (jsou totiž dvě obrysové površky). Hledaná rovina bude s jednou z nich rovnoběžná (tj. bude rovnoběžná též s danou obrysovou površkou) a bude procházet daným bodem R. Volme nárysnou stopu roviny φ rovnoběžnou s levou obrysovou površkou kuželu

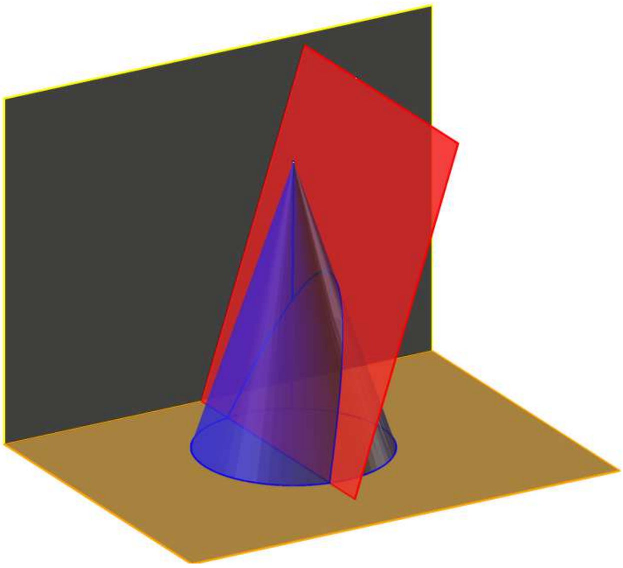
(neboť pro tu druhou površku by rovina neprotla kužel) a dorýsujme stopy roviny φ.

2) ***Řez kuželu*** musí být symetrický podle roviny kolmé k rovině φ, která je také rovinou symetrie kuželu, tj. musí procházet osou kuželu. To znamená, že osa o paraboly řezu bude procházet v půdorysu bodem V_1, který splývá s průmětem osy kuželu, a bude kolmá k p_1^{φ}. Víme, že nárysem řezu bude úsečka (resp. polopřímka, pokud bychom uvažovali kuželovou plochu), přičemž vrchol paraboly W_2 je průsečík obrysu kuželu a přímky r_2. Sestrojme bod W_1, který bude vrcholem půdorysu paraboly. Ohniskem paraboly v půdorysu bude (dle Quételetovy-Dandelinovy věty – např. [6], str. 189) bod V_1, tj. $V_1 = F_1$. Názorný obrázek (s popisem) můžeme najít v [4], na obrázku na str. 278. Řídicí přímka d paraboly je průsečnice roviny φ a vrcholové roviny kuželu, která je kolmá k jeho ose. Tedy v nárysu sestrojme přímku rovnoběžnou s $x_{1,2}$, procházející bodem V_2, která protne přímku r_2 v bodě D_2, který splývá s nárysem přímky d. Na přímce o_1 sestrojme půdorys bodu D a sestrojme také řídicí přímku d_1 paraboly v půdorysu. Parabola řezu musí procházet body na průsečnici roviny φ a roviny podstavy kuželu, tj. body průniku kružnice podstavy kuželu a p_1^{φ} jsou body paraboly v půdorysně. Nyní máme v půdorysu vrchol, ohnisko, řídicí přímku a dva body paraboly, takže můžeme parabolu sestrojit. Nárys paraboly řezu bude část přímky r_2 mezi bodem W_2 a $x_{1,2}$.

3) ***Skutečnou velikost paraboly řezu sestrojíme pomocí otočení roviny $\boldsymbol{\varphi}$ do půdorysny a s využitím Quételetovy-Dandelinovy věty*** (viz např. [4], str. 272). Osa otočené paraboly splývá s o_1, vrchol leží na této přímce ve vzdálenosti rovné velikosti úsečky nárysu paraboly od průsečíku o_1 a p_1^{φ}. Pomocí Quételetovy-Dandelinovy věty sestrojíme v nárysu ohnisko $\bar{F}_2$ paraboly řezu (té skutečné paraboly, nikoliv průmětu). Pomocí vzdálenosti $|\bar{F}_2 W_2|$ sestrojíme bod $\bar{F}^0$. Nyní již můžeme sestrojit skutečnou velikost paraboly řezu kuželu.



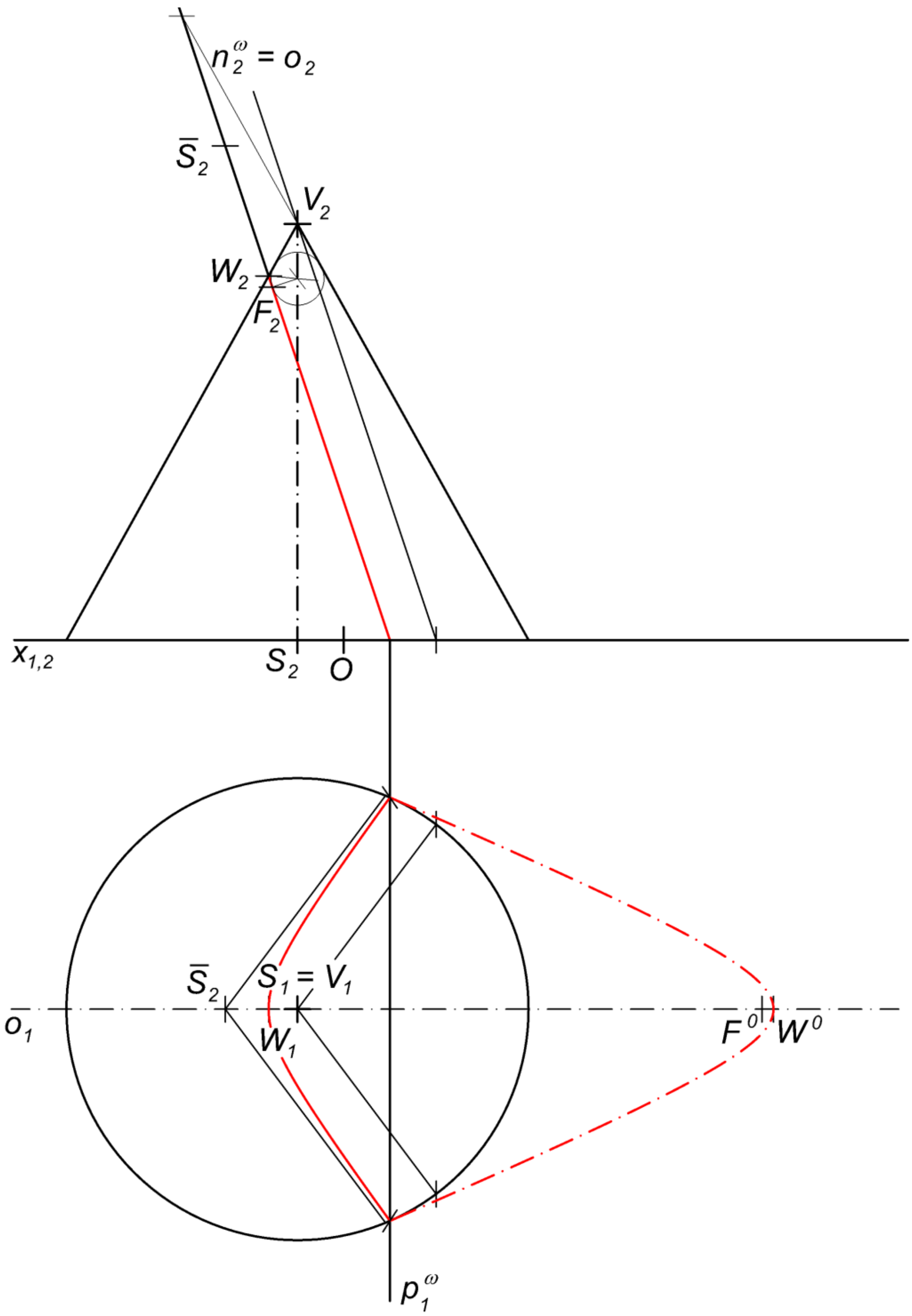
Obr. 3.2.3 a)



Obr. 3.2.3 b)

Příklad 3.2.4:

Sestrojte řez rotačního kuželu, který má podstavu v půdorysně a je dán výškou $v = 9$ cm, středem podstavy $S = [-1; 8; 0]$ a jejím poloměrem $r = 5$ cm. Kužel umístěte tak, aby jeho vrchol V měl kladnou z-ovou souřadnici. Rovina řezu je $\omega = (1; \infty; 3)$. Také sestrojte skutečnou velikost řezu. (obr. 3.2.4)

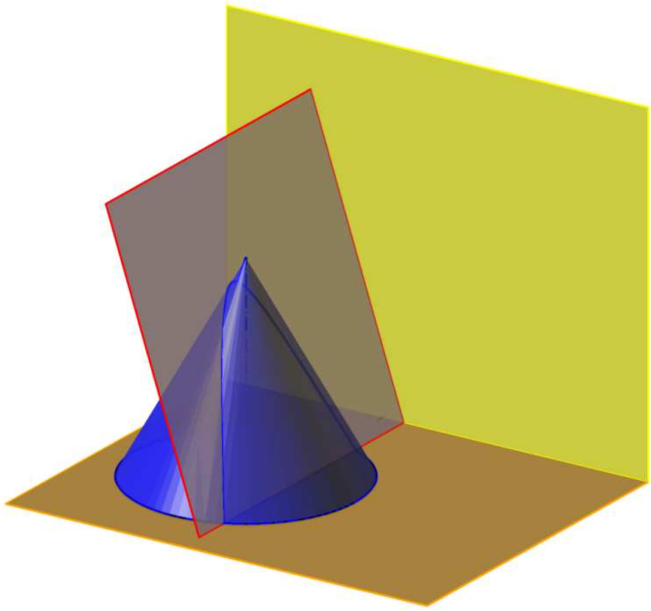


Obr. 3.2.4 a)

Řešení:

Nejprve si opět narýsujeme zadání – S_1, S_2, p_1^ω a n_2^ω. Průměty kuželu sestrojíme jako v *Příkladu 3.2.2*.

1) ***Jelikož je rovina řezu kolmá na nárysnu, snadno určíme, že řezem bude hyperbola*** (jelikož úhel mezi nárysem osy a roviny je menší, než mezi osou a površkou kuželu). Hlavní osa o hyperboly bude kolmá na p_1^ω a v půdorysu bude procházet vrcholem kuželu a v nárysu bude splývat se stopou roviny. Abychom dokázali sestrojit asymptoty hyperboly, „posuneme“ rovinu ω do vrcholu kuželu. Řezem kuželu touto rovinou budou dvě površky, které jsou rovnoběžné s asymptotami hyperbolického řezu. Sestrojme průměty těchto površek (resp. řezu). Abychom mohli sestrojit asymptoty v půdorysu, potřebujeme ještě střed hyperboly. Ten sestrojíme jako střed úsečky, jejíž krajní body jsou vrcholy hyperboly. Jelikož budeme sestrojovat jen jednu větev hyperboly, z nárysu snadno určíme její vrchol W, jako průsečík osy o a povrchu kuželu. Nyní již sestrojme průměty středu hyperboly (v nárysu najdeme střed úsečky s krajním bodem W a vrcholem druhé větve hyperboly, což je průsečík n_2^ω s prodlouženou obrysovou površkou kuželu) a jím procházející asymptoty, které jsou v půdorysu rovnoběžné s již sestrojenými površkami kuželu. Hyperbola bude v půdorysu samozřejmě procházet průsečíky podstavné kružnice kuželu a p_1^ω. Nyní jen určíme ohnisko – dle Quételetovy-Dandelinovy věty (viz [6], str. 189) je ohniskem hyperboly průmětu průmět vrcholu kuželu. V nárysu se řez zobrazí jako úsečka, která je součástí n_2^ω a je omezená obrysem kuželu.
2) ***Nyní ještě sestrojme skutečnou velikost hyperbolického řezu.*** Jedná se vlastně jen o otočení roviny ω např. do půdorysny (podobně jako v *Příkladu 3.2.3*). Osa o_1 bude splývat s otočenou osou hyperboly. Otočený vrchol W^0 tedy sestrojíme na ose o_1 ve vzdálenosti rovné velikosti úsečky nárysu hyperbolického řezu od osy otáčení, tj. stopy p_1^ω. Ohnisko F sestrojíme pomocí nárysu a Quételetovy-Dandelinovy věty (vepsaná koule se dotýká řezu v ohnisku). Vzdálenost $|F_2W_2|$ je skutečná vzdálenost vrcholu a ohniska hyperbolického řezu. (*Pozn.*: Též by bylo možné otočit asymptoty a pomocí asymptot a vrcholu sestrojit i ohnisko hyperboly.) Nyní již sestrojme skutečnou velikost hyperbolického řezu.



Obr. 3.2.4 b)

Příklad 3.2.5:

Sestrojte řez válce, který je dán středem podstavy $S = [3; y_S; 3]$ a jejím poloměrem $r = 3$ cm, podstava leží v rovině $\omega = (-7; 6; 4)$. Rovina řezu je $\varphi = (-4; 5; 7)$. Výška válce je $v = 6$ cm, válec umístěte tak, aby střed horní podstavy měl větší z-ovou souřadnici než bod S. Nakonec sestrojte skutečnou velikost eliptického řezu. (obr. 3.2.5)

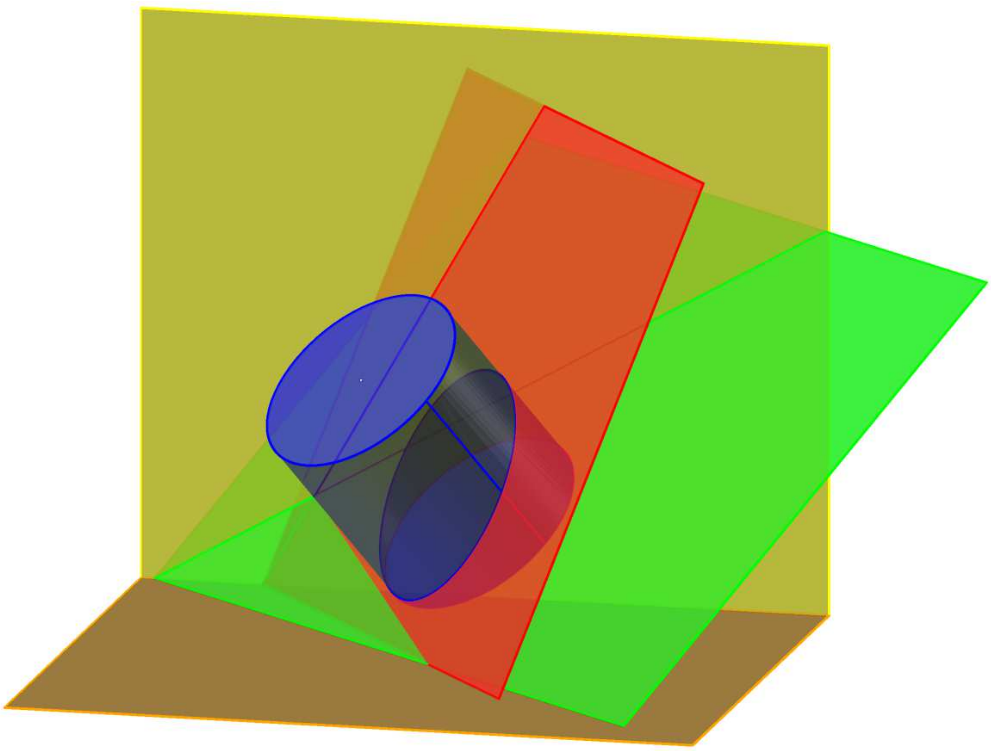
Řešení:

Nejprve si narýsujeme zadání, tj. S_2, p_1^{φ} a n_2^{φ}, p_1^{ω} a n_2^{ω}.

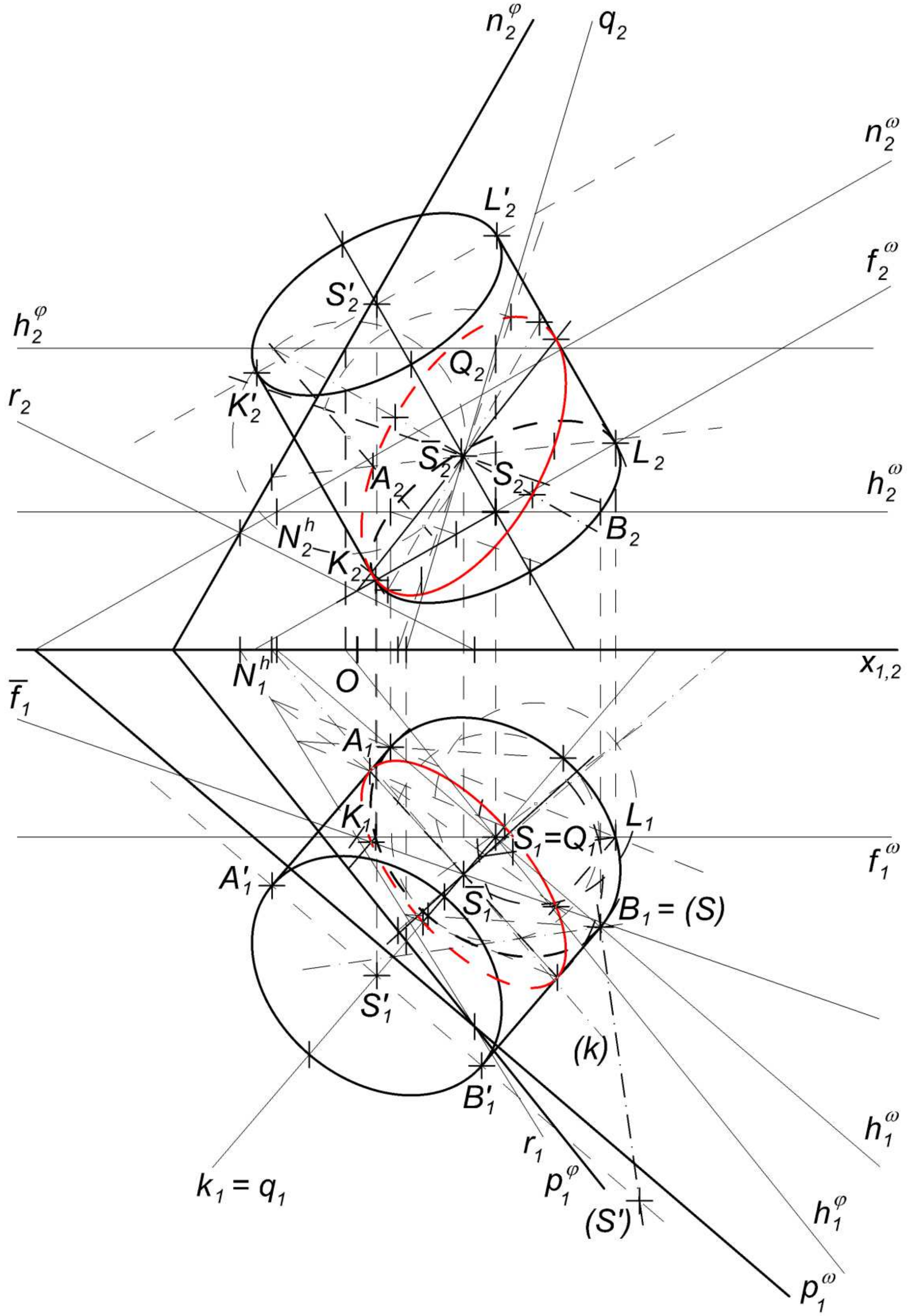
1) ***Podstava válce se zobrazí jako elipsa***, tedy najděme její vrcholy pomocí horizontální a frontální přímky roviny ω a proužkové konstrukce – viz *Příklad 2.2.1*. Dále potřebujeme sestrojit druhou podstavu válce, která bude v průmětech shodná elipsa s odpovídající podstavnou elipsou. Střed druhé podstavy S' bude ležet na kolmici k rovině ω vedené středem S. Abychom mohli sestrojit bod S', musíme na tuto kolmici nanést odpovídající výšku válce, kolmici však musíme nejprve sklopit. Nyní již můžeme sestrojit průmět válce i s viditelností, přičemž v půdorysu nebude viditelná část „spodní“ podstavy, na které leží bod K, a v nárysu nebude vidět část „spodní“ podstavy, na které leží bod A.
2) ***Nyní již sestrojme řez válce, kterým bude elipsa*** (mohla by jím být kružnice, pokud by rovina φ byla kolmá k ose válce; pokud by rovina φ

byla rovnoběžná s osou válce, řezem by mohl být obdélník či případně úsečka). Při konstrukci řezu budeme využívat osovou afinitu mezi rovinou φ a rovinou ω, kdy směr je dán osou válce a osa afinity je průsečnice těchto rovin. Sestrojme tedy nejprve průsečík osy válce s rovinou φ a to pomocí krycí přímky q, pro níž platí: $k_1 = q_1$, $k \cap q = \{\bar{S}\}$. Jelikož nemáme k dispozici její nárysný stopník, využijme např. horizontální přímky, která prochází jejím bodem Q, přičemž $Q_1 = S_1$. Ještě sestrojme průsečnici r rovin φ a ω. Nyní již máme osu afinity, směr a pár odpovídajících si bodů S a $\bar{S}$, tedy můžeme v půdorysu sestrojit z hlavních os elipsy sdružené průměry elipsy řezu. Půdorys elipsy řezu ze sdružených průměrů snadno sestrojíme pomocí Rytzovy konstrukce – viz *Příklad 3.2.1*. Hlavní osy elipsy řezu v půdorysu odpovídají v nárysu sdruženým průměrům nárysné elipsy řezu. Sestrojme je tedy a opět pomocí Rytzovy konstrukce narýsujme i danou elipsu, nebo postupujme stejně jako v půdorysu. Viditelnost těchto elips odpovídá viditelnosti podstavy válce.

3) Abychom zjistili, ***kde se elipsa dotýká obrysu válce***, ***využijeme opět afinitu***. V půdorysu je situace jasná – body dotyku jsou body odpovídající v afinitě bodům A a B. V nárysu ještě budeme muset sestrojit přímku, která v afinitě odpovídá průměru K_2L_2, tedy využijeme již sestrojený bod $\bar{S}_2$.



Obr 3.2.5 a)



Obr. 3.2.5 b)

Příklad 3.2.6:

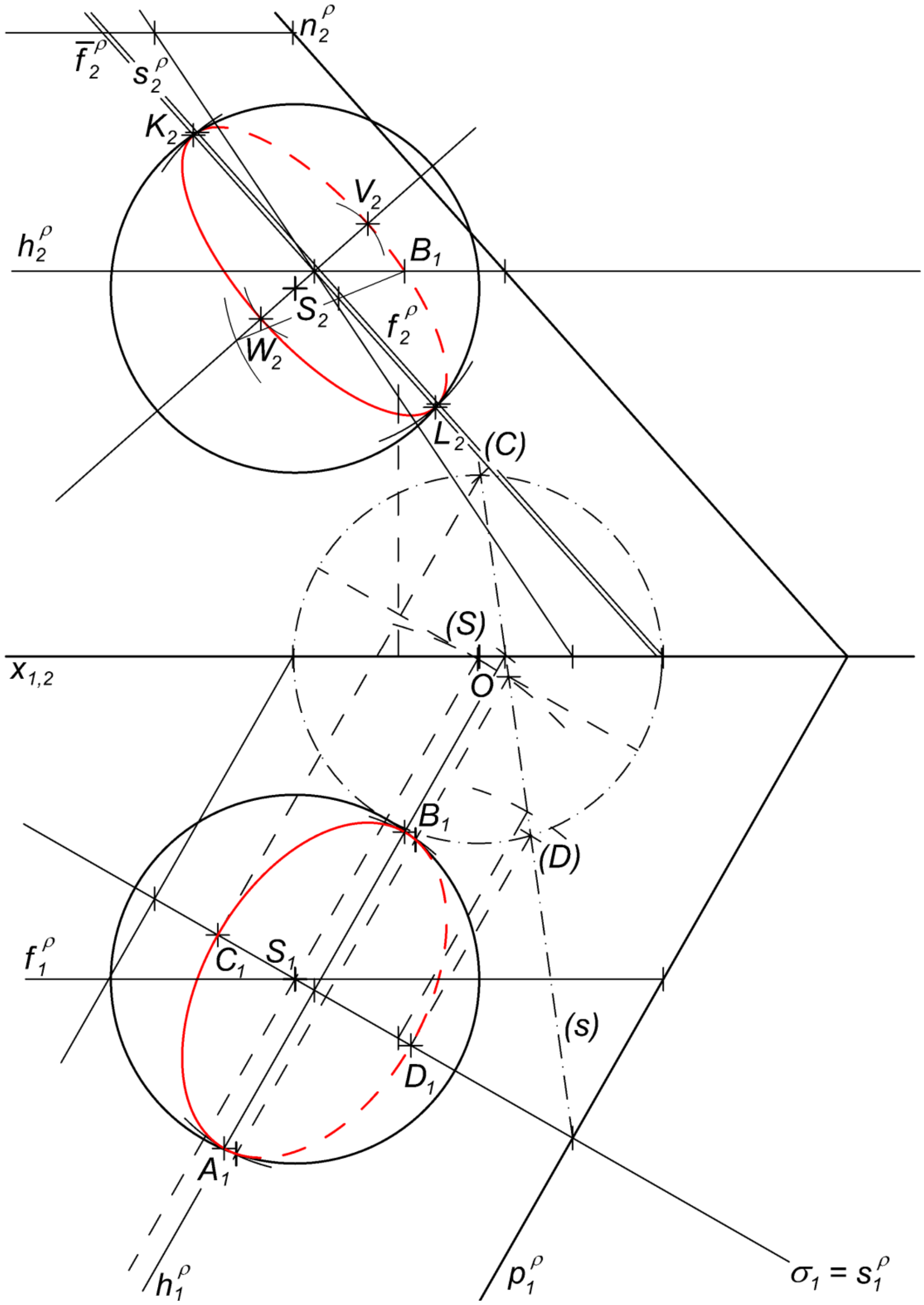
Zobrazte řez kulové plochy, jejíž střed je $S = [-4; 7; 8]$ a poloměr je $r = 4$ cm, rovinou $\rho = (8; 14; 9)$. (obr. 3.2.6)

Řešení:

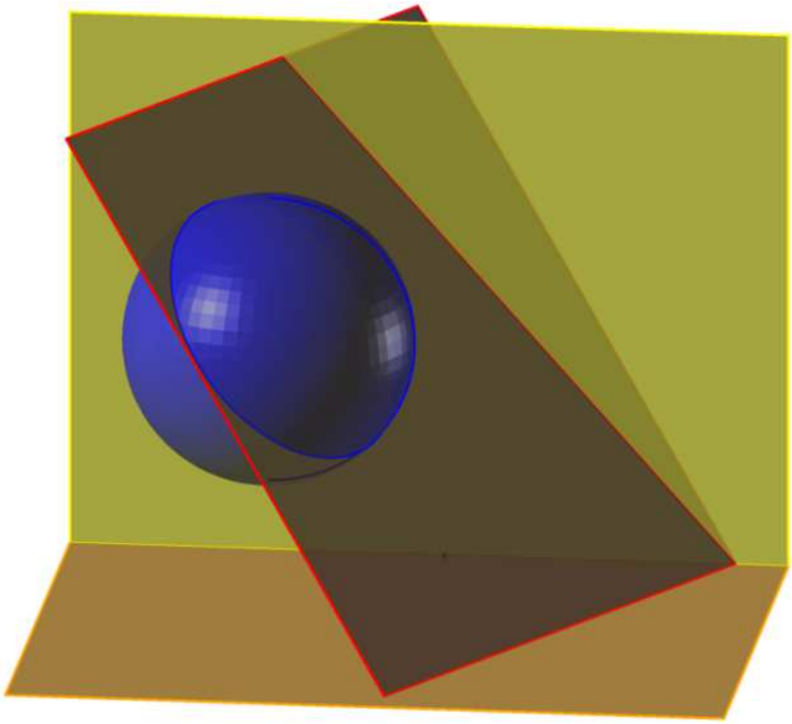
Nejprve narýsujeme zadání a sestrojíme průměty kulové plochy (viz *Příklad 2.2.3*):

1) ***Řezem kulové plochy bude kružnice***, která se zobrazí jako elipsa. Hledáme tedy průměry této elipsy. Víme, že její ***vedlejší průměr leží na průmětu spádové přímky***, která v prvním průmětu prochází středem plochy. Abychom sestrojili i její nárys, vyberme si jeden bod na jejím půdorysu a veďme jím např. horizontální přímku (tedy vybraný bod je průsečík spádové a horizontální přímky). Abychom dokázali sestrojit vrcholy elipsy průmětu řezu, využijme promítací rovinu σ sestrojené spádové přímky, pro níž také platí: $\sigma_1 = s_1^\rho$, $S_1 \in \sigma_1$, střed kružnice řezu také leží v rovině σ. ***Abychom zjistili velikost vedlejší poloosy elipsy průmětu, rovinu $\boldsymbol{\sigma}$ sklopíme*** do půdorysny a s ní i průmět (do této roviny) kulové plochy a spádové přímky. Sestrojme tedy bod (S) a sklopený řez plochy rovinou σ (*pozn.*: nyní jsme sestrojili ***třetí průmět*** kulové plochy a roviny ρ – více o tom viz [4], str. 182, nebo [6], str. 106). Také sklopme přímku s^ρ pomocí jejího stopníku a libovolného zvoleného bodu na ní. ***Průsečíky $(\boldsymbol{s})$ a sklopené kružnice jsou body $(\boldsymbol{C})$ a $(\boldsymbol{D})$***. Najděme k nim odpovídající půdorysy, které jsou již vedlejšími vrcholy elipsy půdorysu řezu. Střed úsečky $(C)(D)$ je střed elipsy, sestrojme i jeho půdorys (resp. střed úsečky C_1D_1). Hlavní osa leží na horizontální přímce jdoucí středem elipsy a její velikost se rovná skutečnému průměru kružnice řezu, tedy vzdálenosti $|(C)(D)|$. Máme tedy vrcholy A_1 a B_1 a sestrojíme elipsu.
2) ***Nárys řezu bude také elipsa, pro jejíž průměry platí***: hlavní průměr K_2L_2 leží na $\bar{f}_2^\rho$ jdoucí průmětem středu kružnice řezu a jeho velikost je rovna $|A_1B_1|$, velikost vedlejší poloosy zjistíme pomocí proužkové konstrukce po sestrojení nárysu např. bodu B. Nyní již můžeme zkonstruovat elipsu nárysu.
3) Ještě ***určeme viditelnost*** částí elips řezu. ***Pro půdorys využijme sklopení roviny $\boldsymbol{\sigma}$*** – viditelná část kulové plochy je její „horní“ polokoule, tedy ve sklopení sestrojme průměr kružnice, který bude kolmý na $(S)S_1$ (což je vlastně třetí průmět rovníku, ve kterém se mění viditelnost). Průsečík tohoto průměru s úsečkou $(C)(D)$ jsou body, ve kterých se mění viditelnost řezu (resp. ve kterých řez protíná rovník). Sestrojme i jejich první průměty na obrysu kulové plochy (tzn. na rovníku). Snadno již určíme, že část elipsy,

ve které je bod D nebude viditelná. ***Viditelnost nárysu určíme pomocí hlavní kružnice*** rovnoběžné s nárysnou (tj. **meridiánu**), který dělí kulovou plochu na „přední" a „zadní" polokouli a ve které se mění viditelnost. Stačí nám však jen průnik roviny obsahující meridián a roviny řezu – tj. přímka f^{ρ}. Tato frontální přímka protíná nárysný obrys kulové plochy v bodech, kde se mění viditelnost (tj. v bodech průniku meridiánu a kružnice řezu). Nyní již snadno určíme viditelnost nárysu řezu např. pomocí viditelnosti bodu B.



Obr. 3.2.6 a)



Obr. 3.2.6 b)

4. Průniky těles

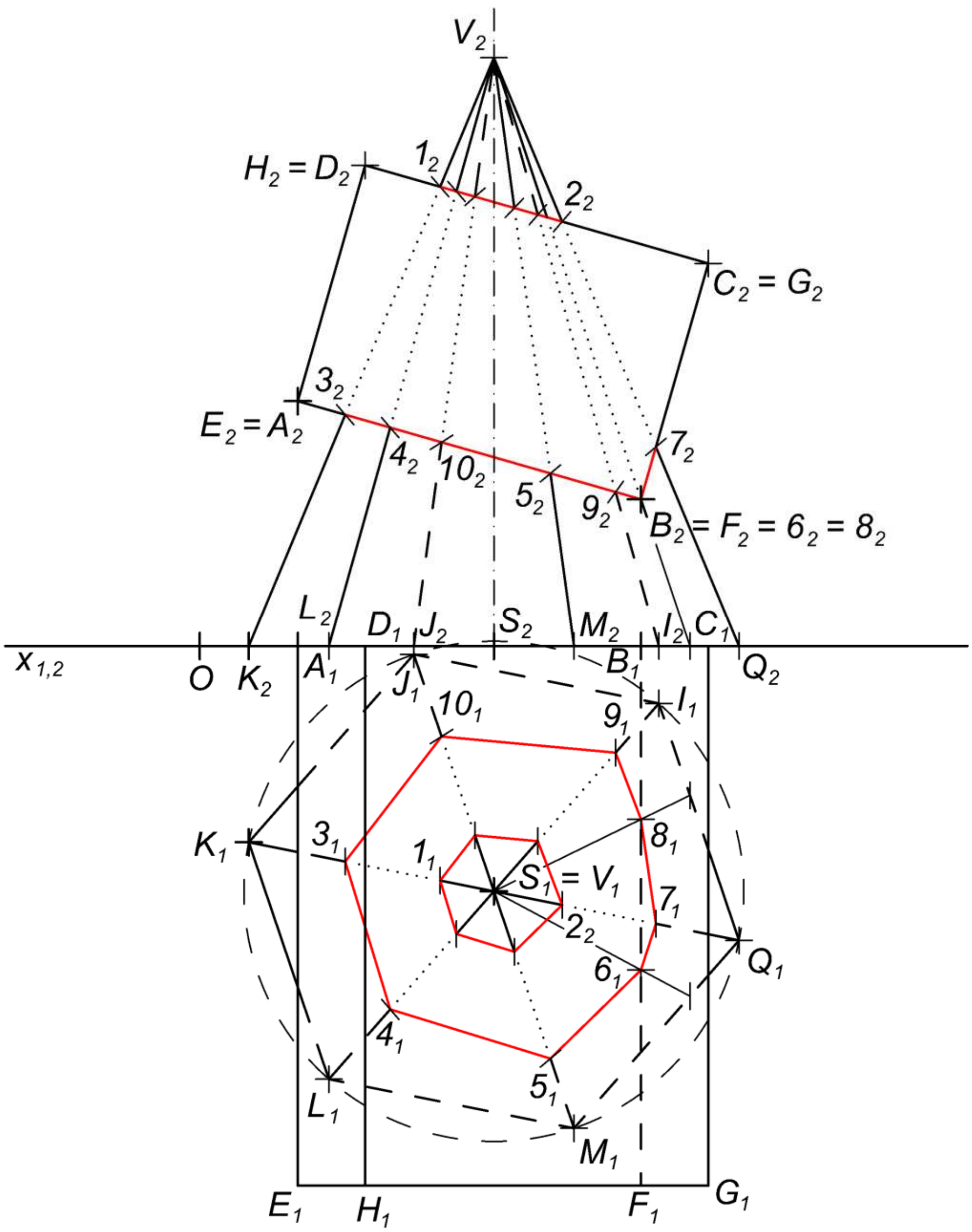
V této kapitole opět nejprve probereme hranatá a později i rotační tělesa, tedy prvně průnik dvou hranatých těles, poté průnik hranatého a rotačního a na závěr průnik dvou rotačních těles.

Dohodněme se na začátku, že budeme pro stručnost v řešení uvažovat jen průnik povrchů těles (tj. výsledkem bude křivka).

Příklady jsou opět děleny podobně jako v předchozích kapitolách: část *4.1* se věnuje průniku dvou hranatých těles, část *4.2* se zabývá průnikem hranatého a rotačního tělesa a část *4.3* průnikem dvou rotačních těles. Ke každému příkladu je opět přidán rys (není ve skutečném měřítku) a prostorový obrázek. Opět krokovaná zadání i prostorové situace (jak ve formátu PNG, tak jako soubor v Rhinoceru) můžete najít na přiloženém CD.

Příklad 4.1.1:

Zobrazte průnik kvádru $ABCDEFGH$ a pravidelného šestibokého jehlanu $IJKLMQV$. Podstava kvádru $ABCD$ leží v nárysně, kdy $A = [2; 0; 5]$ a $B = [9; 0; 3]$ a pro hrany kvádru platí následující: $|BC| = 5$ cm a $|AE| = 11$ cm (kvádr volte tak, aby jeho vrcholky měly kladnou y-ovou souřadnici). Podstava jehlanu $IJKLMQ$ leží v půdorysně a její střed je $S = [6; 5; 0]$, $K = [1; 4; 0]$ a výška jehlanu je 12 cm. (obr. 4.1.1)

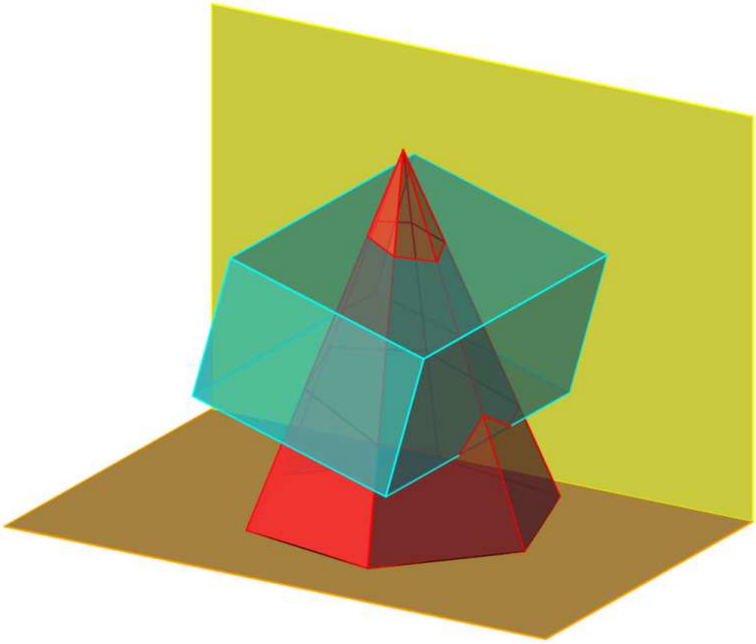


Obr. 4.1.1 a)

Řešení:

Nejprve si narýsujeme průměty kvádru a jehlanu a obvyklým způsobem určíme viditelnost (určeme ji jen vzhledem k samotnému tělesu). **Průnik povrchů těles** může být jedna nebo dvě uzavřené křivky, podle toho, zda je **průnik úplný nebo částečný** (viz např. [4], str. 226) – v tomto případě jsou to dvě křivky. Navíc křivky průniku musí ležet na stěnách (případně i hranách) jednoho a zároveň druhého tělesa, tedy vzhledem k poloze kvádru budou nárysem průniku lomená čára a úsečka. Dále budeme postupovat při určování společných bodů takto:

1) ***Stěna $CDGH$ kvádru protíná vrcholové hrany jehlanu***. V nárysu vidíme body, ve kterých je protíná – hranu VK protíná v bodě 1, hranu VQ v bodě 2 (*pozn.*: další body již nejsou pro přehlednost označeny). Sestrojme jejich půdorysy na odpovídajících půdorysech hran. ***Jelikož leží tato křivka řezu jen v jedné stěně kvádru*** (tj. je to vlastně řez jehlanu stěnou $CDGH$), ***stačí spojit v odpovídajícím pořadí*** (tj. ve stejném jako jsou vrcholy podstavy jehlanu) ***tyto body průniku*** a máme tak sestrojenou jednu část průniku.
2) ***Nyní se podívejme, kde protíná stěna $ABFE$ hrany jehlanu***. Hranu VK protíná v bodě 3, hranu VL v bodě 4 a hranu VM v bodě 5. Sestrojme půdorysy těchto bodů na odpovídajících hranách. Kromě toho, že tato stěna kvádru protíná jehlan, tak také hrana BF protíná stěny jehlanu v bodech 6 a 8 (číslo 7 si nechme rezervované pro průnik s hranou VQ). Pomocí vrcholových přímek, které leží ve stěnách MQV a QIV sestrojíme průsečíky hrany BF se stěnami jehlanu. Nyní ***zbývá sestrojit jen průsečík hrany VQ se stěnou kvádru $BCGF$***, který označme 7. Víme, že průsečík stěny kvádru s hranou VI je bod 9 a průsečík s hranou VJ je bod 10. Teď již můžeme ***spojit v odpovídajícím pořadí*** (např. podle umístění v jednotlivých stěnách jehlanu, resp. hranách jehlanu) ***body $\mathbf{3}$ až $\mathbf{10}$***, které tvoří zbylou část průniku.
3) ***Nárys průniku*** budou tvořit: úsečka $1_2 2_2$ a lomená čára $3_2 B_2 7_2$. Ještě určeme viditelnost průmětů křivek – viditelné části křivek musí ležet ve stěnách, které jsou obě zároveň viditelné. Na závěr ještě vyřešme viditelnost obou těles vhledem k průniku.



Obr. 4.1.1 b)

Příklad 4.1.2:

Zobrazte průnik pravidelného osmibokého hranolu $ABCDEFGHA'B'C'D'E'F'G'H'$ a kvádru $IJKLI'J'K'L'$. Podstava hranolu leží v bokorysně, kdy $A = [0; 6; 3]$ a její střed je $S = [0; 7; 8]$, výška hranolu je 15 cm (hranol volte tak, aby jeho vrcholy měly nezápornou x-ovou souřadnici). Podstava kvádru $IJKL$ leží v půdorysně, $I = [3; 7; 0]$, $J = [5; 3; 0]$, $|JK| = 9$ cm a výška je 14 cm. (obr. 4.1.2)

Řešení:

Nejprve si narýsujeme průměty kvádru a hranolu, kde využijeme bokorysny k určení bodů B, C, D, E, F, G a H.

1) ***Bokorysnu sklopíme např. do nárysny*** takto: body se otáčejí kolem přímky A_2S_2 a jejich vzdálenost od této osy je rovna jejich y-ové souřadnici. Tedy bod A_3 leží na rovnoběžce se základnicí ve vzdálenosti 6 cm od A_2. Stejným způsobem sestrojíme i bod S_3. Nyní snadno sestrojíme osmiúhelník podstavy hranolu. Všechny vrcholy osmiúhelníku „vrátíme" zpět, tj. na přímce A_2S_2 sestrojíme body B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2 a H_2. Jelikož jsou hrany (myšleno hrany $A_2A'_2$ apod.) rovnoběžné s nárysnou, zobrazí se ve skutečné velikosti. Sestrojme tedy celý nárys hranolu. Půdorysy bodů B, C, D, E, F, G a H sestrojíme snadno díky bokorysu – leží na přímce A_1S_1, jejich vzdálenost od počátku je rovna vzdálenosti nárysu bodu od jeho

bokorysu (tj. např. $|OB_1| = |B_2B_3|$). Nyní opět lehce sestrojíme půdorys celého hranolu.

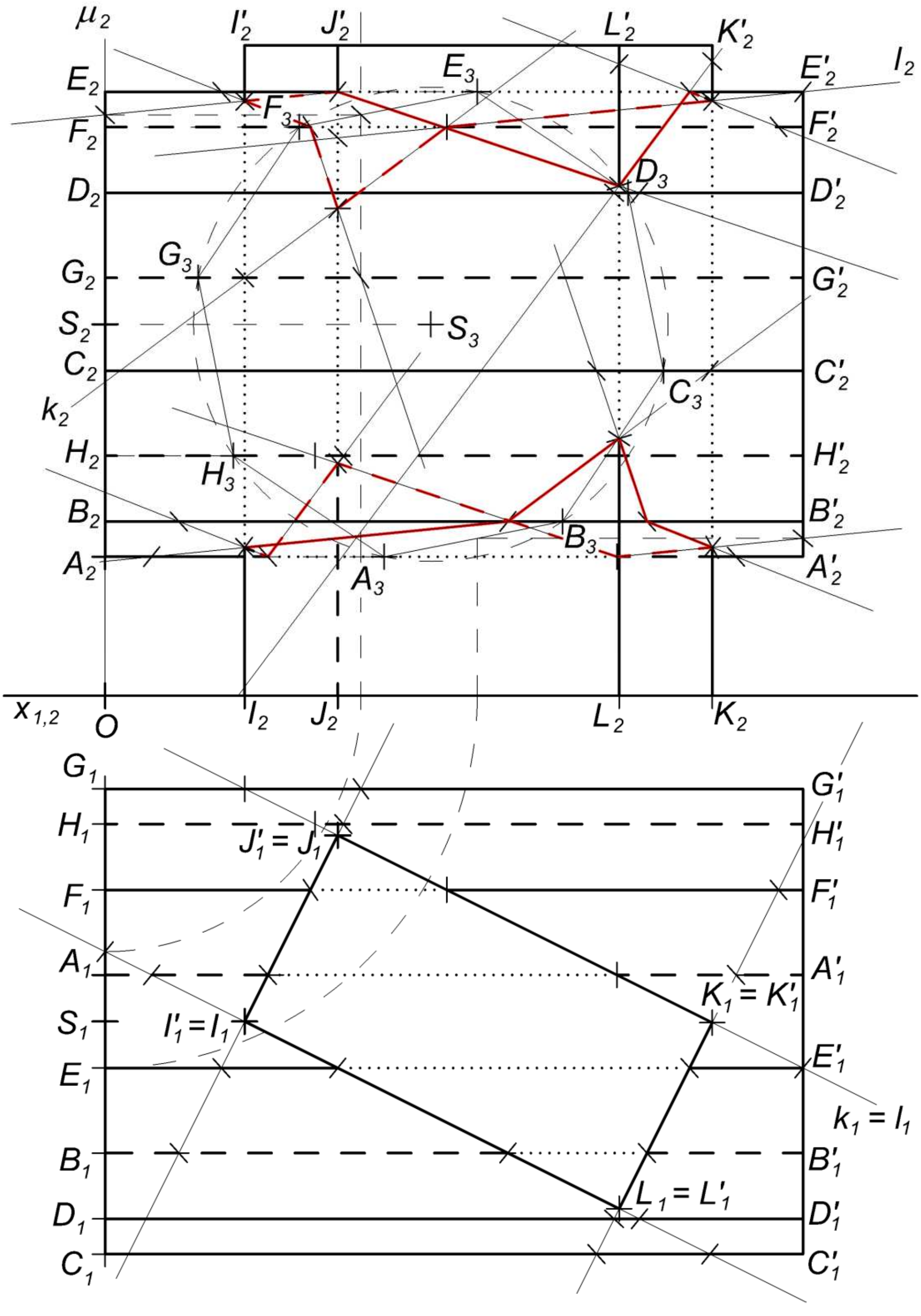
2) ***Průměty kvádru*** sestrojíme podobně jako v *Příkladu 4.1.1*.

3) ***Určíme viditelnost*** hranolu i kvádru pouze vůči tělesu samotnému (neboť viditelnost se bude měnit v bodech průniku, které ještě neznáme). U hranolu k tomu využijeme bokorys.

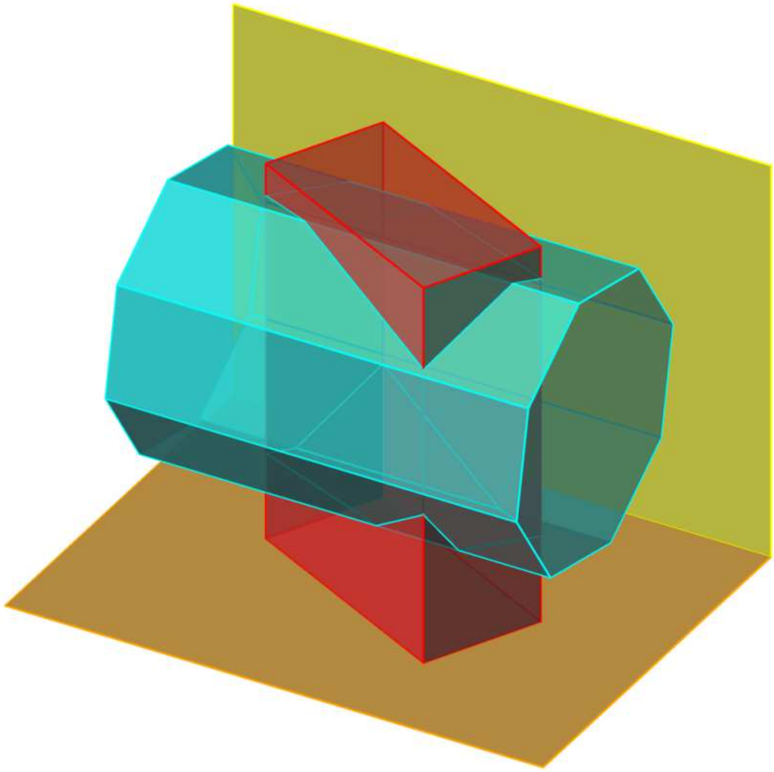
4) ***Jelikož je průnik těles úplný*** (více o tom např. v [4], str. 226), ***bude se skládat ze dvou uzavřených prostorových křivek***. ***Začněme nejprve například horní částí*** a sestrojíme průnik stěny $JJ'K'K$ s hranolem. Pokud se podíváme do půdorysu, tak tato stěna protíná stěny $GG'F'F$, $EE'F'F$, $HH'A'A$ a $BB'A'A$ hranolu. Budeme zatím uvažovat jen stěny $GG'F'F$ a $EE'F'F$. Využijme krycích přímek k a l, které jsou v půdorysu totožné s půdorysem stěny $JJ'K'K$ a leží ve stěnách $GG'F'F$ a $EE'F'F$ hranolu. Pomocí jejich průsečíků s hranami $G_1G'_1$, $F_1F'_1$ a $E_1E'_1$ sestrojme jejich nárysy. Průsečíky přímek k_2 a l_2 s hranami $J_2J'_2$ a $K_2K'_2$ patří do průniku těles. Pro nárys části průnikové křivky platí: leží na částech přímek k_2 a l_2 mezi hranami $J_2J'_2$ a $K_2K'_2$ a musí procházet i jejich průsečíkem, navíc bereme jen ty části přímek k_2 a l_2, které leží ve stěnách hranolu. Určíme hned i viditelnost této části – jelikož leží na stěnách $GG'F'F$, $EE'F'F$, které nejsou vidět, také nebude vidět. Podobně sestrojíme i průsečnice stěny $KK'L'L$ se stěnami hranolu $EE'F'F$ a $EE'D'D$. Zde budou částí průniku úsečky, které jsou na odpovídajících krycích přímkách a které leží mezi $L_2L'_2$ a $K_2K'_2$. Opět pomocí viditelnosti stěn hranolu a případně i kvádru určíme viditelnost této části průniku. Nyní sestrojme průnik stěny $II'L'L$ se stěnami $EE'F'F$ a $EE'D'D$. Nárys průsečíku krycí přímky s podstavou hranolu určíme pomocí bokorysu. Určeme viditelnost této části. V horní části průniku již zbývá jen průnik stěny $II'J'J$ se stěnami $EE'F'F$ a $GG'F'F$. Tato část průniku nebude viditelná. Nyní ***sestrojme dolní křivku průniku***. Stěna $JJ'K'K$ protíná stěny $HH'A'A$ a $BB'A'A$. Opět pomocí krycích přímek sestrojme část křivky průniku a určeme pomocí viditelnosti stěn i její viditelnost. Podobně postupujme i při určení průniku stěny $KK'L'L$ se stěnami $BB'A'A$ a $BB'C'C$, stěny $II'J'J$ se stěnami $BB'A'A$ a $BB'C'C$ a stěny $II'J'J$ se stěnou $HH'A'A$.

5) ***Půdorys průniku*** musí ležet na kvádru i na hranolu, tedy bude totožný s půdorysem $I_1J_1K_1L_1$.

6) ***Na závěr určíme viditelnost těles vzhledem k průniku.***



Obr. 4.1.2 a)



Obr. 4.1.2 b)

Příklad 4.1.3:

Zobrazte průnik kosého trojbokého jehlanu $ABCV$ a kosého čtyřbokého jehlanu $DEFGW$ s podstavou čtverce. Podstavy jehlanů leží v půdorysně a souřadnice vrcholů jsou: $A = [-5; 1; 0]$, $B = [-2; 7; 0]$, $C = [2; 3; 0]$ a $V = [4; 8; 7]$, $D = [5; 3; 0]$, $E = [4; 7; 0]$ a $W = [-4; 5; 14]$. (obr. 4.1.3)

Řešení:

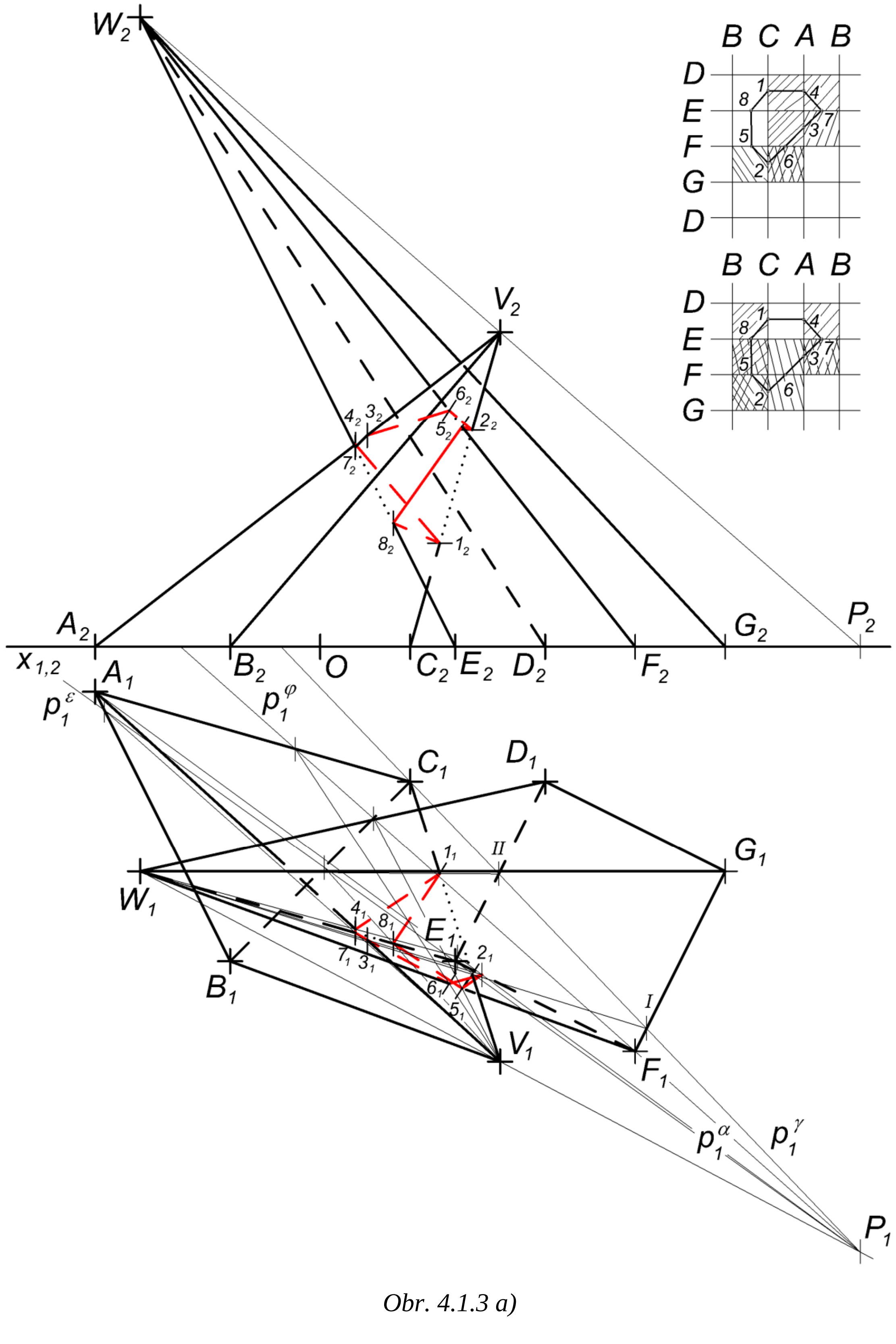
Nejprve si narýsujeme průměty obou jehlanů. Dále budeme postupovat takto:

1) ***K určení bodů průniku jehlanů použijeme*** **vrcholové roviny** (tj. roviny, které prochází oběma vrcholy jehlanů V a W). Daná vrcholová rovina bude vždy procházet jednou hranou jehlanu a bude protínat druhý jehlan v trojúhelníku, jehož okraj protíná daná hrana prvního jehlanu ve dvou bodech průniku. Sestrojme tedy vrcholovou přímku, tj. přímku VW, a najděme její půdorysný stopník, kterým bude procházet vrcholová rovina. Vyberme nyní vrcholovou rovinu γ, která prochází hranou CV – půdorysná stopa roviny tedy prochází bodem P_1 a C_1. Podstavu čtyřbokého jehlanu protíná v bodech I a II. Řezem čtyřbokého jehlanu rovinou γ bude trojúhelník o vrcholech I, II a W. Úsečky IW a IIW protínají hranu CV

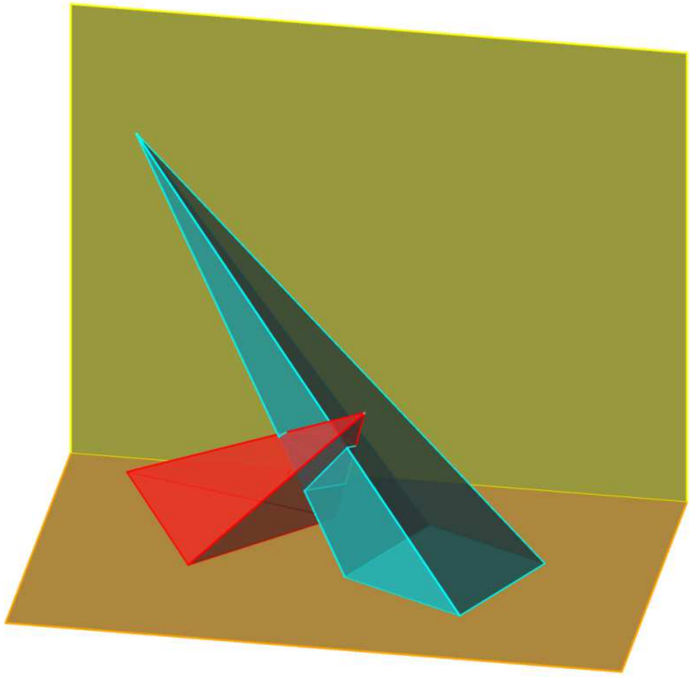
v bodech průniku 1 a 2. Sestrojme také nárysy bodů 1 a 2 na odpovídající hraně. Nyní vezměme vrcholovou rovinu α, která prochází hranou AV a která protíná jehlan $DEFGW$ opět v trojúhelníku, jehož okraj protíná hrana AV v bodech 3 a 4. Sestrojme také nárysy těchto bodů průniku. Nyní stejným postupem sestrojme průnik vrcholové roviny φ hrany FW s jehlanem $ABCV$, body průniku označme 5 a 6. Zbývá jen určit průnik hrany EW s jehlanem $ABCV$ (využijeme vrcholovou rovinu ε), kde body průniku označíme 7 a 8. Hrany DW a GW se s jehlanem $ABCV$ neprotínají (to určíme snadno, neboť vrcholové roviny hran DW a GW neprotínají podstavu jehlanu $ABCV$). Stejně tak hrana BV neprotíná jehlan $DEFGW$.

2) ***Nyní musíme určit v jakém pořadí spojit body průniku, abychom získali správnou křivku průniku.*** Jelikož existují hrany na jehlanu $ABCV$, které se s jehlanem $DEFGW$ neprotínají a stejně existují hrany na jehlanu $DEFGW$, které se neprotínají s jehlanem $ABCV$, bude se jednat o ***částečný průnik*** (více viz např. [4], str. 226) a ***průnikem bude jedna prostorová uzavřená křivka***. Sestrojme tedy čtvercovou síť, kde např. vodorovné přímky budou určovat vrcholy jehlanu D, E, F, G a D. Svislé přímky pak budou odpovídat vrcholům B, C, A a B. Vždy musí být první vrchol také posledním, abychom zahrnuli všechny stěny – tj. u svislých přímek máme určené stěny BCV, CAV i ABV. Nyní na odpovídající hranu a případně i stěnu (tj. pás mezi patřičnými vrcholy) nanesme dané body průniku 1 až 8. Body spojíme v jednu křivku tak, že vždy se spojí jen ty odpovídající jednomu čtverečku, tj. například 4 a 7 leží na stranách stejného čtverečku. Takto dostaneme křivku 14736258. Než spojíme body podle tohoto pořadí v půdorysu a nárysu, musíme ještě určit viditelnost. Určeme nejprve viditelnost v půdorysu. Můžeme např. vyšrafovat ve čtvercové síti (*pozn.*: stačí jen v části, kde je křivka) stěny, které jsou vidět, tedy vyšrafujme pás CA, AB a FG. Kde se šrafování prolínají, zde je to ve čtverečku $CAFG$, tak ta část křivky v této oblasti bude viditelná – tzn. v našem případě úsečka 26. Nyní již narýsujme v půdorysu křivku průniku i s viditelností. Pro určení viditelnosti v nárysu si sestrojme čtvercovou síť i s křivkou průniku znovu a stejným postupem vyšrafujme viditelné stěny jehlanů. Jak vidíme, budou viditelné úsečky 37, 25 a 58.

Pozn.: tento potup najdeme v knize [4], str. 227, jiný možný postup řešení křivky průniku můžeme nalézt např. v knize [5], str. 27.



Obr. 4.1.3 a)



Obr. 4.1.3 b)

Příklad 4.1.4:

Zobrazte průnik kosého čtyřbokého hranolu $ABCDA'B'C'D'$ a kosého šestibokého hranolu $IJKLMNI'J'K'L'M'N'$ s podstavou pravidelného šestiúhelníku. Podstavy hranolů leží v půdorysně a pro jejich souřadnice platí: $A = [2; 3; 0]$, $B = [1; 7; 0]$, $C = [6; 8; 0]$, $D = [8; 4; 0]$ a $A' = [12; 1; 13]$, $I = [10; 9; 0]$, $J = [11; 12; 0]$ a $I' = [4; 5; 13]$. (obr 4.1.4)

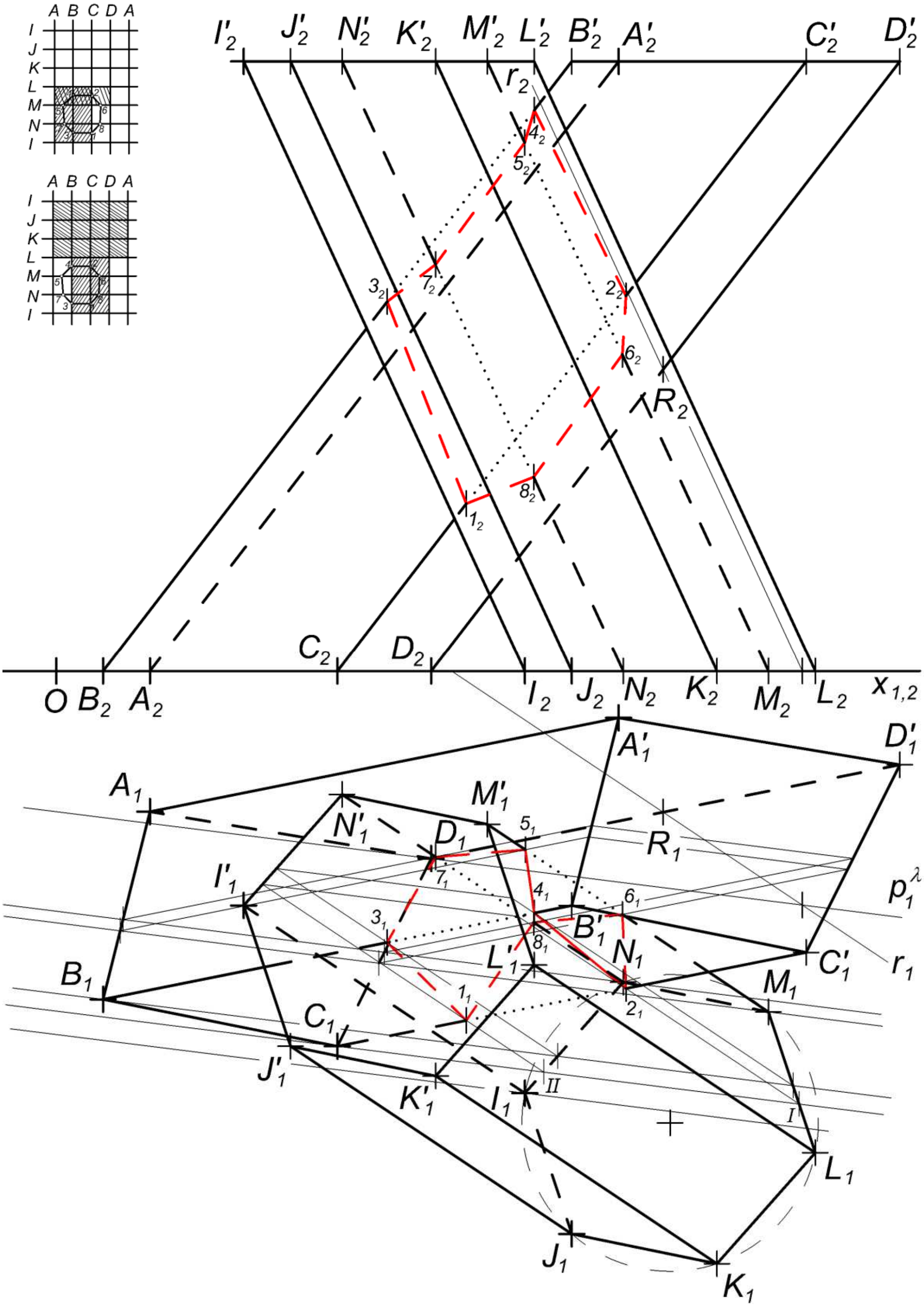
Řešení:

Nejprve si narýsujeme průměty obou hranolů a určíme jejich viditelnost. Pro určení bodů průniku využijeme tohoto postupu:

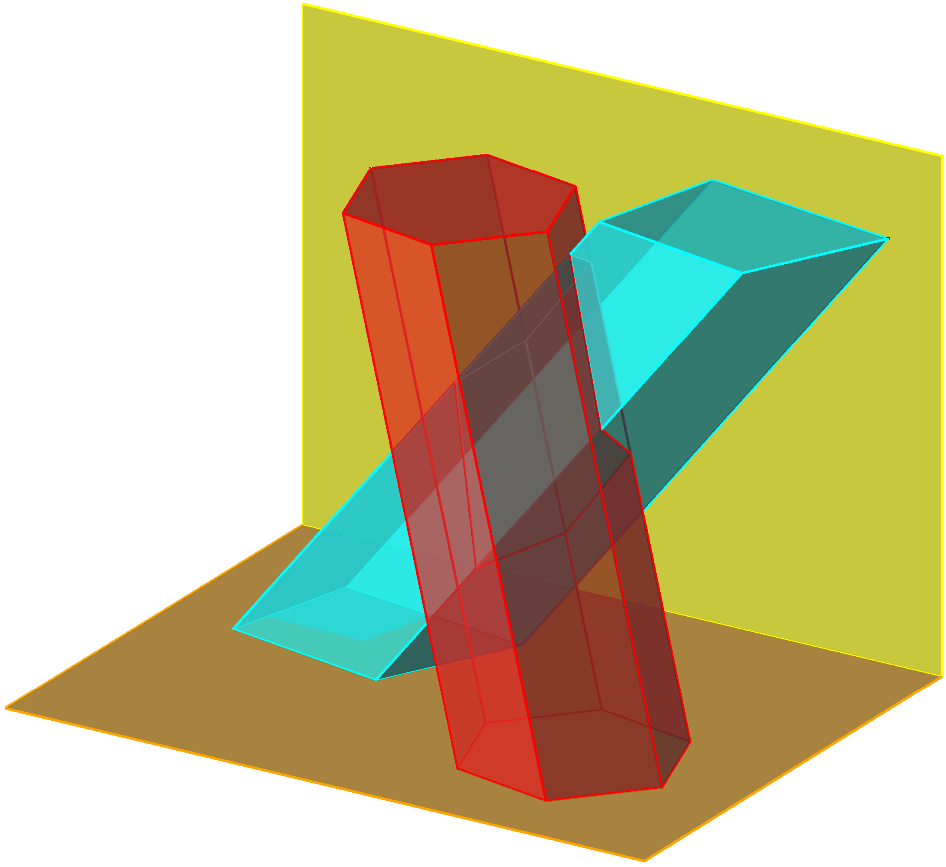
1) ***K určení bodů průniku hranolů použijeme*** **směrové roviny** (tj. roviny, které jsou rovnoběžné s hranami obou hranolů, tedy s hranami AA', II' apod.; tyto roviny jsou vhodné proto, že tělesa protínají v rovnoběžnících, které snadno určíme). Sestrojme tedy půdorysnou stopu (neboť budeme v půdorysu určovat její průnik s hranolem) roviny λ, která bude procházet hranou DD' a bude rovnoběžná s hranami hranolu $IJKLMN$. Přímka DD' v rovině leží, tedy jejím stopníkem, což je bod D, bude procházet její stopa roviny. Pomocí libovolné další přímky, která je rovnoběžná s hranami hranolu $IJKLMN$ a je např. různoběžná s hranou DD', sestrojíme půdorysnou stopu. Zvolme tedy na přímce $D_1D'_1$ bod R_1, sestrojme i jeho

nárys a tímto bodem veďme rovnoběžku r s hranou MM'. Jejím stopníkem také musí procházet stopa p_1^λ, kterou nyní sestrojme. Jelikož tato stopa neprotíná podstavu $IJKLMN$, nebude ani hrana DD' protínat hranol $IJKLMNI'J'K'L'M'N'$. Podobně to bude i s hranou AA'. Jelikož všechny takovéto roviny rovnoběžné s hranami obou hranolů jsou rovnoběžné, budou i jejich stopy navzájem rovnoběžné. Sestrojme tedy v bodě C_1 stopu rovnoběžnou s p_1^λ (*pozn.*: pro přehlednost již tyto stopy nejsou označeny) a nejděme její průsečíky s okrajem šestiúhelníku $IJKLMN$, tj. body I a II. Nyní můžeme sestrojit řez šestibokého hranolu touto rovinou – příslušné strany rovnoběžníka řezu musí být rovnoběžné s hranami MM' atd. a musí procházet body I a II. Hranice tohoto rovnoběžníku řez protíná odpovídající hranu CC' v bodech 1 a 2, sestrojme jejich průměty. Podobně nyní sestrojíme řez hranolu rovinou, která prochází hranou BB'. Tento řez protíná hranu BB' v bodech 3 a 4, sestrojme jejich průměty. Nyní vezměme rovinu, která prochází hranou II' – jak vidíme, neprotíná podstavu $ABCD$, tedy ani hrana nebude protínat hranol $ABCDEFGH$. Podobným způsobem sestrojme průnik roviny hrany NN' s hranolem $ABCDEFGH$, tedy průsečíky řezu povrchu tělesa a hrany NN' budou body 5 a 6. Ještě zbývá stejným postupem určit průsečíky 7 a 8 hrany MM' s hranolem $ABCDEFGH$. Pro hrany JJ', KK' a LL' již nemusíme nic sestrojovat, neboť leží „pod“ bodem I, jehož rovina již hranol neprotíná.

2) ***Stejným postupem jako v Příkladu 4.1.3 sestrojíme tabulku***, kam zaneseme průniky odpovídajících hran a stěn a zjistíme tak, v jakém pořadí máme spojit body 1 až 8. Také podobně jako v *Příkladu 4.1.3* určíme i viditelnost jednotlivých částí hranolů – zvlášť pro půdorys a zvlášť pro nárys. Nyní jen odpovídající čarou spojíme body průniku.


A B C D A
I
J
K
L
M
N
I
I'2
J'2
N'2
K'2
M'2
L'2
B'2
A'2
C'2
D'2
r2
R2
O
B2
A2
C2
D2
I2
J2
N2
K2
M2
L2
x1,2
A'1
D'1
A1
M'1
N'1
D1
R1
I'1
p1
B'1
N1
C'1
r1
B1
L'1
M1
C1
J'1
K'1
I1
II
I
L1
J1
K1

Obr. 4.1.4 a)



Obr. 4.1.4 b)

Příklad 4.2.1:

Zobrazte průnik pravidelného čtyřbokého hranolu $ABCDEFGH$ a kuželu. Podstavy těles leží v půdorysně a platí: $A = [5; 2; 0]$, $B = [3; 8; 0]$, výška hranolu je $v = 10$ cm, střed podstavy kuželu je $S = [8; 7; 0]$ a poloměr $r = 4$ cm, vrchol kuželu je $V = [8; 7; 13]$. (obr. 4.2.1)

Řešení:

Nejprve si narýsujeme průměty kuželu i hranolu a určíme jejich viditelnost. Pro určení bodů průnikové křivky budeme postupovat takto:

1) ***Z půdorysu vidíme, že do průniku budou patřit i části podstav těles, dále, že řez povrchu kuželu stěnou $EFGH$ bude kružnice a řezy zbylými stěnami budou části hyperbol***. Mohli bychom průnik vyřešit tak, že bychom hledali řezy kuželu jednotlivými stěnami. Vzhledem k tomu, že to jsou části hyperbol, bude snazší postupovat bodově a začneme řezem povrchu kuželu stěnou $BCGE$. Body průniku podstavných hran těles budou ležet na křivce průniku. Sestrojme tedy průsečíky B_1C_1 s podstavnou kružnicí kuželu. Vrchol hyperboly se (vzhledem k tomu, že stěny hranolu jsou kolmé

k půdorysně) zobrazí na vrchol hyperboly v nárysu a na střed úsečky průmětu řezu v půdorysu. Vrchol hyperboly bude ležet na površce kuželu, která leží v rovině kolmé k dané stěně hranolu. Sestrojme tuto površku vzhledem ke stěně $BCEG$ v půdorysu a pomocí toho najděme vrchol hyperboly nárysu. Ještě sestrojme i druhý průsečík prodloužení úsečky B_1C_1 s podstavou kuželu, tj. souměrný bod hyperboly řezu podle její osy.

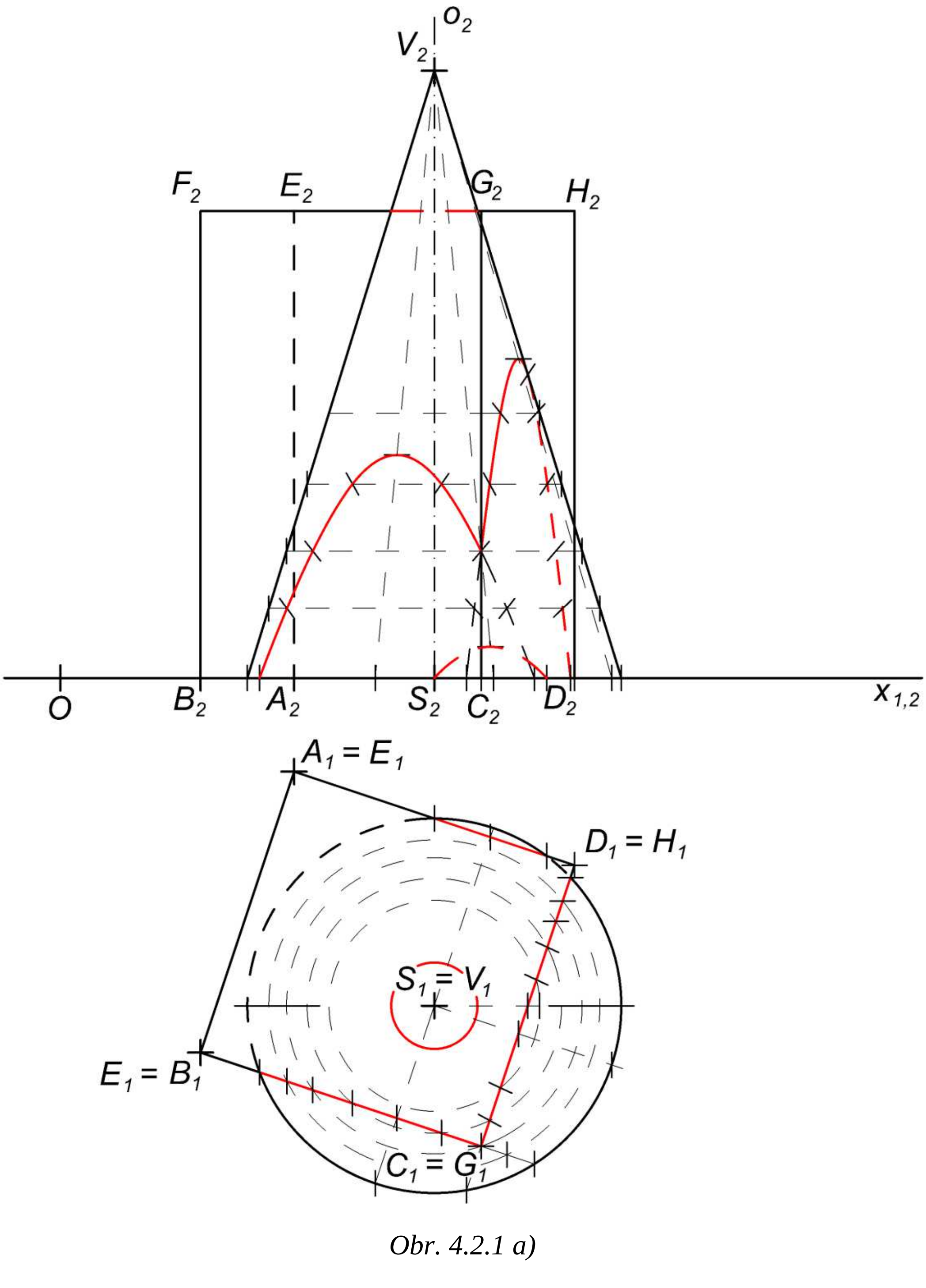
2) Dále budeme postupovat **metodou rovnoběžných řezů**, tj. volíme roviny řezu tak, aby se v jedné z průměten řezy zobrazily „hezky“. V tomto případě budeme volit řezy kuželové plochy rovinami rovnoběžnými s půdorysnou, neboť se v půdorysu tyto řezy zobrazí ve skutečné velikosti a to jako kružnice. Řezem hranolu bude čtverec, který bude v půdorysu shodný s podstavou hranolu (proto bude stačit, když budeme sestrojovat jen řezy kuželu), budeme uvažovat jen okraj čtvercového řezu. Řez kuželové plochy se v nárysu zobrazí jako úsečka, jejíž velikost je rovna průměru kružnice řezu, tj. i průměru půdorysu kružnice řezu, a sestrojme tento půdorys. Průsečíky půdorysu kružnice řezu s půdorysným obrysem hranolu jsou půdorysy bodů na průnikové křivce. Sestrojme na odpovídající kružnici řezu kuželu v nárysu jejich druhé průměty. Nyní tento postup opakujme pro libovolný další řez kuželové plochy. Najdeme tak libovolné množství bodů průniku, které bude stačit pro sestrojení části hyperboly, která tvoří průnikovou křivku. Také ***zvýrazněme i viditelnost*** této části řezu (tj. stěna $BCEG$ je vidět a zároveň je vidět i příslušná část kuželu, tedy křivka bude viditelná – samozřejmě zvýrazníme jen část hyperboly, která leží ve stěně $BCEG$).

3) Nyní tento ***postup opakujeme pro konstrukci hyperboly řezu kuželu stěnou $\boldsymbol{CDHG}$***, přičemž využijeme již sestrojené kružnice řezu kuželové plochy a dohledáme stejným způsobem i vrchol hyperboly nárysu. U této hyperboly budeme ještě potřebovat najít v nárysu bod dotyku s obrysem kuželu. Nárysný obrys kuželu je shodný s průmětem řezu kuželové plochy rovinou, která prochází jeho osou a je rovnoběžná s nárysnou. Pokud tento řez sestrojíme v půdorysu a najdeme průsečnici této roviny s příslušnou stěnou hranolu, sestrojíme tak na dané površce kuželu hledaný bod dotyku. Určeme viditelnost řezu s pomocí dotykového bodu a viditelnosti částí těles.

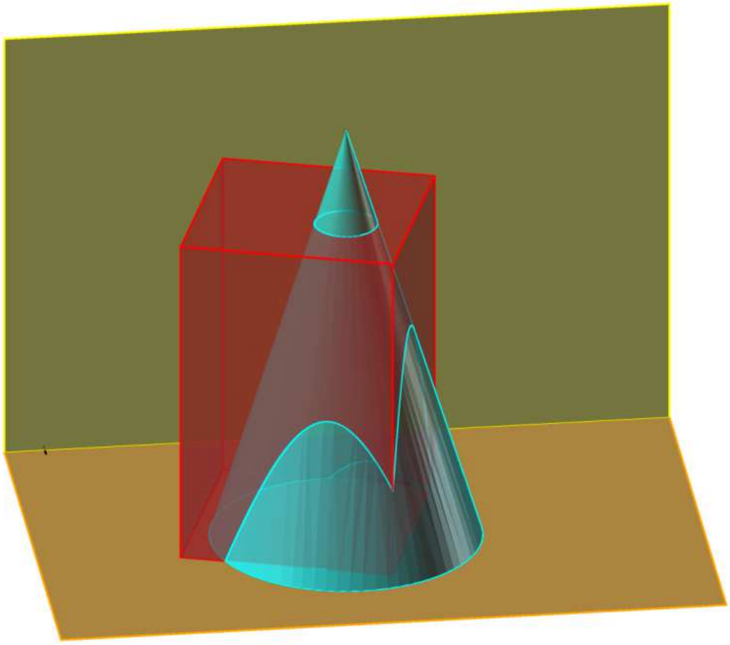
4) Opět ***postup opakujme pro konstrukci hyperboly průniku stěny $\boldsymbol{ADHE}$ s kuželem***. Tento řez nebude viditelný.

5) Ještě zbývá pomocí nárysu ***určit kružnici průniku stěny EFGH s povrchem kuželu***, ale tu sestrojíme snadno.

6) Nakonec ještě ***určíme viditelnost samotných těles*** vzhledem k celému průniku.



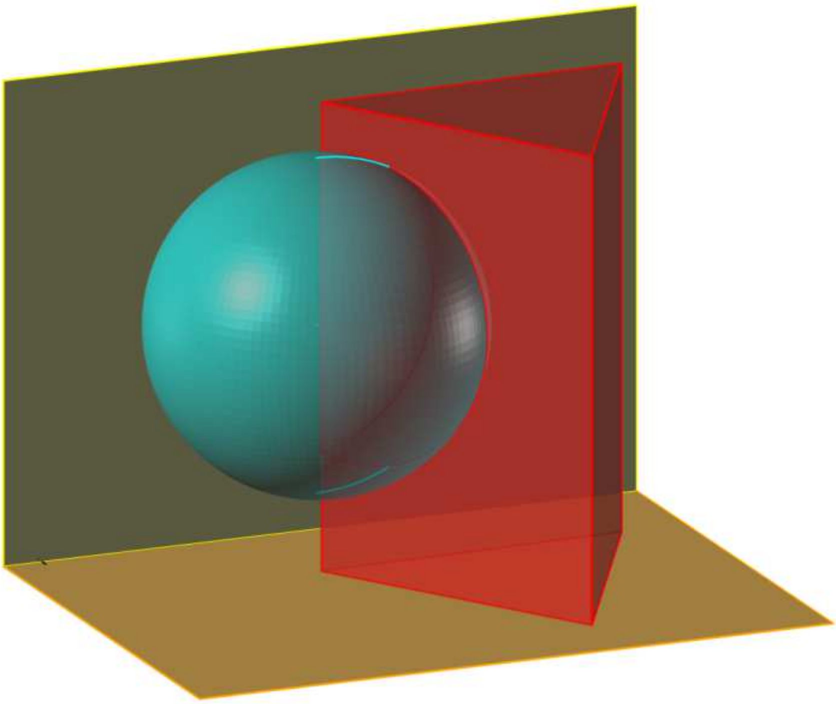
Obr. 4.2.1 a)



Obr. 4.2.1 b)

Příklad 4.2.2:

Zobrazte průnik pravidelného trojbokého hranolu $ABCDEF$ a koule. Podstava hranolu leží v půdorysně a platí: $A = [7; 4; 0]$, $B = [12; 12; 0]$, výška hranolu $v = 14$ cm. Střed koule je $S = [6; 6; 8]$ a poloměr $r = 5$ cm. Bod C volte tak, aby měl větší x-ovou souřadnici než bod B. (obr. 4.2.2)



Obr. 4.2.2 a)

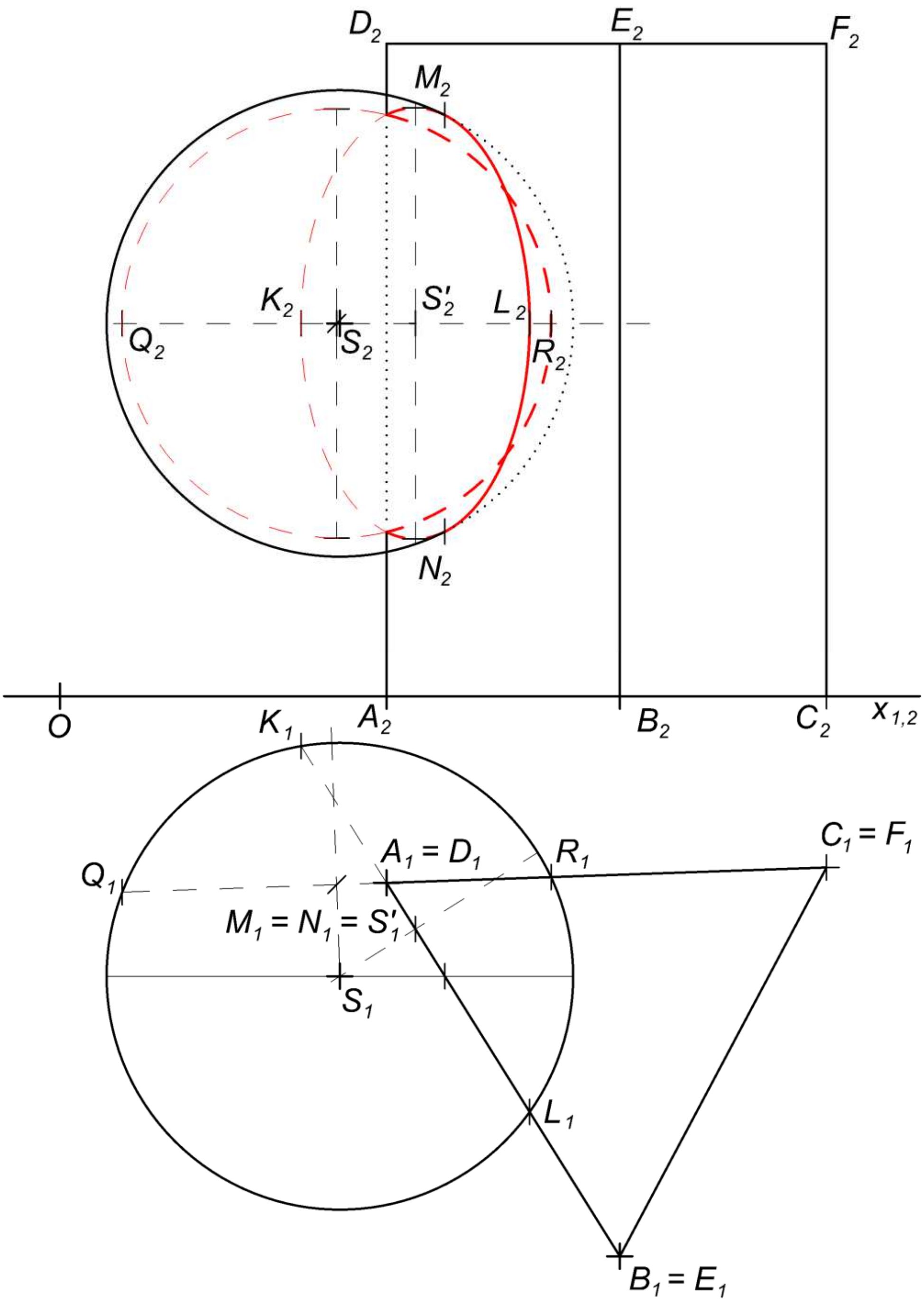
Řešení:

Nejprve si narýsujeme průměty obou těles a určíme jejich viditelnost. Víme, že řezem kulové plochy je kružnice, která se podle polohy může zobrazit i jako elipsa. Při určování průniku budeme tedy postupovat takto:

1) ***Stěny hranolu tvoří roviny řezu kulové plochy.*** Stačí tedy sestrojit řezy kulové plochy rovinami, v nichž leží jednotlivé stěny hranolu, a tyto křivky omezit jen na část, která leží v dané stěně. ***Řezy kulové plochy těmito rovinami budou kružnice, jejichž středy budou ležet na kolmici ze středu kulové plochy na příslušnou rovinu řezu***. V půdorysu se tyto kružnice zobrazí jako úsečky, jejichž délky odpovídají průměrům skutečných kružnic řezu. Nárysem pak budou elipsy (resp. kružnice – podle polohy roviny), jejichž hlavní osa bude mít velikost rovnou průměru kružnice řezu. Začněme u stěny $ABDE$ a v půdorysu ji prodlužme k obrysu kulové plochy. Vznikly tedy body K_1 a L_1, které leží v rovině stěny $ABDE$, což je také půdorysně promítací rovina hrany AB či DE, a zároveň na půdorysu rovníkové kružnice (tj. kružnice na povrchu koule, která leží v rovině rovnoběžné s půdorysnou a její střed je totožný se středem koule). Nárysy bodů K a L tedy budou vedlejší vrcholy elipsy v nárysu (protože leží na horizontální přímce půdorysně promítací roviny hrany AB). Sestrojme tedy nárys této horizontální přímky, který se zobrazí jako přímka rovnoběžná s $x_{1,2}$ procházející bodem S_2. Sestrojme také nárysy bodů K a L. Střed elipsy nárysu najdeme buď tak, že sestrojíme střed úsečky K_2L_2, nebo vedeme bodem S_1 kolmici ke stěně $ABDE$, která ji protne v bodě S'_1. Dále platí, že hlavní osa elipsy nárysu je kolmá na $x_{1,2}$ a prochází bodem S'_2 a její velikost je rovna průměru kružnice řezu, který v půdorysu vidíme jako délku úsečky K_1L_1. Body M_1 a N_1 splývají (vzhledem k poloze roviny řezu) a platí tedy: $|M_2N_2| = |K_1L_1|$.
2) Před sestrojením samotné elipsy nárysu ještě ***sestrojme její body dotyku s obrysem kulové plochy.*** Jelikož nárysný obrys kulové plochy je totožný s nárysem hlavní kružnice ležící v rovině rovnoběžné s nárysnou procházející středem plochy, stačí sestrojit průsečíky této hlavní kružnice se stěnou $ABDE$. V půdorysně jsou tyto body snadno sestrojitelné jako průsečíky úsečky A_1B_1 a průměru kružnice půdorysu, který je rovnoběžný se základnicí. Sestrojme i nárysy těchto bodů dotyku a také celou elipsu.

Viditelnost určíme snadno např. podle polohy bodu K a zvýrazníme jen část elipsy, která leží ve stěně $ABDE$.

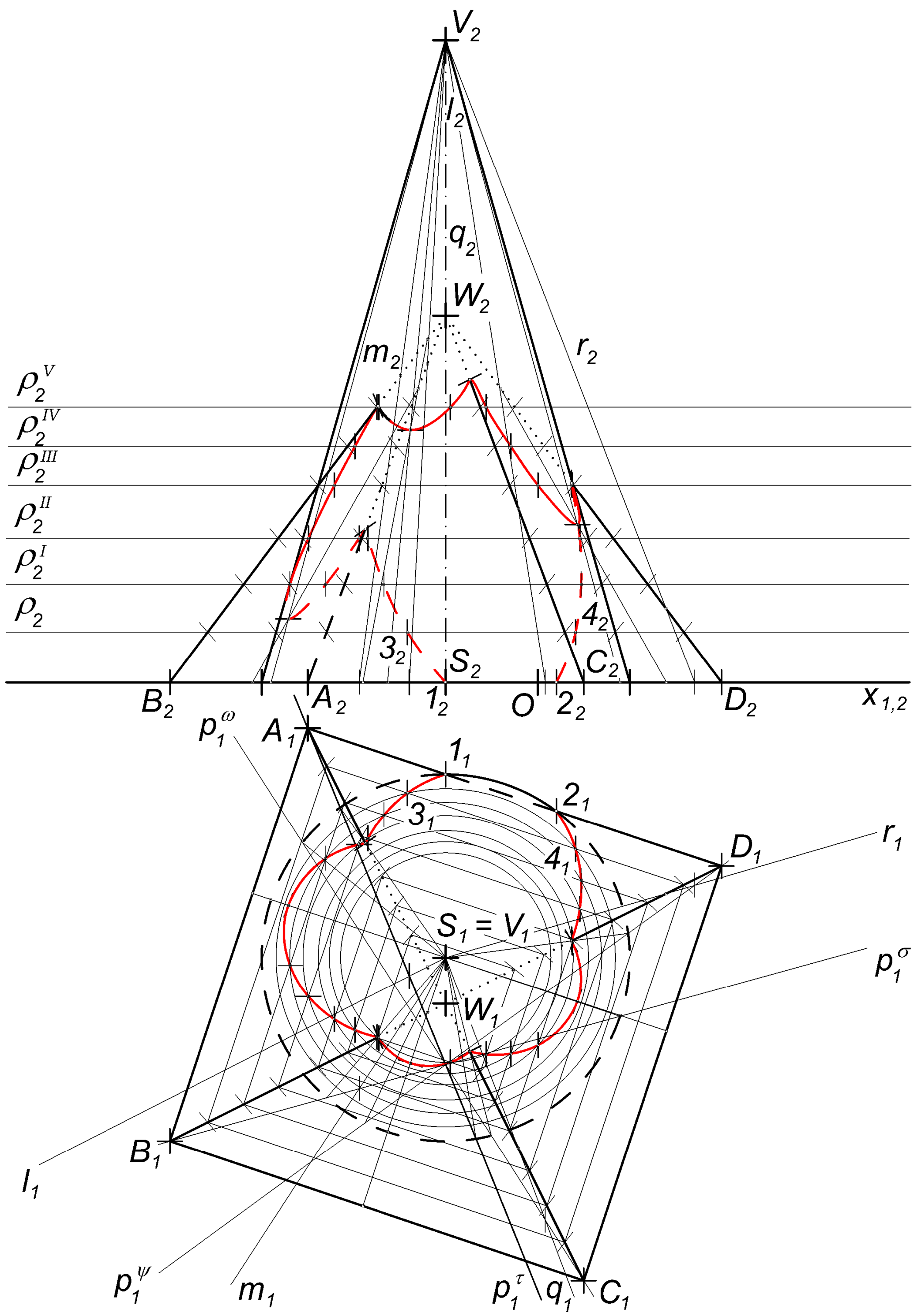
3) ***Stejný postup aplikujeme i na průnik stěny $ACFD$ s kulovou plochou***. Sestrojíme tedy body Q a R, které budou v nárysu vedlejšími vrcholy elipsy, která se však (vzhledem k poloze stěny hranolu) v nárysu zobrazí téměř jako kružnice. Tato kružnice řezu nebude vidět, neboť leží na „zadní“ polokouli. Ještě zvýrazněme její část, která leží ve stěně $ACFD$.



Obr. 4.2.2 b)

Příklad 4.2.3:

Zobrazte průnik pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDW$ a rotačního kuželu. Podstavy obou těles leží v půdorysně a platí: $A = [5; 1; 0]$, $W = [-2; 7; 8]$, střed podstavy kuželu je $S = [-2; 6; 0]$, její poloměr $r = 4$ cm a výška kuželu je $v = 14$ cm. (obr. 4.2.3)



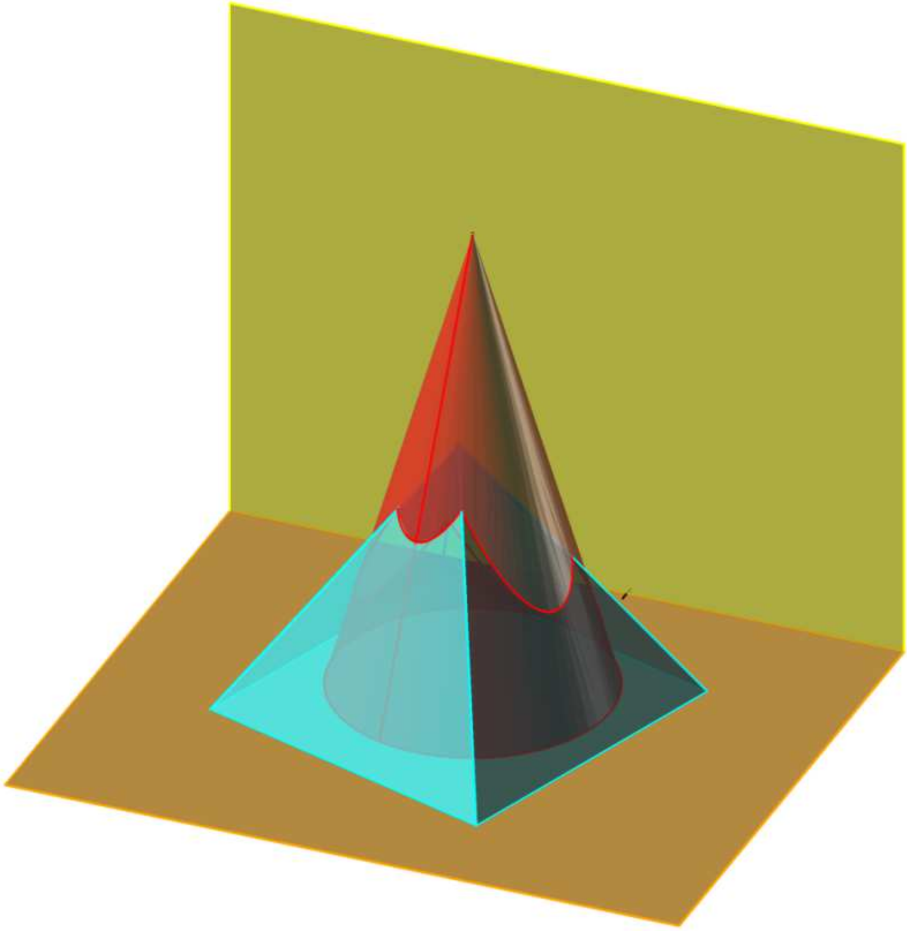
Obr. 4.2.3 a)

Řešení:

Nejprve si narýsujeme průměty obou těles a určíme jejich viditelnost. Dále budeme uvažovat jen průnik plášťů těles.

1) ***Průniková křivka se bude skládat ze čtyř kuželoseček.*** Čtyři proto, že jsou čtyři stěny jehlanu, které protínají kužel. Navíc bude křivka otevřená, protože jedna stěna jehlanu (tj. AWD) protíná podstavu kuželu. Tedy nyní již známe dva body křivky, to jsou průsečíky hrany AD a podstavné kružnice kuželu. V půdorysu je snadno sestrojíme, označíme je 1_1 a 2_1, a najdeme jejich nárysy. Nyní bude postupovat **metodou rovnoběžných řezů**, tj. budeme obě tělesa řezat rovinami kolmými na obě jejich osy. Volíme tyto roviny, neboť řezem kuželu bude v nárysu úsečka a hlavně v půdorysu kružnice. Začněme tedy volit roviny „odspodu“. Rovina ρ se v nárysu zobrazí do přímky, navíc protíná obrys kuželu v bodech, které jsou krajními body úsečky, která je nárysem kružnice řezu, tedy velikost této úsečky je rovna průměru kružnice řezu v půdorysu. Nárysy hran jehlanu protíná rovina ve čtyřech bodech, které jsou vrcholy čtverce řezu. Sestrojme tedy půdorys kružnice a půdorys čtverce průniku kuželové plochy s rovinou a jehlanu s rovinou. Tato kružnice a okraj čtverce se protínají v bodech, které leží na křivce průniku těles. Pro tuto situaci jsou dva a označíme je 3 a 4 a najedeme jejich nárysy. Nyní zvolíme rovinu ρ^I, která bude ve větší vzdálenosti od půdorysny, než rovina ρ. Opět sestrojíme kružnici řezu kuželu a hranici čtverce řezu povrchu jehlanu a jejich průsečíky, které budou body průniku těles. Tento postup opakujeme, dokud nezískáme dostatek bodů ke konstrukci křivky. V našem případě jsme skončili rovinou ρ^V.
2) ***Nyní sestrojme „nejnižší“ body kuželoseček průniku.*** Již víme, že pokud máme rovinný řez (tzn. v tomto případě řez rovinou stěny jehlanu) kuželu s podstavou v půdorysně, tak vrcholy půdorysu kuželosečky řezu leží na spádové přímce, která je různoběžná s osou kuželu, tedy v půdorysu prochází vrcholem kuželu. Sestrojme tedy z vrcholu V_1 kolmici na hranu A_1B_1 (tj. stopu roviny řezu). Pomocí povrchové přímky kuželu (tj. přímka spojující vrchol s bodem na kružnici podstavy) a krycí přímky roviny stěny ABW sestrojíme jeden z vrcholů kuželosečky, která je částí průnikové křivky. Tento postup opakujeme pro stěnu BCW a CDW. Ve stěně ACW jsou nejnižšími body průsečíky 1 a 2.

3) ***Nyní sestrojme průsečíky hran jehlanu s povrchem kuželem.*** Tyto průsečíky se sestrojí pomocí řezu kuželu vrcholovou rovinou, která touto přímkou prochází. Zvolme tedy přímku l, která bude procházet vrcholem kuželu a bude různoběžná s hranou AW, tj. libovolně ji zvolme např. v půdorysu vrcholem V_1 a dohledejme pomocí jejího průsečíku s hranou její nárys. Stopa vrcholové roviny τ musí procházet stopníky těchto přímek, tzn. bodem A, který je stopníkem hrany AW a stopníkem zvolené přímky l. Řez kuželu touto rovinou je trojúhelník (*pozn.*: proto jsme volili vrcholovou rovinu) a jeho hranice protíná hranu AW v průsečíku s povrchem kuželu. Tímto postupem určíme průnik povrchu kuželu s hranou BW (pomocí zvolené přímky m), s hranou CW (pomocí přímky q) a s hranou DW (pomocí přímky r).
4) ***Ještě sestrojme průsečíky nárysu křivky s obrysem kuželu.*** Ty určíme (pro přehlednost) jako průsečíky půdorysu křivky a půdorysně promítací roviny, která prochází vrcholem kuželu a je rovnoběžná s nárysnou.
5) ***Půdorys křivky průniku sestrojíme snadno spojením odpovídajících sestrojených průsečíků.*** Křivka bude tedy otevřená a bude začínat v bodě 1 a končit v bodě 2 (resp. opačně). Nárys sestrojíme podle spojení bodů v půdorysu.
6) ***Viditelnost průnikové křivky*** se v půdorysu určí snadno, neboť všechny „stěny“ jsou vidět, tedy křivka bude vidět. V nárysu bude viditelná jen část na „přední“ polovině kuželu, která je zároveň na viditelných stěnách jehlanu (tj. stěny BCW a CDW).
7) ***Nakonec určíme též viditelnost částí těles vzhledem k průniku.***



Obr. 4.2.3 b)

Příklad 4.2.4:

Zobrazte průnik pravidelného trojbokého jehlanu $ABCV$ s podstavou v půdorysně a koule, když $A = [-8; 6; 0]$, $V = [-3; 7; 12]$, střed koule je $S = [-2; 6; 5]$ a její poloměr $r = 5$ cm. (obr. 4.2.4)

Řešení:

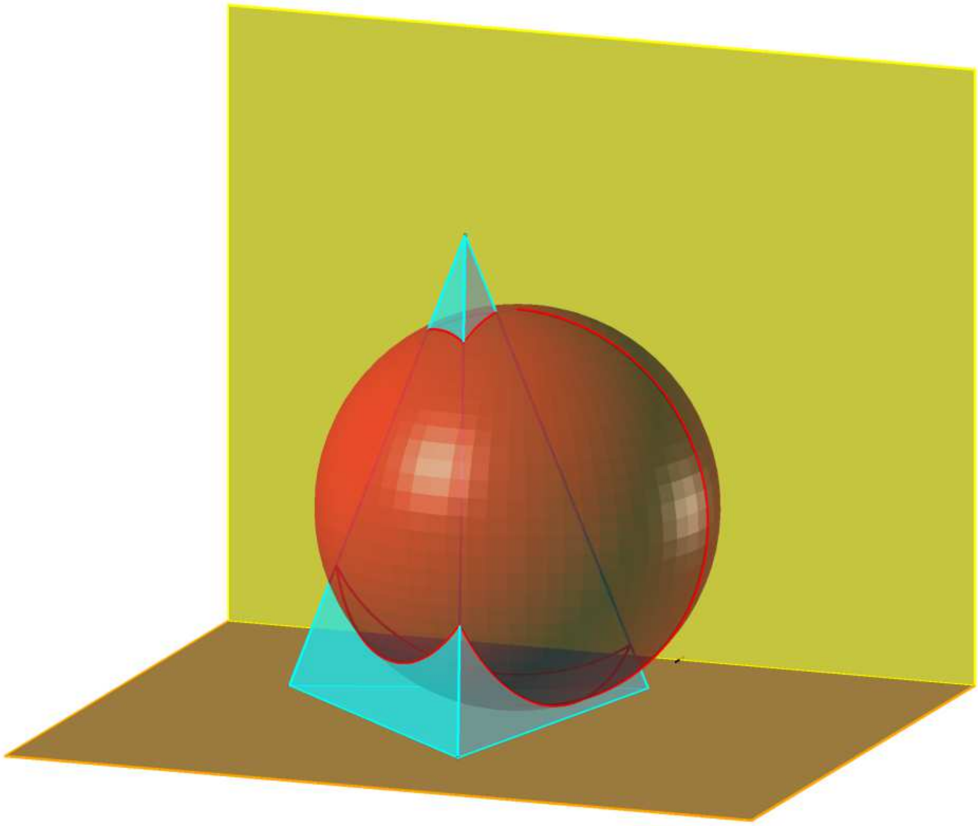
Nejprve si narýsujeme průměty obou těles i s viditelností (vzhledem k danému tělesu). Víme, že řezem kulové plochy rovinou je kružnice, která se podle polohy může zobrazit i jako elipsa. Využijeme tedy možnosti sestrojit průnik stěny s kulovou plochou jako kružnici a pro přehlednost u dalších dvou stěn budeme postupovat známou metodou rovnoběžných řezů. Vzhledem k poloze těles budou průnikem dvě uzavřené křivky. Tedy začněme:

1) ***Sestrojíme průnik stěny ABV s kulovou plochou***, kterým bude kružnice (ta se zobrazí jako elipsa). Pro konstrukci této elipsy půdorysu kružnice řezu využijeme třetí pomocnou průmětnu σ, kterou volíme kolmou na rovinu stěny ABV (a též kolmou na půdorysnu). Do této roviny promítneme

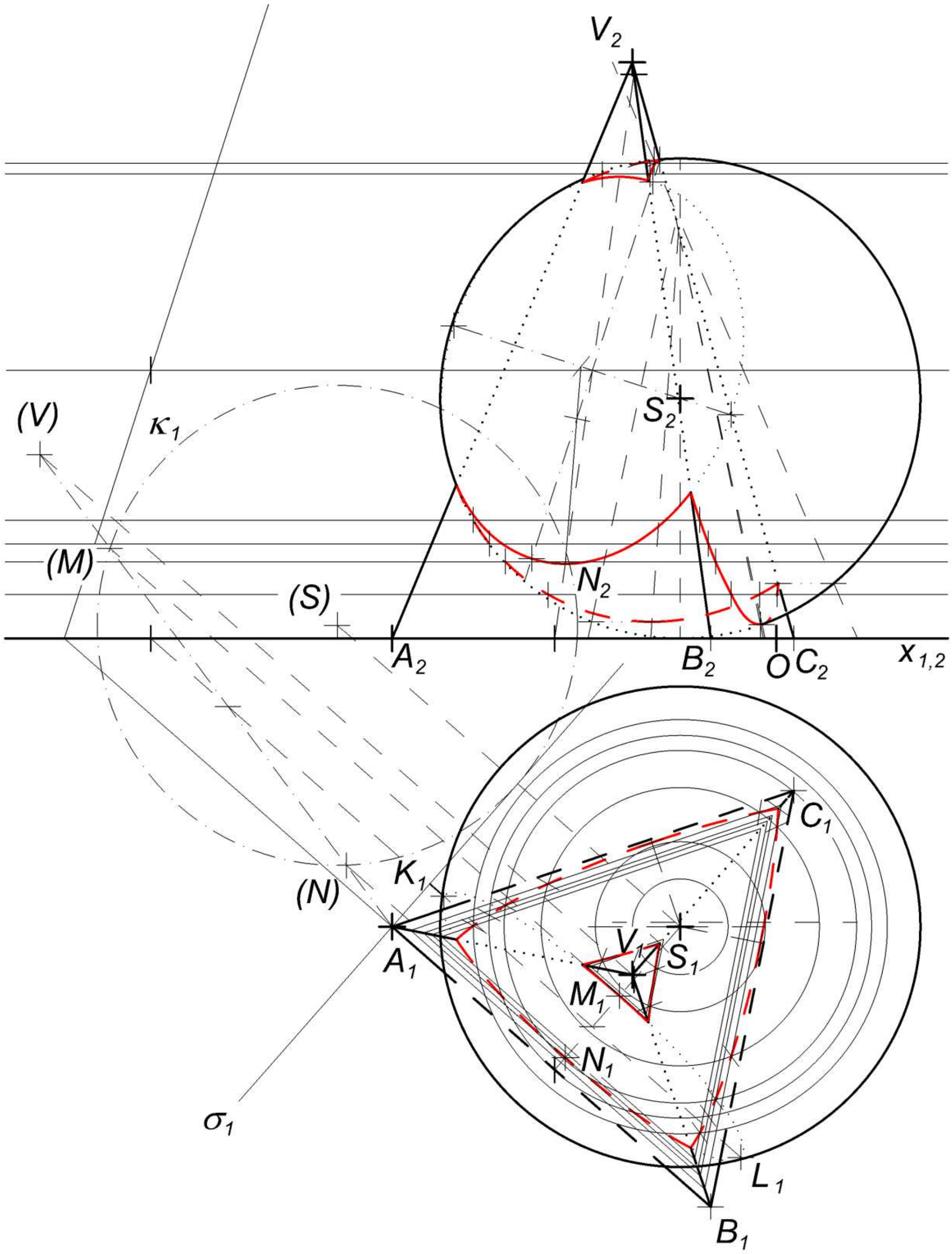
kulovou plochu a stěnu jehlanu a rovinu sklopíme. Bude tedy platit, že: $|(S)\sigma_1| = r$, sklopený průmět kulové plochy označme κ_1, $|(V)\sigma_1| = z_V$, sklopený průmět stěny ABV je úsečka $(V)A_1$. Víme, že hlavní osa bude rovnoběžná se stopou roviny řezu, tj. s hranou AB, a vedlejší osa na ni bude kolmá. Vedlejší osa se tedy v pomocné průmětně zobrazí jako úsečka o skutečné velikosti, ležící v průmětu stěny jehlanu. Kde tedy protíná úsečka $(V)A_1$ průmět κ_1, tam jsou vedlejší vrcholy půdorysné elipsy, tj. body (M) a (N). Sestrojme první průměty těchto vrcholů – na rovnoběžkách s hranou AB z těchto bodů a na odpovídající kolmici na AB z bodu S_1. Střed úsečky $(M)(N)$ odpovídá středu úsečky M_1N_1, který je středem elipsy. Nyní můžeme sestrojit také hlavní osu elipsy, jejíž vrcholy jsou K_1 a L_1 a jejich vzdálenost je rovna $|(M)(N)|$. Dorýsujme elipsu a určeme viditelnost omezenou ve stěně ABV. Nárys kružnice řezu určíme z půdorysu pomocí površky jehlanu M_1N_1, určením stop roviny stěny ABV a pomocí hlavní přímky. Pomocí proužkové konstrukce určíme vrcholy elipsy a dorýsujeme ji i s viditelností v dané stěně.

2) ***Nyní využijeme metodu rovnoběžných řezů ke konstrukci průniků stěn BCV a ACV s kulovou plochou.*** Řezem kulové plochy budou kružnice a řezem jehlanu trojúhelníky. Postupujme tedy podobně jako v *Příkladu 4.2.3*, navíc body průniku hran AV a BV již máme díky konstrukci kružnice průniku. Sestrojme několik rovin řezu tak, abychom určili dostatek bodů průnikové křivky a průsečíky kulové plochy s hranami AV, BV a CV. Máme tedy čtyři roviny pro dolní část průnikové křivky. Určíme ještě vedlejší vrcholy elips a to pomocí površky ve stěně jehlanu, která je kolmá k dané hraně BC, resp. CA, a prochází v půdorysu bodem S_1. Pomocí otočení této površky kolem bodu S_1 v půdorysu a sestrojením i jejího nárysu určíme její průsečíky s obrysem koule. Dorýsujeme část elipsy průniku dané stěny s kulovou plochou. Nyní ještě určíme průsečík hrany CV s kulovou plochou a to pomocí otočení jejího půdorysu kolem bodu S_1, sestrojením nárysu této otočené hrany, jejích průsečíků s obrysem koule a otočením těchto bodů zpět. Dorýsujeme zbylou část „spodní“ části průnikové křivky a též její nárys i s viditelnostmi.
3) Podobně jako v bodě *2)* ***určíme i několik bodů „horní“ průnikové křivky***. Nakonec určíme viditelnost této křivky průniku.

4) ***Viditelnost těles*** určíme snadno: v půdorysu nebude viditelná část podstavy jehlanu, která leží uvnitř obrysu koule, hrany jehlanu pak nebudou mezi průnikovými křivkami vidět (budou tedy vidět jen části hran u vrcholu V, které leží „uvnitř horní" průnikové křivky). V nárysu nebudou opět vidět části hran, které leží mezi průnikovými křivkami, zbylé části již budou viditelné (některé části mezi průnikovou křivkou a obrysem koule vidět nebudou – např. v dolní části hrany VC, ale některé nejsou patrné). Dále nebude vidět část obrysu koule, která leží v nárysu mezi hranou AV a bodem, který je v půdorysu průnikem průmětu hlavní kružnice kulové plochy rovnoběžné s nárysnou a „dolní" průnikové křivky. Dále nebude vidět část obrysu koule, která leží mezi hranou A_2V_2 a C_2V_2.



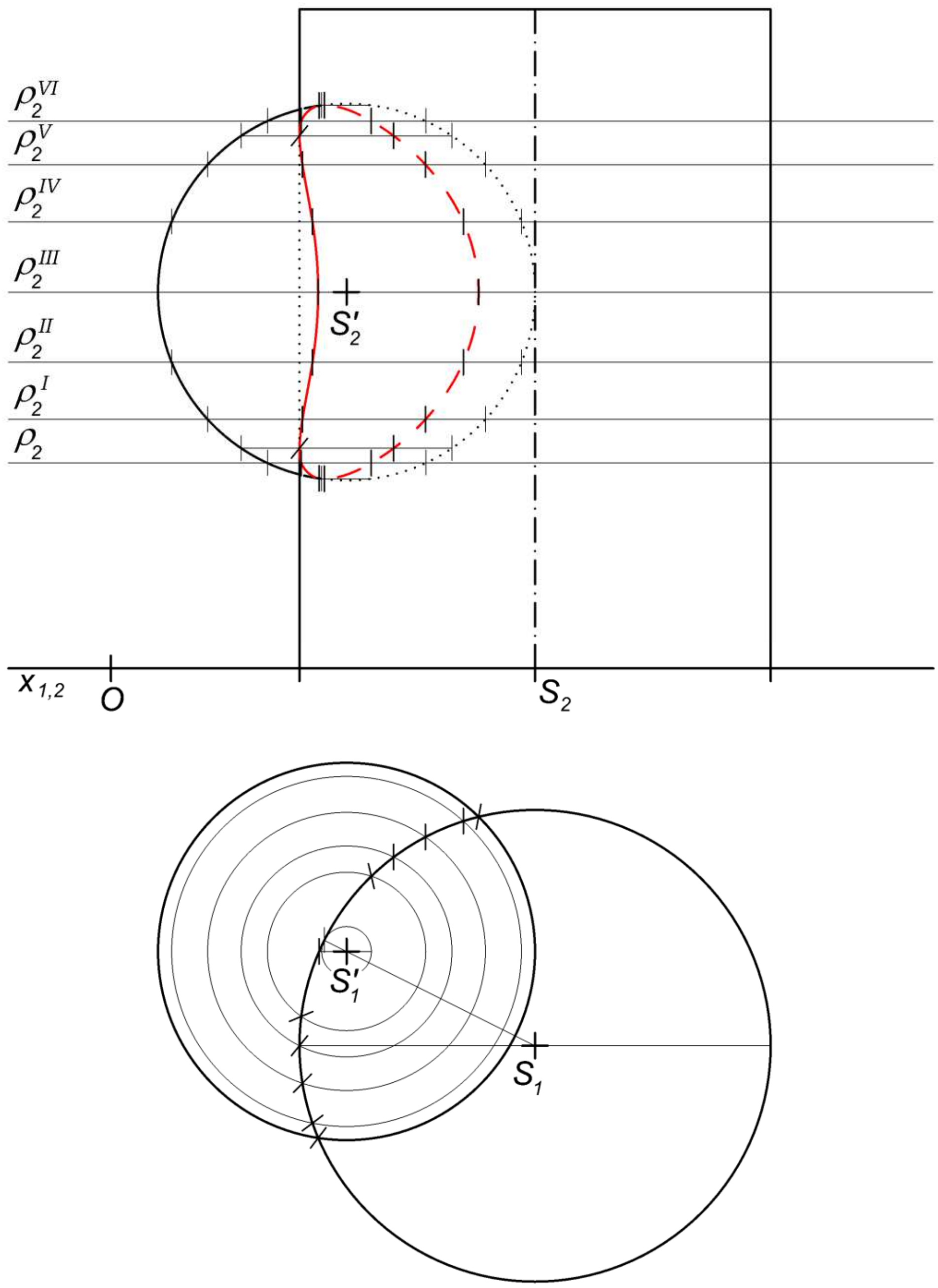
Obr. 4.2.4 a)



Obr. 4.2.4 b)

Příklad 4.3.1:

Zobrazte průnik rotačního válce a koule. Podstava válce leží v půdorysně a její střed je $S = [9; 8; 0]$ a poloměr 5 cm, výška válce je 14 cm (válec volte tak, aby jeho body měly nezápornou z-ovou souřadnici). Střed koule je $S' = [5; 6; 8]$ a poloměr je 4 cm. (obr. 4.3.1)



Obr. 4.3.1 a)

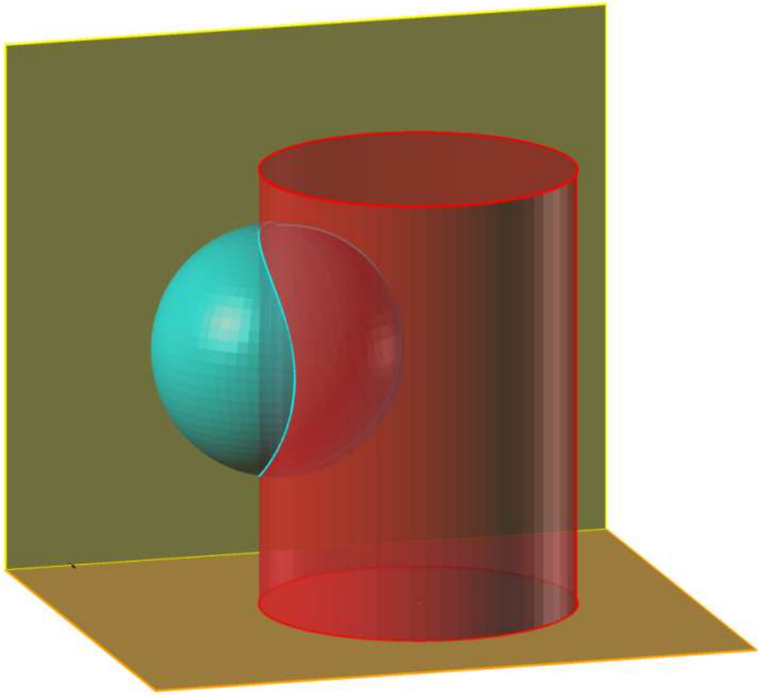
Řešení:

Nejprve si narýsujeme průměty koule a válce. Dále budeme postupovat metodou rovnoběžných řezů.

1) ***Nejprve budeme sestrojovat řezy těles rovinami rovnoběžnými s půdorysnou*** (viz např. *Příklad 4.2.1*). Řez kulové plochy bude tedy kružnice, která se v půdorysu zobrazí ve skutečné velikosti. Řezem válcové plochy bude kružnice, která v půdorysu splývá s kružnicí zdánlivého obrysu válce. Průsečíky odpovídajícího půdorysu kružnice řezu kulové plochy se zdánlivým obrysem válce jsou půdorysy bodů průnikové křivky (tj. body

ležící jak na povrchu koule, tak na povrchu válce). Jejich nárysy leží na nárysné stopě dané roviny ρ. Volme dostatečný počet těchto rovin řezu tak, abychom dokázali co nejpřesněji sestrojit v nárysu křivku průniku – roviny ρ, ρ^{I}, ρ^{II}, dále roviny ρ^{IV}, ρ^{V} a ρ^{VI} byly pro jednoduchost rýsování zvoleny souměrně s nimi podle roviny procházející středem koule (např. průsečíky na ρ^{IV} získáme pomocí ordinál z průsečíků v rovině ρ^{II}) a ještě rovina procházející středem koule ρ^{III}.

2) ***Nyní sestrojme nejvyšší a nejnižší bod průnikové křivky***. Snadno je sestrojíme v půdorysu, kde se válec i koule zobrazí jako kruhy. Body tedy musí ležet na půdorysném obrysu válce (tj. na dané kružnici), kdy oblouk této kružnice obrysu bude půdorysem křivky průniku. Tyto body leží na hlavní kružnici kulové plochy, která se v půdorysu dotýká zdánlivého obrysu válce (leží tedy v rovinách rovnoběžných s půdorysnou). Tyto povrchové kružnice budou mít totožné půdorysy. Sestrojme jejich nárysy a na nich nárys bodu, jehož půdorys je již sestrojený bod dotyku kružnice a zdánlivého obrysu válce.
3) ***Ještě sestrojíme v nárysu body dotyku křivky a obrysu válce***. Obrys válce v nárysu je totožný s hranicí nárysu řezu válce rovinou, která prochází osou válce a je rovnoběžná s nárysnou. Půdorys řezu je úsečka procházející bodem S_1. Krajním bodem této úsečky veďme kružnici se středem v bodě S'_1, která bude půdorysným průmětem povrchové kružnice (resp. dvě v půdorysu totožné kružnice) koule a sestrojme její nárysy. Tyto nárysy povrchových kružnic protínají obrysové přímky nárysu válce v bodech dotyku nárysu křivky průniku s obrysem válce. Podobným postupem sestrojme body dotyku nárysného obrysu koule s nárysem křivky průniku.
4) Nyní již v odpovídajícím pořadí ***spojíme v nárysu body křivky***. ***Viditelnost se určí*** opět pomocí viditelnosti daných částí obou těles – pro oblast, kde jsou části obou těles viditelné, bude viditelná i tato část křivky průniku. Dourčíme i viditelnost těles vzhledem k průniku.



Obr. 4.3.1 b)

Příklad 4.3.2:

Zobrazte průnik rotačního válce s podstavou v nárysně a rotačního kuželu s podstavou v půdorysně. Střed podstavy válce je $S = [6; 0; 6]$ a její poloměr je $r = 4$ cm, výška válce je $v = 12$ cm (válec volte tak, aby všechny jeho body měly nezápornou y-ovou souřadnici). Střed podstavy kuželu je $S' = [6; 6; 0]$ a poloměr podstavy je $r' = 5$ cm, výška kuželu je $v' = 13$ cm. (obr. 4.3.2)

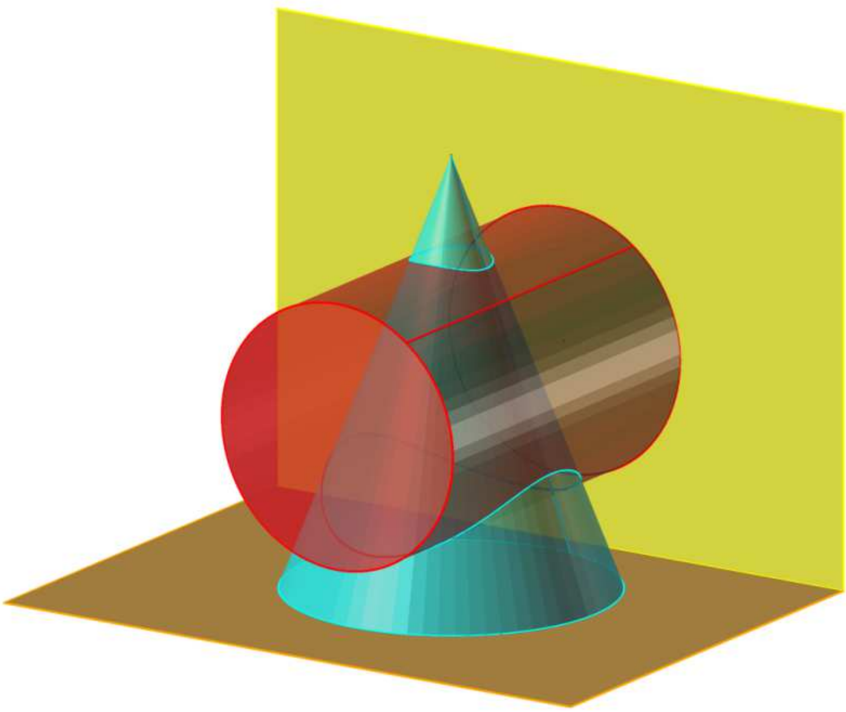
Řešení:

Nejprve si narýsujeme průměty válce a kuželu. Dále budeme postupovat metodou rovnoběžných řezů (*pozn.*: jak bylo smluveno, bereme jen povrchy těles), tedy podobně jako např. v *Příkladu 4.3.1*:

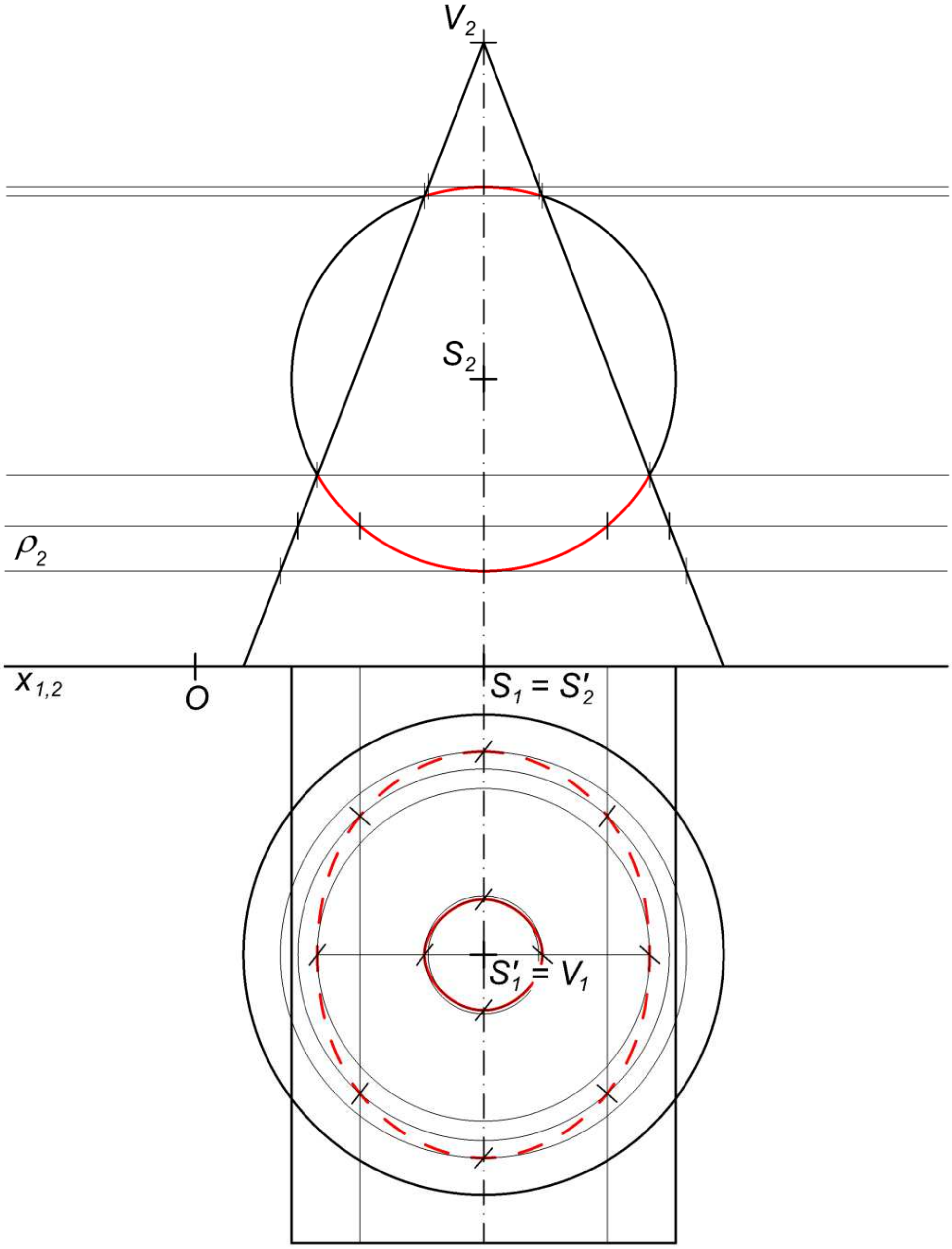
1) ***Volíme roviny ρ, rovnoběžné s půdorysnou***, protože řezy těmito rovinami budou pro válec obdélníky a pro povrch kuželu kružnice. Jelikož ***křivka průniku*** musí ležet na válci a zároveň na kuželi, ***v nárysu*** bude touto křivkou část průmětu podstavné kružnice válce. Navíc v nárysu vidíme, že tato kružnice je rozdělena nárysným obrysem kuželu na čtyři části, přičemž jen dvě leží v nárysném průmětu kuželu. Přesně tyto dvě „vnitřní“ části budou nárysem průnikové křivky. Nyní tedy víme, že ***průniková křivka se bude skládat ze dvou uzavřených křivek***. Sestrojme je (tedy jejich půdorysy) již zmíněnou metodou. Volme nejprve rovinu, která se dotýká

spodní části válce. Takto najdeme „krajní“ body jedné křivky průniku. Tato rovina protíná povrch kuželu v kružnici, která se v nárysu zobrazí jako úsečka o délce rovné průměru kružnice. V půdorysu se zobrazí ve skutečné velikosti – snadno tedy tento řez sestrojíme. Řezem válce libovolnou hlavní rovinou v nárysu bude úsečka, resp. bod (ve skutečnosti obdélník, resp. površka), jejíž krajní body leží na nárysu kružnice podstavy. Půdorys tohoto obdélníku sestrojíme již snadno. Průsečíky kružnice a okraje obdélníku v půdorysu jsou body na křivce průniku těles. Takto sestrojíme i další body. Samozřejmě pro rovinu, která se dotýká válce podél jeho površky, platí, že nárysem bude bod a půdorysem přímka (tj. průměty této površky). Ještě sestrojme body průniku, které jsou v nárysu průsečíky obrysů těles. Podobným způsobem sestrojme i horní křivku průniku.

2) ***Nyní v odpovídajícím pořadí*** (např. s využitím nárysu) ***spojíme body a vytvoříme tak dvě křivky průniku***. Ještě ***určíme viditelnost*** – V nárysu průnikové křivky nebudou vidět, neboť je zakrývá podstava válce. Dále také nebude vidět část obrysu kuželu, která leží „uvnitř“ obrysu válce. V půdorysu bude vidět ta průniková křivka, která leží na „vrchní polovině“ válce, to bude tedy ta křivka „blíže“ k průmětu vrcholu kuželu. Druhá křivka vidět nebude a s ní nebude vidět také část podstavy kuželu, která je „uvnitř“ půdorysu válce.



Obr. 4.3.2 a)



Obr. 4.3.2 b)

Příklad 4.3.3:

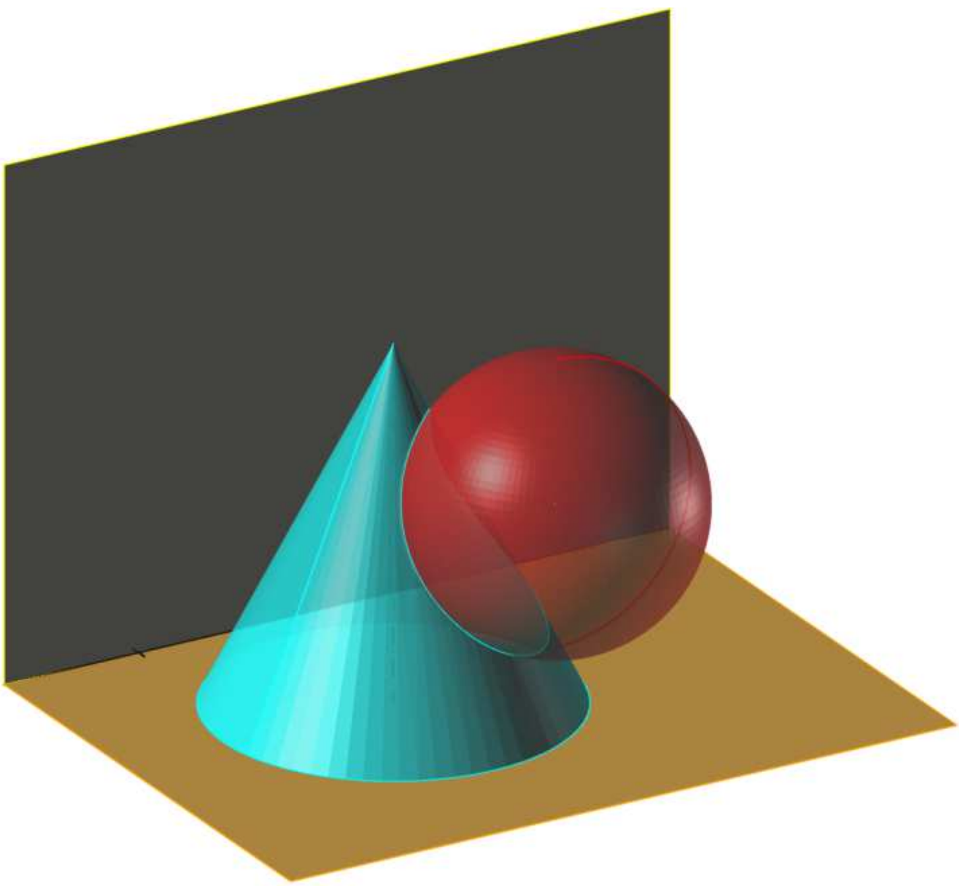
Zobrazte průnik rotačního kužele s podstavou v půdorysně a koule. Střed podstavy kuželu je $S = [4; 6; 0]$ a její poloměr je $r = 5$ cm, výška kuželu je $v = 10$ cm (kužel volte tak, aby měl vrchol kladnou z-ovou souřadnici). Střed koule je $S' = [7; 9; 6]$ a poloměr je $r' = 4$ cm. (obr. 4.3.3)

Řešení:

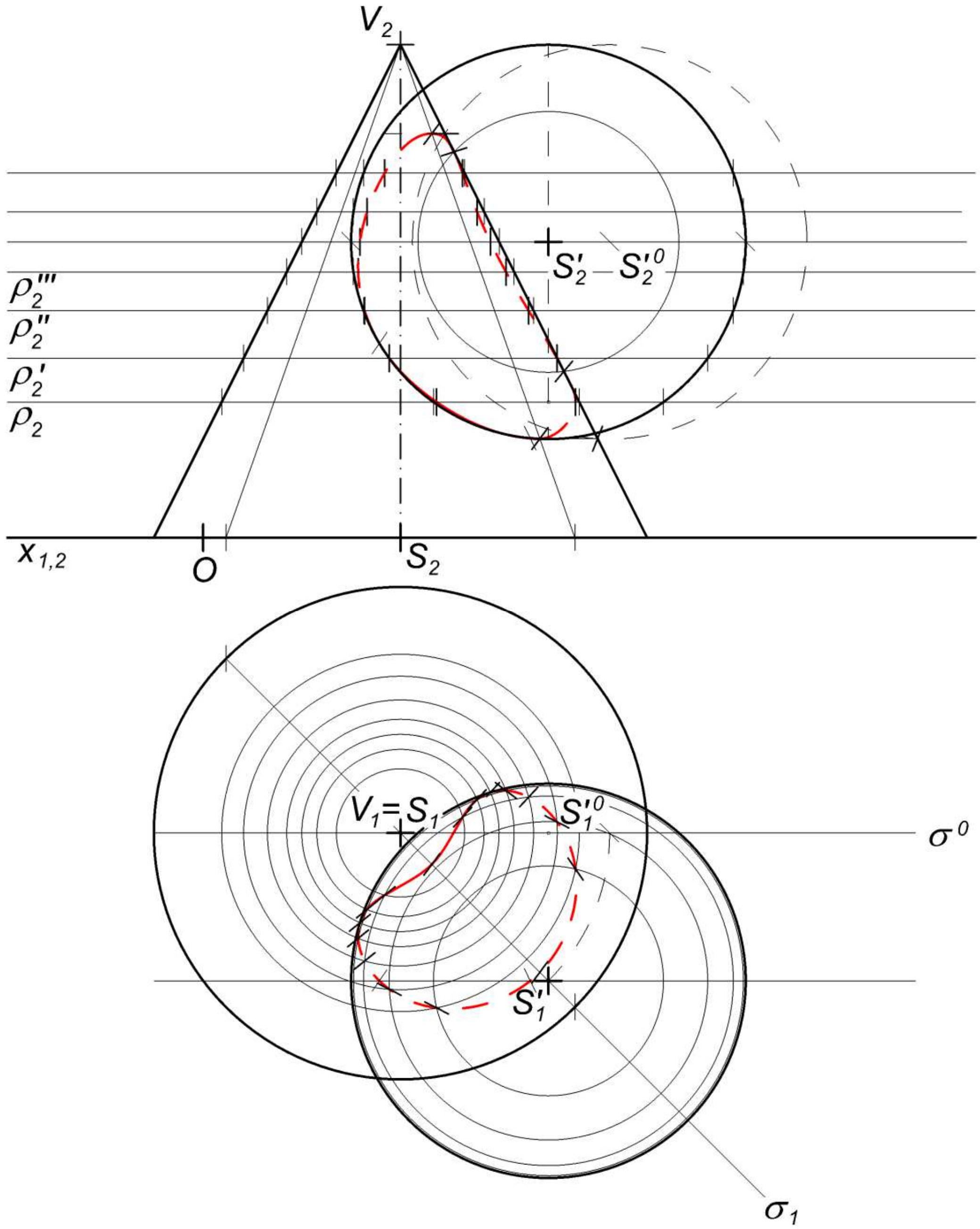
Nejprve si narýsujeme průměty obou těles, dále budeme uvažovat jen průnik povrchů těchto těles. Průnikovou křivku budeme sestrojovat opět pomocí metody rovnoběžných řezů.

1) ***Vzhledem k poloze těles bude průniková křivka jedna a bude uzavřená*** (tedy se jedná o částečný průnik). ***Využijeme metodu rovnoběžných řezů*** (viz *Příklad 4.2.1*) ***pro sestrojení bodů křivky průniku***. Roviny řezu ρ (pro přehlednost nejsou všechny pojmenovány), budeme volit rovnoběžné s půdorysnou, neboť řezy povrchy těles těmito rovinami jsou kružnice, které se samozřejmě v nárysu zobrazí jako úsečky a v půdorysu jako kružnice o skutečné velikosti. Postupujeme podobně jako např. v *Příkladu 4.3.2*. Středy kružnic řezů kulové plochy v nárysu vidíme na svislici procházející bodem S_2'. Pro přehlednost není již řez koule rovinou procházející jejím středem vyznačen (splývá totiž s obrysem koule v půdorysu).
2) Nyní ***sestrojme „nejvyšší" a „nejnižší" bod*** průnikové křivky v nárysu. Tyto body leží v rovině σ, která obsahuje střed koule a osu kuželu. Řezy povrchů těles touto rovinou jsou ve skutečnosti hranice trojúhelníku a kružnice. Abychom snadno sestrojili průsečíky průnikových křivek (tj. zmíněné kružnice a okraje trojúhelníku) v nárysu, řezy si otočíme (aby se v nárysu zejména kružnice zobrazila jako kružnice) – otočíme rovinu σ kolem osy kuželu do polohy σ^0 rovnoběžné s nárysnou. Střed kružnice řezu (tj. střed kulové plochy) se otočí v půdorysu do polohy $S_1'^0$ kolem bodu S_1. Nárys otočeného řezu bude kružnice, jejíž střed bude $S_2'^0$ a bude ležet na horizontální přímce jdoucí bodem S_2. Otočený nárys řezu kuželu bude shodný s nárysným obrysem kuželu. Nyní tedy v nárysu sestrojíme průsečíky hranice trojúhelníku obrysu kuželu a otočené kružnice řezu kulové plochy. Tyto průsečíky se při otáčení budou v nárysu pohybovat po úsečkách rovnoběžných s $x_{1,2}$, tedy z těchto průsečíků narýsujme tyto úsečky, jejichž koncové body budou na obrysu kulové plochy (průsečíky totiž nemohou ležet mimo její obrys). Pomocí površek na kuželu, které leží v rovině σ, sestrojíme také body řezu povrchu kuželu v půdorysu. Tyto površky protínají přímky rovnoběžné s $x_{1,2}$ procházející průsečíky otočeného řezu v hledaných bodech. Sestrojme i půdorysy těchto průsečíků na σ_1.
3) ***Nakonec ještě sestrojme průsečíky průnikové křivky s obrysy těles***. Bod dotyku křivky s nárysným obrysem kuželu sestrojíme pomocí řezu rovinou, která prochází osou kuželu a je rovnoběžná s nárysnou, tj. již sestrojená rovina σ^0. Tato rovina protíná kulovou plochu v kružnici, která se

v půdorysu zobrazí jako úsečka a v nárysu jako kružnice o skutečné velikosti. Kde v nárysu tato kružnice protíná obrys kuželu, jsou hledané body dotyku. V půdorysu jsme již body dotyku křivky a obrysu kulové plochy sestrojili – jsou to body, které jsme získali jako průsečíky řezů povrchů těles rovinou, která prochází bodem S'. Ještě zbývá v nárysu sestrojit body dotyku křivky se zdánlivým obrysem koule. Museli bychom udělat řez kuželu rovinou rovnoběžnou s nárysnou procházející středem koule. Řezem kuželové plochy by však byla hyperbola. Proto sestrojme tyto body pomocí již narýsované křivky průniku v půdorysu, jako její průsečíky s danou rovinou (tedy jen přibližně). ***Viditelnost křivky*** se opět sestrojí pomocí viditelnosti částí obou těles. Ještě určeme ***viditelnost těles*** vzhledem k průniku.



Obr. 4.3.3 a)



Obr. 4.3.3 b)

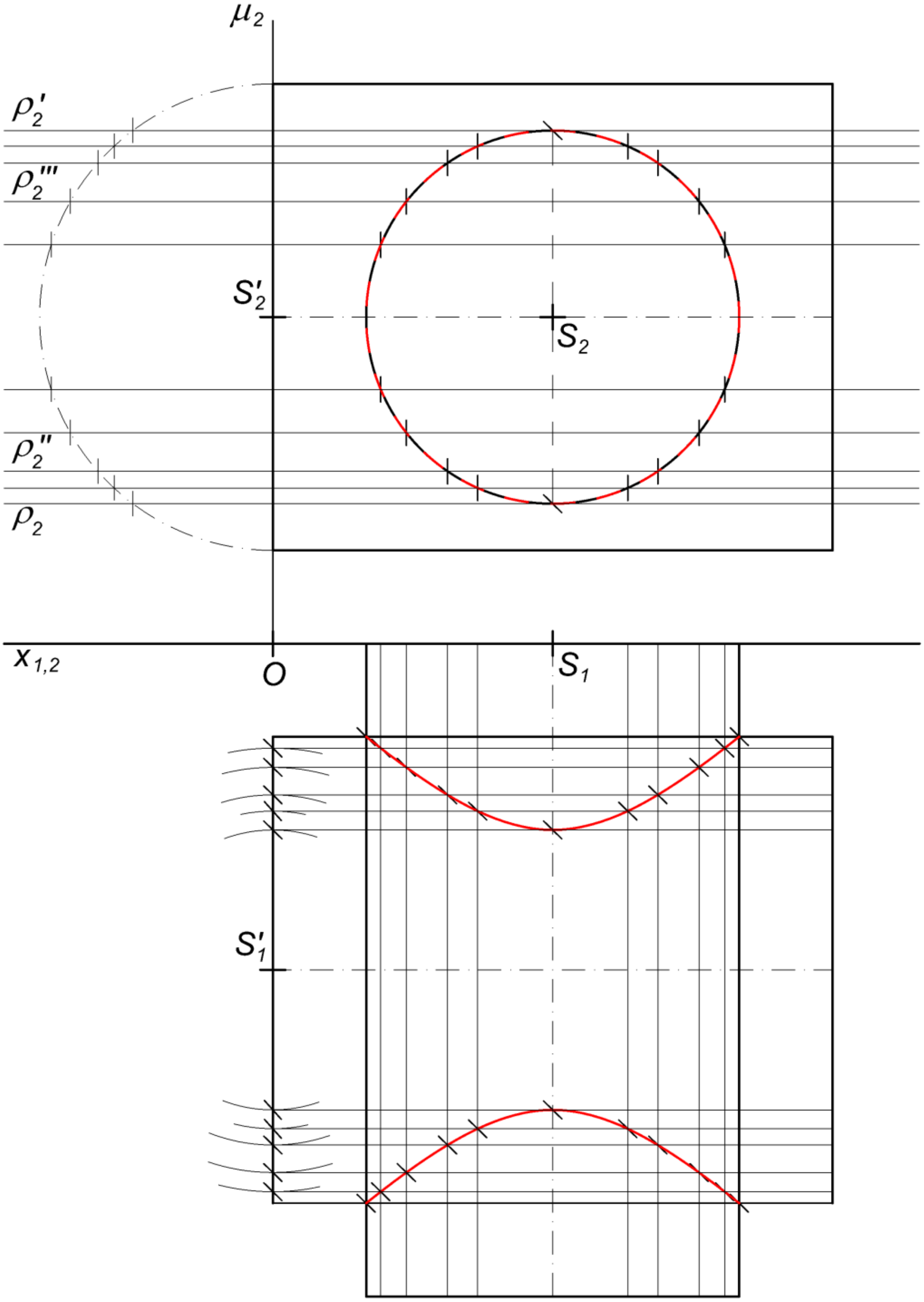
Příklad 4.3.4:

Zobrazte průnik válce α s podstavou v nárysně, jehož střed podstavy je $S = [6; 0; 7]$ a poloměr $r = 4$ cm a výška válce je $v = 14$ cm, a válce β s podstavou v bokorysně, pro nějž platí: střed podstavy je $S' = [0; 7; 7]$ a její poloměr $r' = 5$ cm, výška válce je $v' = 12$ cm (válce volte tak, aby všechny jejich body měly nezáporné souřadnice). (obr. 4.3.4)

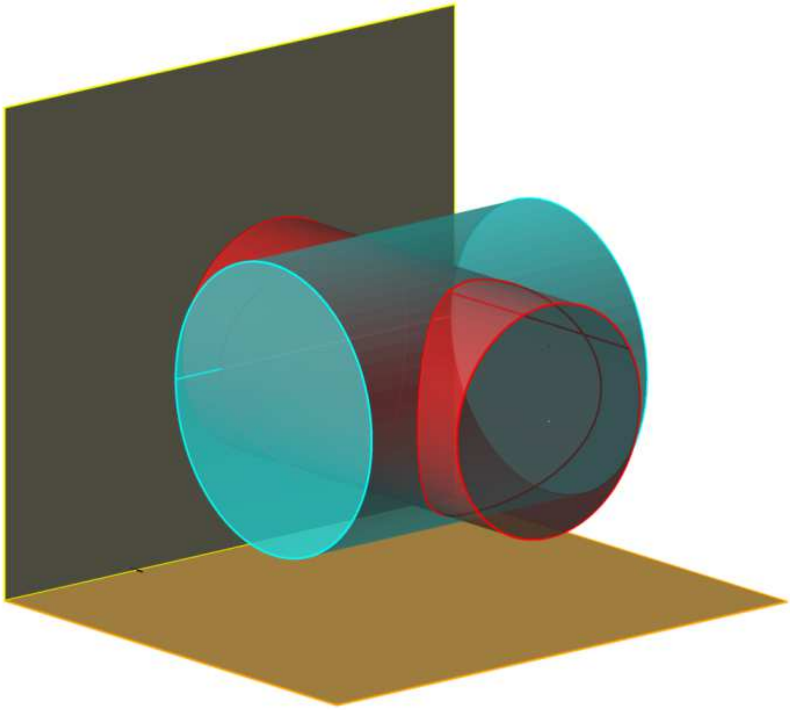
Řešení:

Nejprve si narýsujeme průměty obou válců.

1) ***Podstava válce β leží v bokorysně*** μ, která se v nárysu zobrazí jako úsečka ležící na přímce procházející počátkem kolmo k základnici. Pokud bokorysnu otočíme buď do nárysny, nebo kolem průměru podstavy válce β do hlavní roviny rovnoběžné s nárysnou, zobrazí se podstava válce β ve skutečné velikosti.
2) ***Nyní budeme opět konstruovat řezy válci rovinami, které jsou rovnoběžné s oběma jejich osami.*** (*Pozn.*: Mohli bychom také v tomto případě, kdy osy jsou různoběžné, sestrojovat body průniku pomocí průnikových kružnic povrchu válce se soustřednými kulovými plochami, jejichž středy by byly v průsečíku os válců – tento postup můžeme najít např. v průniku válce a komolého kuželu v [4] na str. 287.) Veďme tedy roviny řezu ρ a ρ' „nejvyšším" a „nejnižším" bodem na válcové ploše α rovnoběžné s osami válců. Tyto roviny protnou oba válce v obdélnících, které snadno sestrojíme pomocí průsečíků ρ_2 a ρ'_2 s nárysnou kružnicí obrysu válce α a s nárysným obdélníkem obrysu válce β (přesněji s otočenou podstavou válce β). Body průniku hranice podstavy válce β s rovinami sestrojíme v půdorysu pomocí otočené bokorysny, tj. vzdálenost průsečíku od μ_2 je rovna y-ové souřadnici průsečíku. Takto konstruujeme libovolný počet rovin a získáváme tak body průniku těles. Rovnou můžeme sestrojovat i roviny středově souměrné podle bodu S', tj. rovina ρ' je symetrická k rovině ρ a rovina ρ''' je symetrická k rovině ρ'' (a opačně). Dále bude také do křivky průniku náležet i bod, jehož půdorys je průsečík obdélníků obrysů válců, tj. čtyři takové body, které leží v rovině ρ, procházející oběma osami těles. Pro přesnost půdorysu křivky průniku ještě sestrojme více bodů průniku kolem osy válce α.
3) ***Nárys křivky průniku*** je totožný s nárysem podstavy válce α. V půdorysu jsou to dvě křivky, které získáme spojením odpovídajících bodů průniku a které jsou navzájem symetrické podle půdorysu osy válce β. ***Viditelnost křivek*** v půdorysu se určí podle viditelnosti částí válců, tedy bude vidět jejich horní polovina, avšak dolní polovina křivek je totiž v průmětu s ní totožná (tedy netřeba ji vyznačovat). V nárysu pak křivka vidět není, neboť jí zakrývá podstava válce α. Jelikož je křivka společná oběma tělesům a ta jsou souměrná podle roviny, která prochází oběma jejich osami, je i tato průniková křivka souměrná podle stejné roviny.



Obr. 4.3.4 a)



Obr. 4.3.4 b)

Příklad 4.3.5:

Zobrazte průnik kuželu α a β. Kužel α má podstavu v půdorysně, jeho střed podstavy je $S = [2; 6; 0]$, poloměr $r = 5$ cm a výška $v = 12$ cm. Kužel β má podstavu v půdorysně, její střed je $S' = [6; 10; 0]$, její poloměr $r' = 6$ cm a výška kuželu je $v' = 10$ cm (tělesa volte tak, aby ležela v 1. kvadrantu). (obr. 4.3.5)

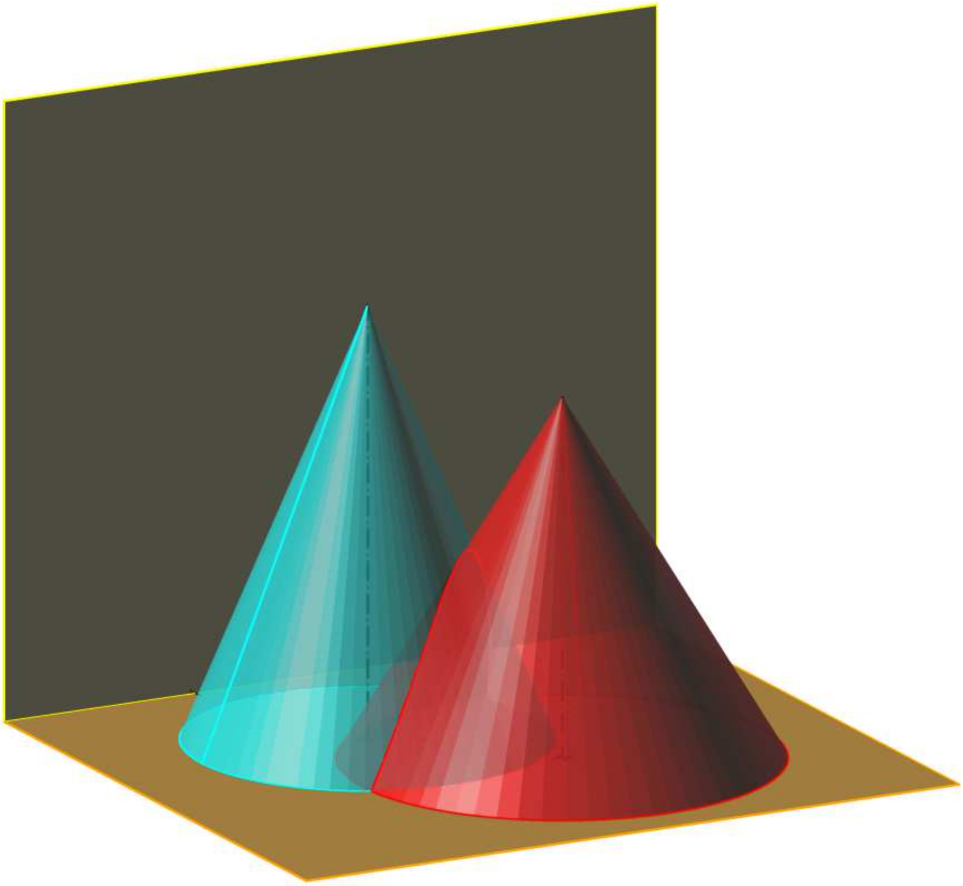
Řešení:

Nejprve si narýsujeme průměty obou kuželů.

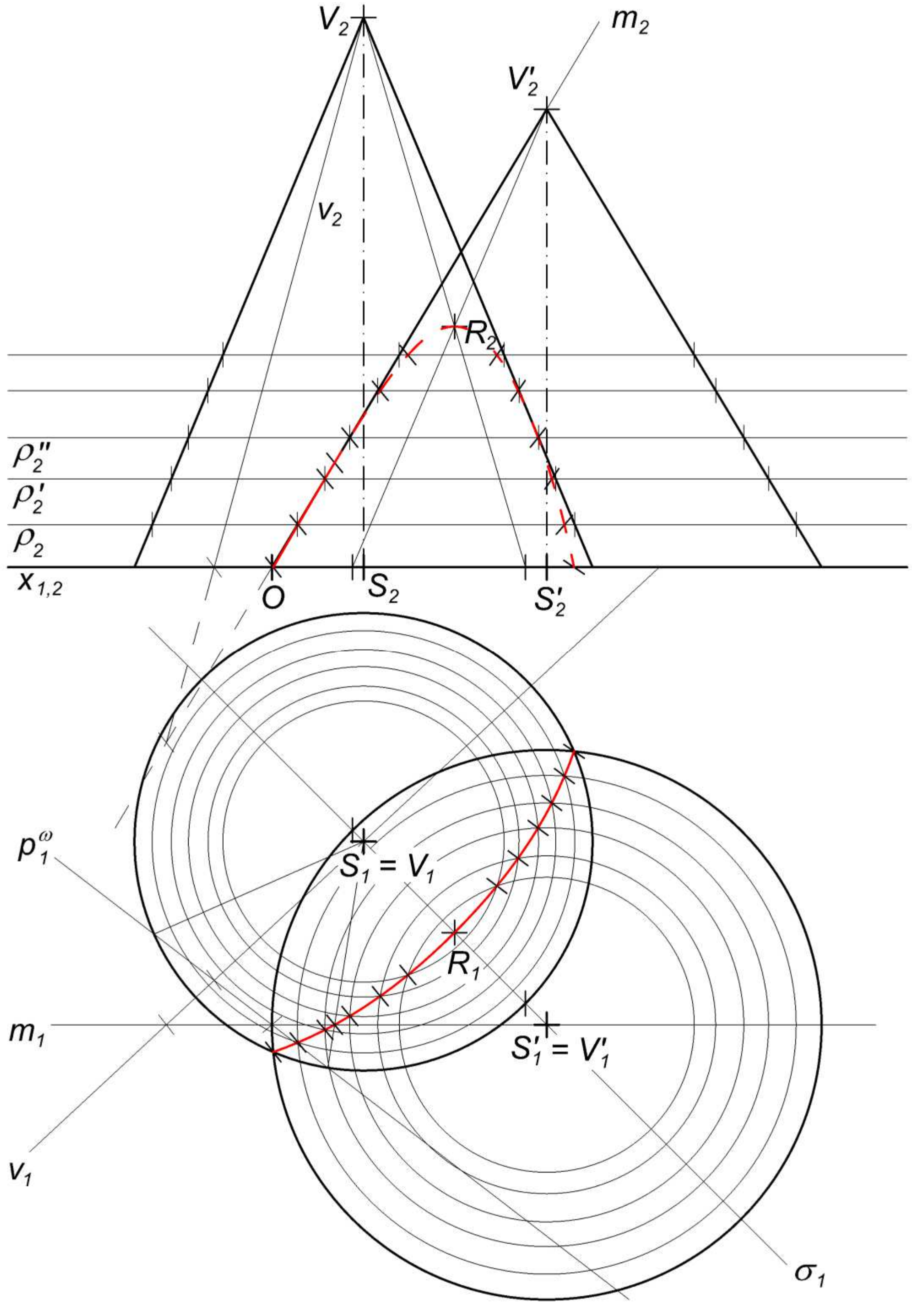
1) ***Průniková křivka bude ležet na površích obou těles***. Její nejvyšší bod bude průsečíkem dvou površek kuželů a to přesně těch, které leží v rovině procházející oběma osami kuželů. Sestrojme tedy tento bod R pomocí površek z roviny σ. Další body na křivce průniku jsou průsečíky podstavných kružnic. Sestrojme jejich průměty. Dále budeme postupovat opět metodou rovnoběžných řezů (viz např. *Příklad 4.2.1*). Řezy kuželových ploch rovinami ρ, ρ' atd. (pro přehlednost nejsou všechny roviny označeny) jsou kružnice, které se v půdorysně zobrazí ve skutečné velikosti. Takto tedy sestrojme dostatečné množství bodů k co nejpřesnějšímu sestrojení průnikové křivky.
2) ***Nyní ještě sestrojme v nárysu body dotyku průnikové křivky s obrysy kuželů***. Pro dotyk s kuželem β sestrojme jeho površku m, jejíž nárys je částí

zdánlivého obrysu kuželu. Na ní musí ležet jeden bod průnikové křivky. Hledáme tedy průsečík této přímky s druhým kuželem, tj. hledáme vhodný řez kuželové plochy α, v jehož rovině leží přímka m. Vhodnou rovinou je vrcholová rovina, neboť ta protne kuželovou plochu ve dvou jeho površkách. Tedy sestrojíme vrcholovou přímku v kuželu α (v půdorysu přímku v zvolíme libovolně a pomocí jejího průsečíku s přímkou m sestrojíme i její nárys). Přímka v a m určují rovinu ω, která prochází oběma vrcholy kuželů, tedy sestrojme p_1^{ω}. Řez kuželové plochy α touto rovinou jsou (díky volbě přímky v vrcholem kuželu) dvě površky, kde pouze jedna protne přímku m v hledaném dotykovém bodě průnikové křivky.

3) Nyní již můžeme ***sestrojit viditelnost průnikové křivky*** a díky ní i ***viditelnost obou těles vzhledem k průniku.***



Obr. 4.3.5 a)



Obr. .4.3.5 b)

Příklad 4.3.6:

Zobrazte průnik dvou koulí κ^1 a κ^2. Střed koule κ^1 je $S = [2; 6; 6]$ a její poloměr je $r = 5$ cm, střed koule κ^2 je $S' = [8; 8; 8]$, poloměr je $r' = 4$ cm. (obr. 4.3.6)

Řešení:

Nejprve si narýsujeme průměty obou těles. Dále budeme uvažovat jen křivku průniku povrchů koulí.

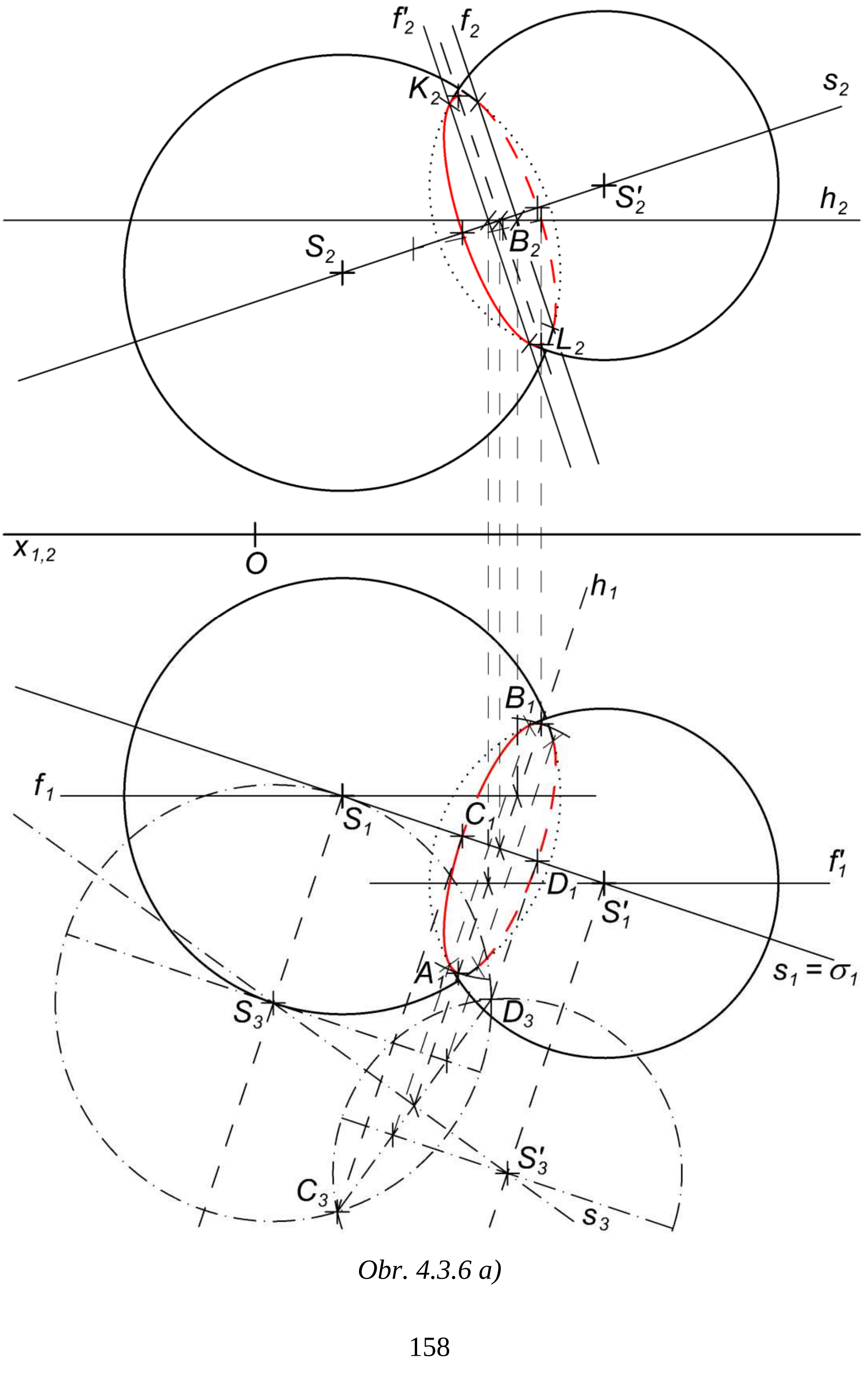
1) **Aby se dvě koule protly, musí být vzdálenost jejich středů menší než součet jejich poloměrů, což je splněno.** ***Nyní se zamysleme, co bude***

průnikovou křivkou kulových ploch. Křivku budou tvořit body, které leží zároveň na obou kulových plochách. Obě kulové plochy (tedy i body na nich) jsou souměrné podle všech rovin, které prochází oběma středy koulí. To však znamená, že všechny body křivky musí mít stejnou vzdálenost od průsečnice těchto rovin, tedy od středné. Navíc musí mít také stejnou vzdálenost od jednoho i od druhého středu koule (jelikož musí ležet na povrchu koulí), což znamená, že se bude jednat o rovinnou křivku. Obě koule také můžeme sestrojit rotací kružnic se středem v daném středu koule, pro lepší popis ležící v jedné rovině, kolem středné. To znamená, že průsečík těchto kružnic (což je bod průniku koulí) bude vytvářet rotací hledanou průnikovou křivku těles. Podle obou podmínek tedy ***bude průnikovou křivkou kružnice***. (*Pozn.*: Jiné vysvětlení toho, že průnikem je kružnice najdete v [4], str. 287.) Navíc bude ležet v rovině kolmé ke středné, která je vzhledem k průmětnám v obecné poloze – průmětem bude tedy elipsa. Sestrojme její eliptické průměty.

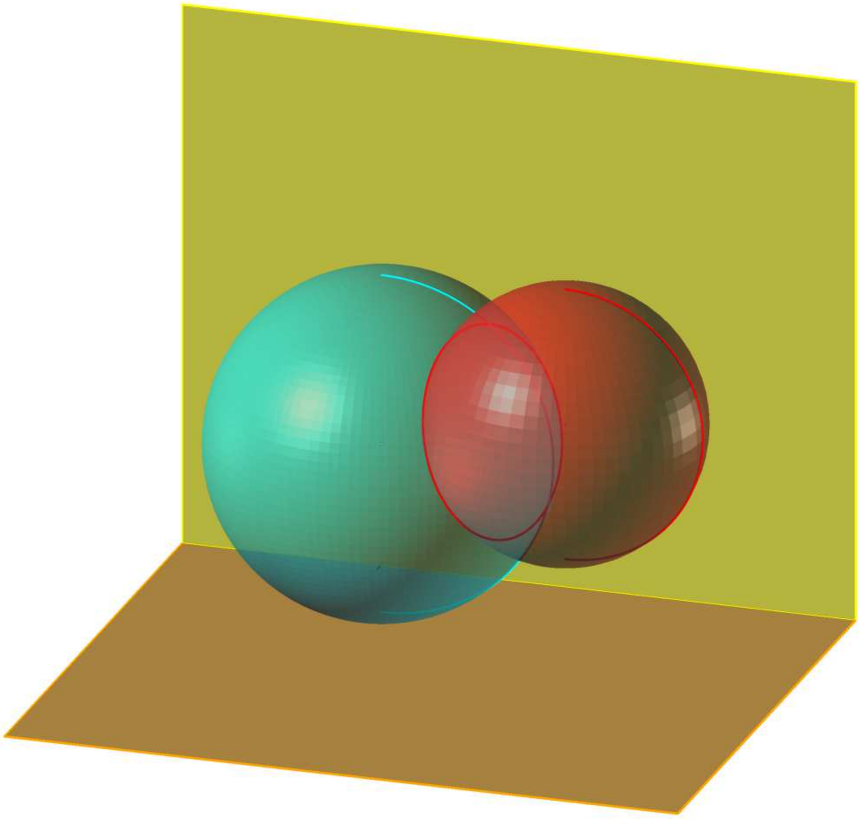
2) Sestrojme tedy ***střednou a její půdorysně promítací rovinu*** $\boldsymbol{\sigma}$. Řez kulovými plochami touto rovinou jsou hlavní kružnice (tj. kružnice o poloměrech shodných s poloměry příslušných koulí). ***Rovinu i s řezy sklopme*** (tj. sestrojme třetí průměty těles) do hlavní roviny rovnoběžné s půdorysnou, která se dotýká koule κ^1. Sestrojíme vedlejší a hlavní vrcholy elipsy půdorysu – hlavní osa je kolmá na s_1 a vedlejší splývá s s_1. Ve sklopení (resp. v třetím průmětu) se hlavní průměr zobrazí jako bod a vedlejší průměr jako úsečka spojující průsečíky kružnic. Otočením této roviny zpět sestrojíme eliptický půdorys kružnice průniku. ***Elipsa nárysu průniku*** bude mít střed na ordinále z půdorysu středu a hlavní osa bude navíc kolmá na s_2, její velikost už známe. Nyní pomocí proužkové konstrukce např. z bodu B_2, který leží na horizontální přímce jdoucí středem kružnice průniku ploch, sestrojíme celý eliptický nárys průnikové křivky.

3) Nyní ***schází určit jen body dotyku průmětu průnikové křivky s obrysy koulí***. Půdorysné obrysy koulí jsou průměty hlavních kružnic rovnoběžných s půdorysnou. Ve třetím průmětu jsou to úsečky procházející středem dané koule. Ty protínají úsečku, která je třetím průmětem řezu, v hledaných bodech dotyku. Sestrojme tedy jejich půdorysy a ***určeme viditelnost průnikové křivky*** (pomocí viditelnosti částí koulí). V nárysu sestrojíme body dotyku pomocí frontálních přímek, které leží v rovině průnikové

kružnice těles a zároveň v rovině hlavních kružnic koulí, které jsou rovnoběžné s nárysnou (tedy ty kružnice, jejichž průmět je totožný s nárysným obrysem dané koule). Tedy f_1 a f'_1 jsou různoběžné s h_1 a pomocí jejích průsečíků sestrojíme nárysy frontálních přímek, neboť f_2 a f'_2 musí být kolmé na s_2. Průsečíky f_2 a f'_2 s obrysy koulí jsou hledané body dotyku. Sestrojme tedy viditelnost této elipsy v nárysu. ***Viditelnost částí koulí*** se určí snadno podle viditelnosti jejich průnikové křivky.



Obr. 4.3.6 a)



Obr. 4.3.6 b)

Závěr

V této práci jsou v první kapitole shrnuty základy Mongeova promítání i s potřebnými příklady. Další kapitoly, které jsou hlavní složkou práce, se pak týkají řešení jednotlivých příkladů, přičemž ve druhé kapitole se práce zabývá zobrazením těles (jak hranatých, tak rotačních) a v následující se pak řeší jejich řezy. Poslední kapitola se věnovala průniku všech typů těchto těles.

Na závěr bych chtěla poznamenat, že tato práce byla sepsána pro výuku deskriptivní geometrie na středních školách. Ze své praxe vím, že je velice užitečné mít k dispozici krokované řešení příkladu, které je možno promítat a během toho procházet mezi žáky a kontrolovat jejich práci. Samozřejmě ne každý učitel má k dispozici projektor nebo je nakloněn takovému stylu výuky. Snad se najde alespoň pár z nich, kteří tuto práci ocení a využijí. Další možností využití této práce je možnost vytisknout si první stranu v krokovaném PDF, kde je zadání již předkreslené – žáci tedy neztrácí čas rýsováním zadání.

Dále je práce využitelná i pro studenty, kteří si příklady mohou procházet sami doma (např. pokud něco zameškají) a sledovat při čtení řešení také krokování příkladu.

Věřím, že tato práce bude k užitku a přispěje k přiblížení deskriptivní geometrie studentům.

Seznam použité literatura a zdrojů

[1] www.karlin.mff.cuni.cz/~plichtova/Diplomka/AfinitaAKolineace/?page=NPBod

[2] A. Urban: Deskriptivní geometrie 1, SNTL/SVTL, Praha, 1965

[3] A. Urban: Deskriptivní geometrie 2, SNTL/Alfa, Praha, 1984

[4] E. Pomykalová: Deskriptivní geometrie pro SŠ, Prometheus, Praha, 2010, ISBN 978-80-7196-400-1

[5] B. Musálková: Deskriptivní geometrie pro 2. ročník SPŠS, Sobotáles, Praha, 2000, ISBN 80-85920-65-4

[6] J. Korch, K. Mészárosová, B. Musálková: Deskriptivní geometrie pro 1. ročník SPŠS, Sobotáles, Praha, 1998, ISBN 80-85920-49-2

Seznam obrázků